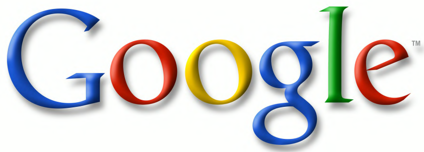




320 Nicholas Ave
New York

507 W. 41 Street
New York
[illegible]

70 t

BALISTIQUE EXTÉRIEURE

NANCY. — IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT ET Cie

BALISTIQUE EXTÉRIEURE

PAR

F. SIACCI

LIEUTENANT-COLONEL DE L'ARTILLERIE ITALIENNE,
PROFESSEUR DE BALISTIQUE A L'ÉCOLE D'APPLICATION DE L'ARTILLERIE ET DU GENIE,
PROFESSEUR ORDINAIRE DE MÉCANIQUE SUPÉRIEURE A L'UNIVERSITÉ ROYALE DE TURIN,
DÉPUTÉ AU PARLEMENT.

TRADUCTION ANNOTÉE

Par P. LAURENT

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES
INGÉNIEUR A LA SOCIÉTÉ DES FORGES ET CHANTIERS DE LA MÉDITERRANÉE

SUIVIE D'UNE

NOTE SUR LES PROJECTILES DISCOÏDES

Par F. CHAPEL, chef d'escadron au 11e régiment d'artillerie.



BERGER-LEVRAULT ET Cie, ÉDITEURS

PARIS
5, RUE DES BEAUX-ARTS

NANCY
18, RUE DES GLACIS

1892

PRÉFACE DE L'AUTEUR [1]

Ce livre n'est pas une simple traduction de l'édition italienne de 1888. Outre les notes dont MM. le commandant Chapel et l'ingénieur Laurent ont bien voulu l'enrichir, j'y ai fait moi-même plusieurs additions. Je signalerai seulement la note VIII, qui indique la manière de développer suivant les puissances inverses du coefficient balistique, la fonction β que notre méthode a introduite dans les formules de tir.

Dans la pratique, on peut faire $\beta = 1$, sauf à le rectifier par le tir dans le cas des grands angles. Mais au point de vue théorique, la solution complète du problème balistique exige la détermination de cette fonction β, détermination qui doit pouvoir s'adapter, précisément comme notre *Table balistique*, à toute forme de résistance, à propos de laquelle cela seulement nous est bien assuré jusqu'ici, qu'elle ne suit ni la loi quadratique, ni la loi cubique, ni aucune autre loi semblable.

La série que nous développons dans la Note VIII satisfait à cette condition. Nous en avons calculé le premier terme, et nous avons dressé une table qui en donne les valeurs numériques pour tous les cas pratiques. Si la *Table balistique* est le premier pas vers la solution générale du problème balistique, la nouvelle table est le second pas. Une troisième table don-

---

[1] Écrite spécialement pour l'édition française.

nant le coefficient du deuxième terme de la série sera le troisième pas, et ainsi de suite. Dans cette succession de termes et de tables, il nous semble voir la solution complète, théorique et pratique en même temps, du problème dans sa plus grande généralité.

Mais cette série est-elle convergente? ou du moins l'est-elle à la façon de la série de Stirling? Il est difficile de répondre à la question par une démonstration analytique. Nous pouvons néanmoins affirmer que dans tous les cas particuliers où, le problème étant soluble par les quadratures, nous avons pu effectuer des vérifications, ces vérifications ont toujours et parfaitement réussi.

Turin, 1891.

F. SIACCI.



NOTE DU TRADUCTEUR

Dans la traduction que nous présentons, nous nous sommes attaché à suivre le texte italien et à le serrer de près le plus possible. Le lecteur ne sera donc pas étonné de trouver quelques néologismes qu'il ne rencontrerait certainement pas dans un ouvrage français. Nous avons tenu à traduire textuellement quelques expressions italiennes qui n'ont pas leur équivalent dans notre langue. Il sera du reste facile de se rendre compte de la valeur et de la signification de ces expressions par le développement du texte. C'est ainsi que nous avons introduit le mot *Retardation,* très peu usité en français, mais que l'on trouve cependant dans Bailly et Laplace. Il en est de même des expressions *Errore battuto* et *Aggiustamento del tiro,* qui n'ont pas leur équivalent en français et que nous avons traduites par Erreur battue et Ajustement du tir. Peut-être pensera-t-on que nous aurions dû employer des périphrases pour rendre le sens du texte italien, nous n'avons pas cru pouvoir le faire, afin de laisser toute sa valeur à l'expression italienne. Aux différents exemples pris par l'auteur dans l'artillerie en service en Italie, nous en avons ajouté d'autres choisis dans l'artillerie française. Au sujet des projectiles lenticulaires, le commandant Chapel a bien voulu nous prêter son concours, en rédigeant une note sur les propriétés rétrogrades des projectiles discoïdes; nous lui en témoignons ici toute notre reconnaissance.

Paris, 1892.

P. L.

PRÉFACE

DE LA SECONDE ÉDITION ITALIENNE

La *Balistique* que nous publions aujourd'hui, bien que portant le titre de deuxième édition, diffère complètement du cours publié de 1870 à 1885. Dans ces dernières années, la balistique a fait de nombreux progrès, et pour la mettre à la hauteur de ceux-ci, il a fallu nécessairement augmenter l'ancienne édition.

Le nouveau volume, en dehors des notes qui occupent le dernier tiers du livre, ne contient comme théorie que ce qu'il est suffisant de connaître au point de vue des applications pratiques, et répond au programme des cours que nous avons faits à l'École d'application durant ces deux dernières années. Ce programme est le résultat de la sélection faite entre vingt autres qui l'ont précédé, tour à tour augmentés ou réduits, suivant les progrès de la science, les expériences du polygone et la pratique des cours. En traitant d'une science née avec Tartaglia et Galilée, perfectionnée par Newton, Euler, Bernouilli, d'Alembert, Legendre, Poisson, et tant d'autres balisticiens moins célèbres, l'ouvrage ne pouvait être complètement original. On ne pourrait cependant le considérer comme une simple compilation. Appartiennent à l'auteur les méthodes désormais universellement adoptées pour résoudre les problèmes de tir (p. 68), les Notes et autres particularités de peu d'importance.

Les Notes placées à la fin du volume s'adressent à ceux qui s'intéressent aux progrès de la science et qui voudraient y contribuer. Il eût peut-être été utile de donner dans cet ouvrage un

résumé des travaux de Saint-Robert, de Mayevski et de Magnus de Sparre sur les particularités du mouvement des projectiles oblongs, mais le volume étant déjà considérable, il nous a paru préférable de renvoyer le lecteur aux sources (note VII).

Notre intention d'ailleurs n'est pas de présenter un traité de science pure, mais un ouvrage d'utilité immédiate. Il y a peu d'années que la balistique était encore considérée par les artilleurs et non sans raison comme une science de luxe, réservée aux théoriciens (p. 183). Nous nous sommes efforcé de la rendre pratique, propre à résoudre les questions de tir rapidement, facilement, avec la plus grande exactitude possible, avec économie de temps et d'argent. Le lecteur sera juge si nous avons atteint notre but.

Nous exprimons, ici, notre gratitude au capitaine Carlo Parodi, notre collègue à l'École d'application, qui a bien voulu revoir nos épreuves et nous aider de ses utiles conseils.

Turin, 1888.

F. Siacci.



TABLE DES MATIÈRES



ERRATA

Page	Ligne	*Au lieu de*	*Lire*
35	16	$e^{\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}}$	$e^{\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}}dq$
43	1	Résistance minimum	Angle de portée maximum
48	12	$\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$	$\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$
»	21	$x = -$	$x =$
»	22	$t = -$	$t =$
50	37	Resolvere	Risolvere
59	2	table de balistique	table balistique
»	14	$\frac{g}{q^2}\left(\frac{1}{2u^2}Q_1 + \log u + Q_2\right)$	$\frac{g}{q^2}\left(\frac{1}{2u^2} - Q_1 \log u + Q_2\right)$
61	4	$\frac{2}{3c^2}\left[\frac{1}{4u^2} + \frac{C_1}{u} + C_2\right] = \frac{1}{q^2}\left[Q_2 + Q_1 \log u + \frac{1}{2u^2}\right]$	$\frac{2}{3c^2}\left[\frac{1}{4u^2} + \frac{C_1}{u} + C_2\right] = \frac{1}{q^2}\left[Q_2 - Q_1 \log u + \frac{1}{2u^2}\right]$
»	10	$\frac{K_1}{4u^2}$	$\frac{K_1}{4u^4}$
66	15	Onze	Douze
»	19	Novo metodo per calcollere	Nuovo metodo per calcolare
»	33	exactes	exacte
70	5	la portée $V\varphi$ et X	la portée X
»	8	$\frac{V^2 \sin^2\varphi}{2g}$	$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{2g}$
71	9	approchée	approché
»	10	(8)	(4)
75	23	$\cos^2\varphi_{b'}$	$\cos^2\varphi_b$
87	20	portées	parties
92	4	$\mathrm{tg}\,\varepsilon'$	$\mathrm{tg}\,\varepsilon$
»	5	$\mathrm{tg}'\,\varepsilon$	$\mathrm{tg}\,\varepsilon'$
102	4	$lV^n v$	$lV^{n-1} v$
»	14	vitesse moyenne v_0	vitesse v_0
105	21	$G\left(\frac{X'}{C'}\right)$	$G\left(\frac{X}{C'}\right)$

Page	Ligne	*Au lieu de*	*Lire*
110	6	par f — 1	par $f_1 - 1$
113	27	$\frac{1}{v'}\left(\frac{dz}{dt} - W\cos\gamma\right)$	$\frac{1}{v'}\left(\frac{dx}{dt} - W\cos\gamma\right)$
116	6	$\frac{W\cos\gamma\cos\varphi}{V}$	$\frac{W\cos\gamma\sin\varphi}{V}$
143	14	prenant tous les milieux	prenant pour tous les milieux
144	33	Mayewski	Mayevski
152	1	521	152
202	21	$\frac{g}{V^2\cos^2\omega}$	$\frac{g}{U^2\cos^2\omega}$
»	23	$\frac{(a-b)x^2}{3X^2}$	$\frac{(ab-b)x^3}{3X^2}$
203	14	ont obtient	on obtient
218	11	ait fait	a fait
222	7	$\frac{1}{H\sqrt{\pi}}$	$\frac{\varepsilon}{H\sqrt{\pi}}$
232	27	$\frac{\lambda}{1{,}80\,m}$	$1{,}80\,m$
249	14	$\frac{e^{-\frac{y^2}{2k^2}}}{k\sqrt{2\pi}}$	$\frac{e^{-\frac{y^2}{2k^2}}}{k\sqrt{2\pi}}dy$
250	16	$y-b$	$y-\beta$
»	30	$\Sigma(x-\alpha(y)-\beta)$	$\Sigma(x-\alpha)(y-\beta)$
255	3	Chapitre I	Chapitre I. — Espèces de tir et principes du tir
261	27	$Y = x_0 \operatorname{tg}(\alpha_X - \alpha_x)$	$Y = x_0 \operatorname{tg}(\alpha_X - \alpha_{x_n})$
264	11	déviation	direction
276	6	l'une et l'autre	l'un et l'autre
319	14	$\frac{2n-2}{n-1}$	$\frac{2n-2}{n-2}$
349	22	bx^2	bx^3
351	11	bx^2	bx^3
354	24	$\left(\frac{a'q}{G}-b\right)x^2$	$\left(\frac{a'q}{G}-b\right)x^3$.
355	18	à laquelle	avec laquelle
360	10	$4bx^2$	$4bx^3$
370	15	une hémisphère	un hémisphère
374	22	$F^n(\delta)$	$F_n(\delta)$
375	13	$\frac{\sin\delta\cos\delta}{n+2}$	$\frac{\sin\delta\cos\delta}{n+4}$

BALISTIQUE EXTÉRIEURE

INTRODUCTION

La Balistique est la science du mouvement des projectiles. Appliquée aux projectiles de l'artillerie, elle se divise en balistique intérieure et en balistique extérieure, suivant que l'on considère le mouvement dans l'âme ou en dehors de l'âme de la bouche à feu.

Notre objectif est la balistique extérieure.

§ 1.

Définitions.

Ligne de tir. — La ligne de tir est le prolongement de l'axe de la pièce prête à faire feu.

Plan de tir. — Le plan de tir est le plan vertical passant par la ligne de tir.

Angle de tir. — L'angle de tir est l'angle fait par la ligne de tir et l'horizon.

Horizon de la pièce. — C'est le plan horizontal qui passe par le centre de la bouche de la pièce.

Trajectoire. — La trajectoire est la courbe parcourue par le centre de gravité du projectile. L'*origine* de la trajectoire est le centre de la bouche de la pièce au moment de la sortie du projectile.

Ligne de projection. — La ligne de projection est la tangente à l'origine de la trajectoire ; elle ne coïncide pas avec la ligne de tir, car, au moment où le projectile sort du canon, celui-ci, à cause

du recul, occupe une position différente de celle qu'il avait au moment de la mise de feu (¹).

Angle de projection : φ. — L'angle de projection est l'angle que fait la ligne de projection avec l'horizon, compté de bas en haut. Il est plus grand que l'angle de tir d'une certaine quantité, que l'on appelle l'*angle de relèvement*.

Il est en général nécessaire de tenir compte de l'angle de relèvement; mais on peut admettre que le plan vertical passant par la ligne de projection coïncide avec le plan de tir, et que le plan horizontal passant par l'origine de la trajectoire coïncide avec l'horizon de la pièce.

Point de chute. — Le point de chute est le point où la trajectoire rencontre l'horizon de la pièce; il ne faut pas le confondre avec le point où le projectile rencontre le sol.

Portée : X. — C'est la distance du point de chute à l'origine.

Hauteur de tir : Y. — La hauteur de tir représente l'ordonnée du point le plus haut de la trajectoire au-dessus de l'horizon de la pièce; ce point s'appelle le sommet; l'arc de trajectoire compris entre l'origine et le sommet est la branche ascendante; à partir de ce point c'est la branche descendante.

Inclinaison : θ. — L'inclinaison est l'angle que la direction de la vitesse en chaque point de la trajectoire fait avec l'horizon. L'inclinaison à l'origine coïncide avec l'angle de projection, elle diminue le long de la branche ascendante, devient nulle au sommet, et négative sur toute la branche descendante.

Angle de chute : ω. — L'angle de chute est la valeur numérique de l'inclinaison au point de chute.

Point d'arrivée. — Le point d'arrivée est le point frappé par le projectile, ou, plus généralement, le point par lequel on cherche à le faire passer, point qu'il ne faut pas confondre avec le point de chute.

Ligne de site. — La ligne qui joint le point d'arrivée à la bouche de la pièce.

Angle de site : ε. — Angle de la ligne de site avec l'horizon, compté de bas en haut.

(¹) Dans certains canons Krupp, le recul étant nul, la ligne de projection coïncide avec la ligne de tir. (*Note du traducteur.*)

Angle de départ et angle d'arrivée. — Les angles que la ligne de projection et la tangente au point d'arrivée font avec la ligne de site.

Dérivation. — Distance dont le projectile, par l'effet de la rotation, s'écarte du plan de tir.

Vitesse initiale : V. — Vitesse du projectile à l'origine de la trajectoire.

Durée du trajet : T. — Temps employé par le projectile pour arriver de l'origine au point de chute.

§ 2.

Forces qui agissent sur le projectile.

Le projectile sorti de la pièce est soumis à deux espèces de forces, la gravité et la résistance du milieu.

La gravité peut être considérée comme une force constante, non seulement comme intensité, mais aussi comme direction, et cela à cause des hauteurs de tir et des portées, toujours faibles par rapport au rayon terrestre.

La résistance du milieu est la résultante de toutes les forces que le projectile est obligé de vaincre dans son parcours. Ces forces s'exercent sur chaque point de sa surface et donnent lieu, en général, à une résultante et à un couple. Si le projectile est sphérique, ou si, de forme oblongue, il se meut dans la direction de son axe, en tournant autour de ce dernier, les actions exercées par le milieu se réduisent à une force unique, dirigée en sens inverse du mouvement de translation. Dans ce cas, la résistance est appelée *résistance directe.*

Dans cet ouvrage, nous nous attacherons principalement à établir des formules pratiques ; c'est pour cette raison que nous supposerons toujours la résistance *directe,* c'est-à-dire en sens inverse du mouvement, et pour un même projectile, ne dépendant que de la vitesse de translation. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement vraie, mais elle se rapproche d'autant plus de la vérité que l'angle formé par l'axe de rotation et par l'axe de figure est plus petit, et que l'angle de ce dernier axe avec la tangente à la trajectoire est plus faible. En réalité, l'existence de ces deux angles est de peu d'importance, car le premier et le second ont

toujours des valeurs très faibles dans la plupart des cas de la pratique. Nous ferons remarquer, toutefois, que la *dérivation* est due à la non-coïncidence de l'axe de figure avec la tangente, aussi y consacrerons-nous un chapitre spécial.

§ 3.

Résistance directe.

La résistance directe est d'autant plus considérable que la masse de fluide à traverser est plus grande, c'est-à-dire que la densité de l'air, la section du projectile, la vitesse sont plus grandes.

Ce qui influe sur le tir, est la *retardation*.

On l'obtient en divisant la résistance par la masse du projectile. Soit :

a le diamètre du projectile en mètres,

p le poids du projectile en kilogr.,

δ la densité de l'air (§ 4).

On admet que la retardation pour deux projectiles semblables, animés d'une même vitesse, est proportionnelle à $\frac{\delta a^2}{p}$ ou à $\frac{\delta}{C}$, en désignant par C la quantité $\frac{p}{1000\,a^2}$. Nous appellerons cette quantité le *coefficient balistique*.

Si deux projectiles ont la même vitesse, le même diamètre et le même poids, mais sont de forme différente, les retardations respectives ne sont pas égales, mais sont entre elles dans le rapport de deux nombres i et i', qui dépendent des formes des projectiles. On admet également que i et i' ne sont pas fonctions de la vitesse.

En représentant par $f(v)$ la retardation, on peut donc poser

$$f(v) = \frac{\delta i}{C} F(v),$$

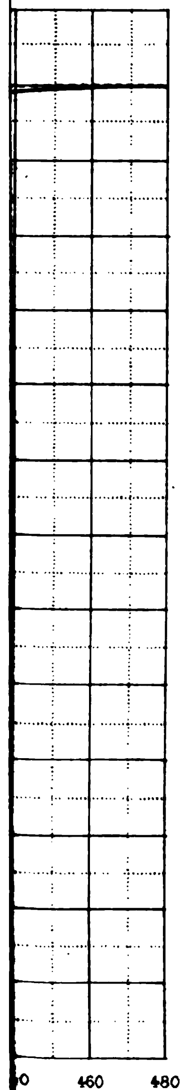
et dans cette formule, $F(v)$ désignera une fonction de la vitesse, indépendante de la forme, des dimensions et du poids du projectile, ainsi que de la densité de l'air ; par conséquent, une fois que l'on connaît la valeur de $F(v)$ pour un projectile (pour lequel on peut admettre $i = 1$), il suffit, pour un autre projectile, de déter-

$$F(\nu) = \frac{c\,f(\nu)}{\text{[illegible]}}$$

$$\frac{F(\nu)}{\nu^2} = \text{[illegible]} = K$$

$$F(\nu) = K\nu^2$$

Fig. 1.



miner la valeur de i. Nous appellerons i le *coefficient de forme*. On le détermine au moyen d'expériences spéciales, dont nous indiquerons la marche plus loin. A défaut de sa véritable valeur, on peut prendre $i = 1$. La fonction $F(v)$ est appelée *fonction résistante*.

Presque toutes les artilleries d'Europe ont exécuté de nombreuses expériences ayant pour objet la détermination de la fonction $F(v)$ ou plutôt de la retardation $f(v)$, mais en employant des projectiles différents. Il en est résulté une grande variété dans les résultats obtenus, variété due, non seulement à la diversité des projectiles, mais encore aux erreurs inévitables dans l'exécution des expériences. Néanmoins, en construisant pour chaque espèce de projectile une courbe ayant pour abscisses les vitesses v, et pour ordonnées les valeurs expérimentales de $K = \frac{Cf(v)}{\delta i v^2}$, et en prenant en même temps pour i une valeur propre à chaque projectile, valeur toujours assez voisine de l'unité, les courbes obtenues diffèrent peu entre elles, et l'on peut leur substituer une courbe moyenne, qui s'applique alors à toute espèce de projectile.

Pour tracer cette courbe moyenne (fig. 1), nous nous sommes basés sur l'ensemble de toutes les expériences qui ont été faites, et là où nous avons rencontré des anomalies, nous n'avons accepté que les valeurs qui paraissaient le mieux correspondre aux résultats de tir.

La loi numérique de la courbe est donnée dans la table IV, mais la loi analytique paraît encore bien complexe [1]. Si l'on veut exprimer $F(v)$ au moyen d'expressions monômes, il est nécessaire de diviser la courbe en plusieurs portions : en cinq au moins.

La première portion, de $v = 0$ à $v = 240^m$, peut être remplacée par une droite parallèle à l'axe des v, et l'on trouve

$$(a) \qquad K = 0,0^3108.$$

[1] Pour tracer une courbe de la forme représentée par la figure 1, on peut employer l'équation suivante :

$$(A) \qquad K = \frac{C}{\delta i}\frac{f(v)}{v^2} = \frac{F(v)}{v^2} = \alpha + \beta \operatorname{arc\,tg} \varphi(v),$$

Le lieutenant Berardinelli (décédé en 1886) a trouvé pour α et β les valeurs suivantes :

$$\alpha = 0,000223, \qquad \beta = 0,00000129,$$
$$\varphi(v) = 0,02708\,(w^4 - 111) + 1,0153\left(\frac{w^2 - 10,56}{w}\right)^5, \quad w = \frac{v}{100}.$$

La table IV est le développement de cette formule.

La seconde, de $v = 240$ à $v = 282^m$, est une droite inclinée sur l'axe des v, et l'on peut représenter son équation par la formule :

$$(b) \qquad K = 0{,}0^6 449\, v.$$

La troisième, de $v = 282^m$ à $v = 343^m$, est caractérisée par une courbe rapidement ascendante :

$$(c) \qquad K = 0{,}0^{13} 2\, v^4.$$

La quatrième, de 343 m à 420 m, peut être assimilée à une ligne droite oblique représentée par la formule

$$(d) \qquad K = 0{,}0^6 808\, v.$$

Enfin la cinquième portion, à partir de 420 m et au delà, est représentée par une droite horizontale

$$(e) \qquad K = 0{,}0^3 33933.$$

Dans l'ensemble de la courbe, les parties les plus remarquables sont la première et la dernière, elles indiquent que pour les petites vitesses aussi bien que les grandes, la résistance est quadratique. Toutefois la résistance quadratique ne peut être appliquée que dans le tir à petite vitesse, c'est-à-dire dans le tir en bombe et quelquefois dans le tir plongeant; dans le tir de plein fouet, la résistance n'est quadratique que dans une portion très courte de la trajectoire, car la vitesse tombe très rapidement au-dessous de 420 m.

En adoptant les diverses expressions de K mentionnées plus haut, les coefficients de forme de nos projectiles tirés dans les bouches à feu se chargeant par la culasse, sont en-dessus ou en-dessous de l'unité, mais en diffèrent peu.

Nous en donnons les valeurs dans le tableau suivant. Nous ferons cependant remarquer qu'ils n'ont pas été déterminés par des expériences directes : ils ont été établis de façon à faire concorder les tables de tir expérimentales avec celles qui ont été basées sur une retardation représentée par la formule

$$f(v) = \frac{\delta i}{C} F(v) = \frac{\delta i}{C} (Kv^2)$$

K étant donné par les formules (a) ..... (e).

Pour certaines applications, il est utile d'avoir une formule continue, algébrique et entière, qui reproduise la résistance au moins jusqu'à une certaine limite de la vitesse. La formule

$$(f) \qquad 10^6 K = 108 + 6\left(\frac{v}{100}\right) - 5,2\left(\frac{v}{100}\right)^3 + 0,75\left(\frac{v}{100}\right)^5$$

donne la valeur de la résistance jusqu'à $v = 343$ m, et la formule

$$(g) \qquad 10^6 K = 110 - 2,5\left(\frac{v}{100}\right)^4 + 0,572\left(\frac{v}{100}\right)^6 - 0,0228\left(\frac{v}{100}\right)^8$$

l'exprime jusqu'à $v = 400$ m.

Coefficients balistiques.

PROJECTILES.	a (1).	p.	$\frac{p}{1000a^2}$ (2).	i.
Boulet de 45.	0,446	1000	5,027	0,88
— 32.	0,318	347	3,431	1,00
— 24.	0,236	150,8	2,708	0,96
— 16.	0,1606	46	1,783	. . .
— 15.	0,1471	38,7	1,788	. . .
Obus ordinaire de 32	0,318	273,2	2,702	1,16
— 28	0,278	216,7	2,804	. . .
— 24	0,236	125,80	2,259	0,97
Obus de mine de 24	0,238	119,74	2,114	. . .
— 22	0,2168	75	1,596	. . .
Obus ordinaire de 22	0,2168	70	1,489	. . .
— 21	0,208	79,05	1,827	. . .
— 16	0,1606	29,88	1,158	. . .
— 15	0,1471	30,4	1,405	1,00
— 12 (culasse) . .	0,1180	16,48	1,184	1,04
— 12 (bouche) . .	0,1181	11,20	0,803	. . .
— 9 (culasse) . .	0,0865	6,76	0,903	0,98
— 9 (bouche) . .	0.093	4,60	0,532	. . .
— 7 — . .	0,0746	4,28	0,769	1,00
Balle du fusil d'infanterie (1870) .	0,0105	0,02	0,180	. . .

(1) a désigne le diamètre de la partie cylindrique en mètres et p le poids en kilogr. du projectile chargé et prêt à tirer.

(2) Pour un projectile de 10 cm de diamètre et pesant 10 kg, le coefficient balistique est égal à l'unité.

Projectiles sphériques. — Dans le cas de projectiles sphériques, en supposant $i = 1$, on peut prendre pour les petites vitesses ne dépassant pas 376 m la formule

$$(g) \qquad K = 0{,}0^4 924 \left[1 + \left(\frac{v}{186}\right)^2\right]$$

et pour les vitesses supérieures la formule :

$$(h) \qquad K = 0{,}0^3 47.$$

Ces formules sont dues à Mayevski (expériences russes, 1868-1869) [1].

Les premières études sur la résistance de l'air ont été faites par Newton; il donna pour les projectiles sphériques, en se basant sur des recherches théoriques, une loi qui revient à cette formule de la retardation :

$$f(v) = \frac{1{,}206\,\delta\pi a^2}{16\,p}\,v^2, \text{ ou bien } K = \frac{1{,}206\,\pi}{16\,000} = 0{,}0002368.$$

Borda, Thibault, Hutton, Piobert, Morin, Didion et d'autres balisticiens, ont fait aussi des expériences sur la résistance de l'air en employant des volants, c'est-à-dire des appareils de rotation munis de surfaces destinées à essayer cette résistance, et les résultats que ces différents expérimentateurs ont donnés ne diffèrent pas sensiblement de ceux obtenus par Newton.

Robins est le premier qui ait étudié les projectiles lancés par des pièces d'artillerie; il se servait à cet effet du pendule balistique imaginé par lui, et qui consistait en un poids suspendu à un axe horizontal autour duquel il oscillait, lorsqu'un choc quelconque le mettait en mouvement. L'amplitude de l'oscillation lui permettait de déterminer la vitesse de choc. En plaçant l'arme à des distances différentes du pendule, et en effectuant deux tirs, autant que possible dans les mêmes conditions, afin de pouvoir considérer comme appartenant à la même trajectoire les deux vitesses obtenues

---

(1) En Angleterre Bashforth, en se basant sur ses propres expériences, a été conduit à des résultats peu différents (1864-1870). Hélie propose, d'après les expériences anglaises et russes, la formule :

$$(i) \qquad K = 0{,}0^3 470 - \frac{0{,}0^3 344}{10^{\alpha v^4}}, \quad (\alpha = 0{,}0^{10} 408).$$

dans ces deux tirs, il déduisait la résistance, de la différence des deux forces vives. Les expériences de Robins datent de 1742. Hutton (1787-1791), Piobert, Morin, Didion (commission de Metz, 1839-1840) l'ont suivi dans cette voie, en employant des pendules balistiques de plus en plus perfectionnés. Les expériences de Robins ont permis à Euler d'établir la formule :

$$K = \frac{1,206\,\pi}{16\,000}\left(1 + \frac{v^2}{2gh}\right)$$

h étant la hauteur d'une colonne d'air de densité δ faisant équilibre à la hauteur barométrique. Les expériences de Huttou ont conduit Touzard et Piobert à adopter les formules :

$$K = \frac{1,206\,\pi}{16\,000}\left[1 + \left(\frac{v}{525}\right)^2\right] \quad , \quad K = \frac{0,030586\,\pi g}{4\,000}(1 + 0,0023\,v).$$

Enfin, d'après les expériences de Metz, Didion a été conduit à la formule

$$K = \frac{0,027\,\pi g}{4000}(1 + 0,0023\,v).$$

Le pendule balistique, suffisamment exact pour mesurer la vitesse d'un projectile, n'est pas un instrument assez précis pour donner la résistance de l'air. En effet, cet appareil donne bien la vitesse, en un point de la trajectoire, mais en arrêtant le projectile; pour obtenir la vitesse en un autre point, il est donc nécessaire de tirer un second coup, et celui-ci, bien que tiré dans des conditions aussi égales que possible, ne peut guère être considéré comme identique au premier, surtout au point de vue de la vitesse initiale, qui peut varier beaucoup d'un coup à l'autre. Cet inconvénient a une influence d'autant plus grande sur l'évaluation de la résistance, que la distance choisie entre les deux points auxquels se rapportent les deux vitesses accusées par le pendule est plus petite. D'autre part, les dimensions du pendule, les déviations propres aux projectiles sphériques, permettaient difficilement de placer la bouche à feu à plus d'une centaine de mètres de celui-ci. A cette distance même, il n'était guère possible d'accepter les indications du pendule sans les corrections, toujours incertaines, qui dépendent de l'excentricité et de l'obliquité du choc. Il est donc facile de comprendre, d'après ce qui précède, combien l'exécution de semblables expériences devait présenter d'anomalies, et qu'il pouvait arriver souvent que la vitesse obtenue au second point fût supérieure à celle obtenue au premier.

Les expériences exécutées avec les appareils électro-balistiques ne donnent pas lieu aux mêmes inconvénients. Dans ces appareils, la vitesse est mesurée par le temps employé par le projectile pour parcourir l'intervalle

compris entre deux cadres garnis de fils, et l'on peut admettre que la vitesse obtenue est celle qui existe au milieu de l'intervalle qui les sépare. Au moyen de deux couples de cadres, on peut donc avoir deux vitesses appartenant à une même trajectoire. En outre, il est toujours facile de placer le second point où l'on mesure la seconde vitesse à une distance assez grande. Dans les nombreuses expériences exécutées à l'usine Krupp, par exemple, la distance entre les deux points où l'on mesurait la vitesse atteignait quelquefois 4 500 m. Dans ces conditions, les seules anomalies qui pouvaient avoir lieu ne pouvaient provenir que des appareils employés (coefficient d'appareil). L'influence de ce coefficient se réduit à peu de chose, lorsque la distance comprise entre les deux points choisis pour mesurer la vitesse est suffisante pour que la vitesse perdue entre eux soit assez considérable relativement aux erreurs que peuvent donner les appareils.

Les premières expériences sur la résistance de l'air au moyen d'appareils électro-balistiques (chronoscope de Navez) ont été faites en France par la commission de Metz (1856-1857) en employant des projectiles sphériques, et par la commission de Gâvre (1859-1861) avec des projectiles oblongs.

La commission de Metz, en opérant sur des projectiles sphériques dont les vitesses variaient de 205 m à 555 m donne avec Welter pour valeur de K

$$K = 0,0000011\, v.$$

La commission de Gâvre, en opérant sur des projectiles oblongs de diverses formes et pour des vitesses variant de 215 à 337 m, a obtenu des résultats conformes à ceux de la commission de Metz; les coefficients numériques seuls varient dans des limites comprises entre 0,000000462 et 0,000000427 pour les projectiles ogivo-cylindriques. Le coefficient s'est élevé jusqu'à 0,000000529 pour les projectiles cylindriques terminés à l'avant par un ellipsoïde, et à 0,00000117 pour les projectiles cylindriques [1].

Des expériences successives et plus complètes ont été entreprises depuis avec des appareils plus perfectionnés, en Angleterre par Bashforth, en Russie par Mayevski, en France par Hélie, en Hollande par Hojel, et en Allemagne par Krupp; l'appareil employé partout a été le chronographe Le Boulengé, excepté en Angleterre, où l'on a fait usage du chronographe Bashforth.

Nous donnons ici l'ensemble des formules déduites de ces expériences [2].

---

[1] Hélie, *Traité de Balistique*, Paris, 1865.

[2] Les formules (1) sont dues à Mayevski. La formule (2) est due à Hélie, les formules (3) sont encore de Mayevski, les formules (4) d'Hojel, et les formules (5) du capitaine Ingalls, de l'artillerie américaine (United States). *Exterior Ballistics*, New-York, 1886.

Expériences russes et anglaises (1868-1869).

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} K = 0{,}0^{3}33933 & v > 360 \\ K = 0{,}0^{13}20\,v^{4} & 360 > v > 280 \\ K = 0{,}0^{4}93\left[1+\left(\frac{v}{488}\right)^{2}\right] & v < 280 \end{array}\right.$$

Expériences françaises (1873).

$$(2)\quad K = 0{,}0^{3}326 - \frac{0{,}0^{3}217}{10^{0{,}0000023\left(\frac{v}{100}\right)^{10}}}.$$

Expériences Krupp (1875-1881).

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} K = 0{,}0^{3}3036 & v > 419 \\ K = 0{,}0^{6}724\,v & 419 > v > 375 \\ K = 0{,}0^{11}516\,v^{3} & 375 > v > 295 \\ K = 0{,}0^{6}449\,v & 295 > v > 240 \\ K = 0{,}0^{3}1079 & v < 240 \end{array}\right.$$

Expériences hollandaises (1884).

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} K = 0{,}0^{3}5467\,v^{-0{,}09} & 700 > v > 500 \\ K = 0{,}0^{4}7483\,v^{-0{,}23} & 500 > v > 400 \\ K = 0{,}0^{8}51381\,v^{1{,}83} & 400 > v > 350 \\ K = 0{,}0^{11}5423\,v^{3} & 350 > v > 300 \\ K = 0{,}0^{6}84535\,v^{0{,}5} & 300 > v > 140 \end{array}\right.$$

Expériences de Bashforth (1878-1880).

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} K = 0{,}0^{3}3244 & v > 398{,}2 \\ K = 0{,}0^{6}8146\,v & 398{,}2 > v > 342{,}0 \\ K = 0{,}0^{12}2037\,v^{4} & 342{,}0 > v > 302{,}2 \\ K = 0{,}0^{6}5623\,v & 302{,}2 > v > 239{,}3 \\ K = 0{,}0^{3}1346 & v < 239{,}3 \end{array}\right.$$

Nous donnons dans le tableau suivant les valeurs de $10^{6}K$ déduites des formules précédentes.

TABLEAU.

Valeurs de 10^4K.

VITESSES.	PROJECTILES OBLONGS.					SPHÉRIQUES.
	Formules (1).	Formule (2).	Formules (3).	Formules (4).	Formules (5).	Formule (6).
700	339	326	304	303	324	470
650	339	326	304	305	324	470
600	339	326	304	307	324	470
550	339	326	304	309	324	470
500	339	326	304	312	324	470
450	339	326	304	305	324	463
420	339	326	304	300	324	453
410	339	326	297	298	324	449
400	339	326	290	297	324	442
390	339	325	282	283	318	434
380	339	323	275	270	310	426
370	339	317	261	257	301	416
360	339	304	239	245	293	406
350	300	283	221	232	285	394
340	270	257	203	213	272	381
330	238	229	185	195	242	368
320	210	201	168	178	214	353
310	185	177	154	162	188	339
300	162	158	139	146	169	324
290	142	143	130	144	163	309
280	123	131	126	141	157	294
270	121	124	121	139	152	279
260	119	118	117	136	146	265
250	117	114	112	133	140	253
240	115	112	108	131	135	241
220	111	110	108	125	135	218
200	108	109	108	119	135	200
180	105	109	108	113	135	186
160	103	109	108	107	135	176
140	101	109	108	100	135	168

En comparant les nombres inscrits dans les deux premières colonnes, nous trouvons des différences sensibles, mais cependant explicables à cause des inexactitudes d'expérience inévitables, et par la différence des formules qui servent à déterminer K(v). La première colonne donne pour les grandes

C. M. Sargento 1º
n° 1 Gustavo Barán



vitesses une valeur de K ($K = 0{,}0^3339$), supérieure il e[illegible] la seconde ($K = 0{,}0^3326$), mais il faut remarquer qu'Hélie [illegible] mètre du projectile le diamètre d'un cercle dont la surface est [illegible] celle de l'âme augmentée de la section des rayures, tandis que Mayevski et les autres expérimentateurs prennent pour diamètre du projectile celui de sa partie cylindrique. Les projectiles expérimentés par la marine française avaient pour diamètre de la partie cylindrique 0,2374, le diamètre du cercle équivalent à la section de l'âme de la pièce était de 0,242. Il faudrait donc pour comparer les valeurs de K données par la formule (2) à celles données par les formules (1), multiplier les premières par le rapport des carrés des deux diamètres, c'est-à-dire par 1,039, ce qui donne pour les hautes vitesses 338,7.

Cette concordance établie, les autres différences peuvent s'expliquer par les erreurs d'expériences et surtout par le choix des formules. Nous remarquerons en outre que la vitesse minimum expérimentée par Hélie a été de 210 m.

Si nous comparons maintenant la troisième et la quatrième colonne, nous pourrons faire les mêmes observations que précédemment et attribuer les mêmes différences aux mêmes causes.

En examinant les nombres des deux premières colonnes, et ceux des deux suivantes, nous trouvons que ces derniers sont notablement inférieurs à ceux-là, jusqu'aux environs de 300 m. Au-dessous de cette limite, les formules (3) donnent des valeurs égales à celles des formules (1) et les formules (4) des valeurs plus fortes. Enfin les nombres de la cinquième colonne sont assez comparables à ceux des deux premières jusqu'aux vitesses de 300 m, mais pour les vitesses inférieures, ils sont supérieurs à ceux de toutes les autres colonnes.

Nous ne pouvons attribuer ces différences qu'à des erreurs d'expériences qui, on le sait, sont plus sensibles aux petites vitesses qu'aux grandes. C'est pour ce motif qu'il convient, lorsqu'on veut comparer deux projectiles relativement à la résistance de l'air, de les tirer plutôt aux grandes vitesses qu'aux petites.

Tout considéré, il nous paraît possible de conclure que les projectiles qui ont servi à l'établissement des formules (3) et (4) présentent une résistance moindre que ceux qui ont servi de base aux formules (1) (2) et (5). Ces derniers avaient des longueurs variant de 1,9 à 2,5 calibres, tandis que les premiers avaient 2,5 à 4 calibres; par suite, on peut en déduire que la grande hauteur du projectile diminue la résistance. Il existe également d'autres causes qui peuvent augmenter ou diminuer cette résistance, telles que la forme de la tête, la plus ou moins grande saillie de la ceinture-guide ou de la chemise de plomb.

L'hypothèse que deux projectiles de forme différente, animés d'une même vitesse initiale, sont soumis à des résistances dans un rapport constant,

quelle que soit cette vitesse, sans être improbable, n'est cependant pas certaine, tout au moins pour les petites vitesses. Il serait nécessaire, pour arriver à la certitude, de tirer un grand nombre de coups bien exacts, dans les mêmes conditions, et seulement avec deux espèces de projectiles assez différents.

L'emploi de projectiles de toutes sortes, dont se sont servis les expérimentateurs (projectiles différant à la fois par le diamètre et la forme), oblige forcément à considérer la quantité F (v) ou K comme indépendante de la forme, et à fondre tous les résultats, en attribuant les différences à des erreurs d'expérience. C'est ce que nous avons fait.

§ 4.

Densité de l'air.

Le poids d'un mètre cube d'air dépend de trois éléments : de la hauteur barométrique, de la température et de l'état hygrométrique.

Soit H la hauteur barométrique en millimètres,

t la température en degrés centigrades,

F la tension en millimètres de la vapeur saturée à t degrés (1),

s l'état hygrométrique.

Le poids d'un mètre cube est donné par la formule

$$\Delta = 0.4645 \frac{H}{273+t} - 0,1742 \frac{sF}{273+t}.$$

Si on fait dans cette expression $H = 750$, $t = 15$, $s = 0,5$, $F = 12,7$ qui est la tension de la vapeur d'eau à 15°, on a $\Delta = 1,206$ (2). Nous appellerons *densité* de l'air, le rapport du poids d'un mètre cube d'air au nombre 1,206; on a ainsi l'expression

$$\delta = 0,3852 \frac{H}{273+t} - 0,1444 \frac{sF}{273+t}.$$

La table I donne les valeurs de δ, pour un état hygrométrique moyen, soit pour $s = 0,5$.

(1) Dans les traités de physique, on trouve des tables qui donnent les valeurs de F correspondant aux valeurs de t.

(2) C'est ce qu'on appelle le poids moyen d'un mètre cube d'air.

L'état hygrométrique se détermine au moyen du psychromètre d'August : deux thermomètres, dont l'un est maintenu constamment humide au moyen d'un linge mouillé enveloppant le réservoir, indiquent par la différence de leur température le degré hygrométrique en employant une formule particulière qui donne sF. La table II indique la correction à effectuer sur δ par l'observation seule des deux thermomètres.

La densité de l'air diminue avec l'altitude. La densité δ_h correspondant à une station élevée de h en mètres, au-dessus de celle où elle est δ, se calcule par la formule

$$\delta_h = \delta\,(1 - 0{,}00008\,h).$$

La table III donne les valeurs du rapport $\frac{\delta_h}{\delta}$.

SECTION I

CHAPITRE Ier

MOUVEMENT DANS LE VIDE

Dans l'étude de la balistique, il n'est pas sans intérêt de connaître les lois qui présideraient au mouvement d'un projectile dans le cas où la résistance du milieu serait nulle. Ces lois, d'une extrême simplicité et faciles à retenir, indiquent non seulement les limites dont s'approchent ou s'éloignent certaines quantités, suivant que la résistance est moins ou plus considérable, mais encore fournissent des indications utiles qui peuvent dans certains cas servir de première approximation.

Dans le vide, la force unique agissant sur le projectile est son propre poids, appliqué constamment à son centre de gravité. Dans ces conditions, la trajectoire reste toujours dans le plan de tir; en effet le premier élément de la trajectoire étant contenu dans ce plan, il en est de même du second et de tous les autres.

Nous rapporterons le centre de gravité du projectile à deux axes coïncidant respectivement avec la composante horizontale et la composante verticale de la vitesse initiale; le premier, l'axe des x, est dirigé dans le sens du mouvement, le second, l'axe des y, de bas en haut.

Soit donc p le poids du projectile, g la pesanteur, t le temps compté à partir de l'origine de la trajectoire; nous avons :

$$\frac{p}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad , \quad \frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=-p,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g\,\text{[1]}.$$

Il résulte de ces deux équations : 1° que le mouvement du centre de gravité est indépendant, non seulement de la forme du projectile, mais aussi de son poids ; 2° que le mouvement horizontal est uniforme, et le mouvement vertical uniformément varié.

En intégrant une première fois, on a :

$$\frac{dx}{dt}=\text{constante} \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-gt+\text{constante}.$$

Les constantes des deux équations se déterminent en observant qu'à l'origine $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ représentent les composantes, horizontale et verticale, de la vitesse initiale. Si donc V est cette vitesse, et φ l'angle de projection, les deux constantes sont $V\cos\varphi$ et $V\sin\varphi$; on a donc :

$$\frac{dx}{dt}=V\cos\varphi \qquad \frac{dy}{dt}=-gt+V\sin\varphi.$$

Intégrant une seconde fois, on a :

$$x=Vt\cos\varphi. \qquad y=-\frac{1}{2}gt^2+Vt\sin\varphi.$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce que le temps étant compté depuis l'origine, pour $t=0$ on a $x=y=0$.

Équation de la trajectoire. — En éliminant t entre les deux équations précédentes, on trouve

(1) $$y=x\,\mathrm{tg}\,\varphi-\frac{gx^2}{2V^2\cos^2\varphi};$$

équation d'une parabole.

---

[1] Si h est l'altitude en mètres et λ la latitude, on a

$$g=9{,}8057\,(1-0{,}00259\cos 2\lambda)\,(1-0{,}0^6 1964h).$$

A Rome $g=9{,}803$, à Turin $g=9{,}805$, à Paris $g=9{,}809$.

Le second terme du second membre (fig. 2) représente l'abaisse-

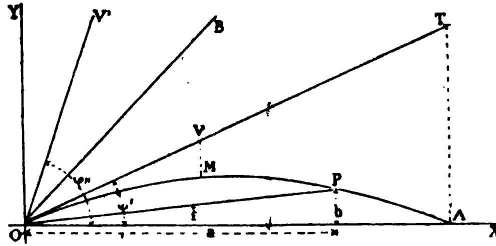


Fig. 2.

ment VM au-dessous de la ligne de projection OV : en effet l'équation de celle-ci est

$$y = x \operatorname{tg}\varphi.$$

Si l'on compte la distance sur la ligne de projection, et on la désigne par x', elle est liée à la quantité x par la relation $x = x' \cos\varphi$, on a donc

$$(2) \qquad \text{Abaissement} = \frac{gx'^2}{2V^2}.$$

Cette équation montre que pour deux trajectoires obtenues avec une même vitesse initiale sous des angles de projection différents les abaissements sont égaux, lorsque les distances x' comptées sur la ligne de projection sont égales; elle fait voir en outre que l'axe de la parabole est vertical, et que par conséquent le sommet de cette courbe est le même que celui de la trajectoire. Celle-ci possède donc une branche descendante symétrique de la branche ascendante, et l'angle de chute est égal à l'angle de projection.

Portée. — Si dans l'équation (1) on fait $y = 0$, on obtient pour x deux valeurs, la première est $x = 0$, la seconde est la portée OA, que nous désignons par X ; sa valeur est

$$(3) \qquad X = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{g}.$$

Cette dernière équation montre que pour des angles de projection égaux, la portée est proportionnelle au carré de la vitesse, et

que pour des vitesses égales, elle est proportionnelle au sinus du double de l'angle de projection.

Si dans l'équation (3) on remplace φ par $\varphi' = 90° - \varphi$, la portée ne change pas : par conséquent *pour une même vitesse, il existe deux angles qui donnent la même portée, ils sont complémentaires, ou différents de 45° d'un même nombre de degrés.* Leur moyenne en effet est

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 45°.$$

L'équation (3) permet en outre de conclure que *l'angle de projection qui donne une portée maximum est de 45°, quelle que soit la vitesse.*

En éliminant V^2 entre les équations (1) et (3), on obtient

$$y = x(X - x)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{X}. \tag{4}$$

Inclinaison. — En différentiant l'équation (1) ou l'équation (4), en divisant par dx, et en posant $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$, on a

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}; \tag{5}$$

ou bien

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{X - 2x}{X}\right),$$

équation qui donne l'inclinaison à la distance x. Cette inclinaison est positive sur la branche ascendante, et négative sur la branche descendante.

Hauteur du tir. — L'abscisse du sommet s'obtient en faisant $\theta = 0$, elle est égale à la moitié de la portée. Par conséquent la hauteur du tir s'obtient au moyen de l'équation (4) :

$$Y = \frac{1}{4}X\operatorname{tg}\varphi, \tag{6}$$

mais X tg φ est le côté vertical AT du triangle rectangle ayant pour côté horizontal la portée OA, et pour hypoténuse la ligne de projection OT, par suite, *la hauteur du tir est égale au quart de l'abaissement correspondant à la portée.*

(3) $X = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{g} = \frac{2V^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g}$ substituyendo en (6) queda (7)

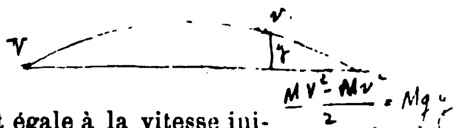
En remplaçant X par sa valeur, on a

(7) $$Y = \frac{V^2 \sin^2\varphi}{2g}.$$

La hauteur du tir est égale à la hauteur due à la composante verticale de la vitesse initiale.

Vitesse. — La vitesse, que nous désignerons par v, peut s'obtenir immédiatement au moyen du principe des forces vives. On a d'après ce dernier :

$$v^2 = V^2 - 2gy$$



d'où l'on déduit : 1° La vitesse de chute est égale à la vitesse initiale; 2° A des ordonnées égales correspondent des vitesses égales; 3° La vitesse est minimum au sommet; comme elle est horizontale, elle est égale à V cos φ.

Durée du trajet. — En se rappelant que la vitesse horizontale est constante et égale à V cos φ, on a pour valeur du temps

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi}$$

$\frac{dx}{dt} = V\cos\varphi$. $dt = \frac{dx}{V\cos\varphi}$; $t = \frac{x}{V\cos\varphi}$.

et pour la durée du trajet,

$$T = \frac{X}{V.\cos\varphi}.$$

En éliminant V entre cette équation et celle de la portée, on obtient :

(8) $$T = \sqrt{\frac{2X \operatorname{tg}\varphi}{g}}$$

Par conséquent : *La durée du trajet est égale au temps que le projectile mettrait à parcourir l'abaissement* X tg φ*, s'il tombait librement.*

Étant donné un point à atteindre, déterminer la vitesse initiale ou l'angle de projection (fig. 2).

Soient a et b l'abscisse et l'ordonnée du point à atteindre; il suffit pour résoudre le problème d'employer l'équation

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi - \frac{ga}{2V^2\cos^2\varphi};$$

et comme $\frac{b}{a}$ représente la tangente de l'angle de site ε, on a

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{ga}{2V^2\cos^2\varphi}.$$

Si l'on connaît l'angle de projection, la vitesse initiale est donnée par la formule

$$V = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{ag}{2(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon)}}.$$

Si, au contraire, on donne V, l'angle de projection sera déterminé par

$$(9) \qquad \sin(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi = \frac{ga}{2V^2}\cos\varepsilon$$

qui se réduit à [1]

$$(10) \qquad \sin(2\varphi - \varepsilon) = \sin\varepsilon + \frac{ga}{V^2}\cos\varepsilon.$$

de (1) $\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\right)\cos^2\varphi = \frac{ga}{2V^2}$

$\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\sin\varepsilon\cos^2\varphi}{\cos\varepsilon} = \frac{ga}{2V^2}$

$\sin\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos^2\varphi = \frac{ga}{2V^2}\cos\varepsilon$

$(\sin\varphi\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varphi)\cos\varphi = \frac{ga}{2V^2}\cos\varepsilon$

Cette équation donne la valeur de $2\varphi - \varepsilon$, et par suite de φ.

Il existe deux angles qui satisfont à l'équation précédente. En effet, si en posant,

$$2\varphi - \varepsilon = \alpha$$

l'équation est satisfaite, elle l'est également en posant

$$2\varphi - \varepsilon = 180^\circ - \alpha.$$

en appelant donc φ' et φ'' les deux valeurs de φ, nous avons, en éliminant α,

$$\varphi' + \varphi'' = 90^\circ + \varepsilon.$$

Afin d'interpréter géométriquement ce résultat, écrivons l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{\varphi' + \varphi''}{2} = \frac{90^\circ + \varepsilon}{2}:$$

---

(1)
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$
$$\alpha = \varphi - \varepsilon, \quad \beta = \varphi.$$

Le premier membre représente la moyenne arithmétique des deux angles φ' φ'', ou l'inclinaison de la bissectrice OB de l'angle fait par les deux lignes de projection OV et OV'. Le second membre représente également la moyenne arithmétique des deux angles 90° et ε, c'est-à-dire l'inclinaison de la bissectrice de l'angle YOP fait par la verticale avec la droite qui joint l'origine au point frappé. Les deux bissectrices coïncident donc. On peut alors énoncer le théorème suivant : *Les deux lignes de projection sous lesquelles, avec une vitesse donnée, on peut atteindre un point, sont également distantes de la bissectrice de l'angle fait par la verticale avec la droite qui joint l'origine au point à atteindre.*

Portée sur un plan incliné. — La portée sur un plan incliné de ε sur l'horizon s'obtient facilement en combinant l'équation de la trajectoire avec l'équation

$$y = x \operatorname{tg} \varepsilon.$$

En éliminant y, et posant $\dfrac{x}{\cos \varepsilon} = X'$, la portée sur le plan incliné est :

$$X' = \frac{V^2}{g} \frac{\sin(2\varphi - \varepsilon) - \sin \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon}.$$

La valeur maximum de X' correspond à

$$\sin(2\varphi - \varepsilon) = 1, \qquad \varphi = \frac{90° + \varepsilon}{2}.$$

Par suite la portée maximum a lieu lorsque la ligne de projection est bissectrice de l'angle fait par la verticale avec le plan incliné. Elle est dans ce cas :

$$X' = \frac{V^2}{g \cos^2 \varepsilon}(1 - \sin \varepsilon) = \frac{V^2}{g \cos \varepsilon} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Portée sur un plan horizontal placé au-dessous de l'origine. — En appelant h la hauteur de l'origine au-dessus du plan, la portée X' sur celui-ci s'obtient en faisant dans l'équation de la trajectoire $y = -h$, $x = X'$.

On obtient alors :

$$X' = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{2g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{V^2 \sin^2 \varphi}}\right].$$

La portée maximum correspond à l'angle de projection donné par l'équation

$$\cot g\varphi = \sqrt{1 + \frac{2gh}{V^2}} = \sqrt{1 + \frac{2h}{X}},$$

et cette portée a pour valeur

$$X' = \frac{V^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{V^2}} = X\sqrt{1 + \frac{2h}{X}},$$

X représentant la portée maximum sur l'horizon de la pièce.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA TRAJECTOIRE DANS L'AIR

§ 1.

Nous étudierons d'abord les propriétés générales de la trajectoire dans l'air, en considérant la résistance comme étant une fonction quelconque de la vitesse, sans faire aucune hypothèse sur la nature de cette fonction, mais en remarquant toutefois que cette dernière est nulle quand la vitesse est nulle, et croît avec elle jusqu'à l'infini.

En divisant la résistance par la masse, on a la retardation que nous désignons par $f(v)$, v étant la vitesse. On a donc $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$.

De l'hypothèse que la résistance de l'air est dirigée en sens inverse de la vitesse, on conclut que la trajectoire est plane. En effet, si l'on fait passer un plan vertical par un élément quelconque de la trajectoire, ce plan renferme les deux forces qui agissent sur le projectile, c'est-à-dire le poids et la résistance. La résultante est donc contenue dans le même plan, qui contiendra par conséquent l'élément qui suit. Tous les éléments de la trajectoire se trouvent donc dans un plan.

Équations différentielles. — Rapportons le centre de gravité du projectile à deux axes x et y, placés dans le plan de tir, le premier horizontal dirigé dans le sens du mouvement, le second vertical en sens contraire de la gravité.

Soit p le poids du projectile, g la pesanteur, θ l'angle de la vitesse v avec l'axe des x, t le temps, nous avons :

$$\frac{p}{g}\frac{d(v\cos\theta)}{dt} = -\frac{p}{g}f(v)\cos\theta$$

$$\frac{p}{g}\frac{d(v\sin\theta)}{dt} = -\frac{p}{g}f(v)\sin\theta - p$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d(v\cos\theta)}{dt} = -f(v)\cos\theta.$$

$$(2) \qquad \frac{d(v\sin\theta)}{dt} = -f(v)\sin\theta - g.$$

Multiplions la première par $v\sin\theta$, la seconde par $v\cos\theta$, et retranchons membre à membre, il vient :

$$\frac{v\cos\theta\, d(v\sin\theta) - v\sin\theta\, d(v\cos\theta)}{dt} = -gv\cos\theta.$$

Multiplions également les deux membres de cette égalité par $\frac{dt}{v^2\cos^2\theta}$, nous obtenons :

$$d\frac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = -\frac{g}{v}\frac{dt}{\cos\theta}$$

ou

$$(3) \qquad g\,dt = -v\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Mettant la valeur de dt tirée de cette équation dans l'équation (1) et dans les trois suivantes

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\theta, \qquad \frac{ds}{dt} = v,$$

on a :

$$(4) \qquad g\,d(v\cos\theta) = vf(v)\,d\theta$$

$$(5) \qquad g\,dx = -v^2 d\theta, \qquad g\,dy = -v^2 d\theta \operatorname{tg}\theta, \qquad g\,ds = -v^2\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Si l'intégration de l'équation (4) était possible, on pourrait établir une relation finie entre v et θ; on chasserait alors l'une de ces variables de (3) et (5), et l'on obtiendrait t, x, y et s par de simples quadratures.

C'est dans quelques cas particuliers seulement que l'on peut intégrer l'équation (4) [1]; nous étudierons donc les propriétés de la trajectoire d'après les équations différentielles [2].

[1] Voyez chapitre III.

[2] La recherche des propriétés de la trajectoire basée sur l'étude des équations différentielles, est due au comte de Saint-Robert (*Del moto de' proietti ne' mezzi resistenti*, 1855; *Memorie della R. Academia delle scienze di Torino, serie II, Tomo XVI*). Nous avons suivi un ordre un peu différent et nous avons simplifié quelques démonstrations.

§ 2.

La trajectoire est concave vers l'horizon. — La vitesse horizontale est décroissante. — La première propriété est évidente, si on considère que des deux forces agissant sur le projectile, l'une ne fait que le retarder sur la tangente, et l'autre ne tend qu'à l'abaisser.

La vitesse horizontale est décroissante, car d'après (4) on a

$$\frac{g\,d(v\cos\theta)}{d\theta} = vf(v),$$

le second membre de cette égalité étant positif, la dérivée de $v\cos\theta$ croît et décroît avec θ : or θ diminue constamment, donc la vitesse horizontale décroît.

L'angle de chute est plus grand que l'angle de projection. — De la seconde des équations (5), on tire :

$$-\operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{g\,dy}{v^2\cos^2\theta}.$$

intégrons depuis l'origine jusqu'au sommet, il vient

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi = \int_0^Y \frac{g\,dy}{v^2\cos^2\theta};$$

intégrons de même depuis le point de chute jusqu'au sommet, on a :

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\omega = \int_0^Y \frac{g\,dy}{v^2\cos^2\theta}.$$

Mais les éléments de cette seconde intégrale sont plus grands que ceux de la première, puisque toutes les valeurs de $v\cos\theta$ sur la branche descendante sont moindres que sur la branche ascendante. Par conséquent on a $\omega > \varphi$.

Il résulte de là qu'en considérant deux points ayant la même ordonnée, l'inclinaison sur la branche descendante est plus grande que sur la branche ascendante.

Hauteur de tir. — [illegible] construit de [illegible] projection φ, l'autre [illegible]

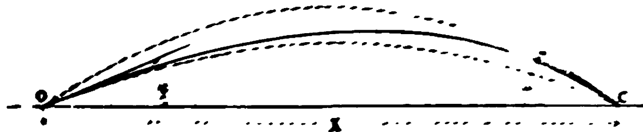


Fig. 3.

mière sera au-dessous et la seconde au-dessus de la trajectoire dans l'air. Par conséquent (chapitre I[er]) la hauteur du tir dans l'air est comprise entre $\frac{1}{4}$ X tg φ et $\frac{1}{4}$ X tg ω.

Le sommet de la trajectoire est plus voisin du point de chute que de l'origine. — Dans une courbe quelconque, on a

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}\theta},$$

en appelant x' la distance horizontale de l'origine au sommet, et Y la hauteur de tir, nous avons :

$$x' = \int_0^Y \frac{dy}{\operatorname{tg}\theta}.$$

Si on effectue l'intégration dans toute l'étendue de la branche [illegible] à partir du point de chute, on a pour distance horizontale [illegible] sommet au point de chute

[illegible]

[illegible] l'axe des x. [illegible] pour [illegible]

[illegible]

Pour deux points placés à la même hauteur, la vitesse sur la branche ascendante est plus grande que sur la branche descendante. — Cette propriété résulte du principe des forces vives, que l'on peut énoncer ainsi ; la variation de force vive du projectile entre deux points de la trajectoire est égale au travail des forces entre ces deux mêmes points. Pour deux points situés à la même hauteur, le travail de la pesanteur est nul, le travail de la résistance que nous désignerons par R est

$$-\int R ds.$$

Soient v_0 et v_1 les vitesses correspondant aux deux points situés à la même hauteur, l'une sur la branche ascendante, l'autre sur la branche descendante, la variation de force vive est

$$\frac{1}{2}\frac{p}{g}(v_1^2 - v_0^2).$$

En égalant les deux expressions, on a

$$\frac{1}{2}\frac{p}{g}(v_0^2 - v_1^2) = \int R ds,$$

par conséquent, la vitesse v_1 est plus petite que la vitesse v_0 et la vitesse de chute est plus petite que la vitesse de projection.

L'extrémité de la branche descendante est verticale. — L'équation (3) est

$$g dt = -v \cos\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

L'angle θ, correspondant à l'extrémité de la courbe, peut être obtenu en intégrant d'abord de l'origine à un point quelconque et faisant ensuite $t = \infty$. Le facteur $v \cos \theta$ représentant la vitesse horizontale, quantité toujours finie, car elle décroît toujours, on a en effectuant l'intégration

$$gt = k(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta),$$

k désignant la valeur moyenne que prend $v \cos\theta$ dans les limites de l'intégration, valeur qui n'est jamais infinie. Par consé-

quent à $t=\infty$ correspond la valeur $\operatorname{tg}\theta=-\infty$, et par suite $\theta=-\frac{\pi}{2}$, ce qui démontre la proposition.

Vitesse minimum. — En multipliant l'équation (1) par $v\cos\theta$, l'équation (2) par $v\sin\theta$ et additionnant, il vient :

$$(6)\qquad \frac{dv}{dt}=-\left[f(v)+g\sin\theta\right].$$

La vitesse est donc décroissante tant que θ est positif, c'est-à-dire sur toute la branche ascendante, puisque dans toute cette portion de la trajectoire, le second membre de l'équation (6) est toujours négatif. Au delà du sommet la vitesse v, pour un faible espace du moins, est encore décroissante et il en est de même de $f(v)$, tandis que θ croît négativement. Il arrivera donc un point pour lequel v et θ prendront deux valeurs v_1 et θ_1 telles que l'équation

$$(7)\qquad f(v_1)+g\sin\theta_1=0$$

sera satisfaite.

Nous disons maintenant que v_1 est un minimum : en effet, en différentiant l'équation (6), nous avons :

$$\frac{d^2v}{dt^2}=-\left[f'(v)\frac{dv}{dt}+g\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right].$$

En éliminant $\frac{d\theta}{dt}$ au moyen de l'équation (3), il vient

$$\frac{d^2v}{dt^2}=-f'(v)\frac{dv}{dt}+\frac{g^2\cos^2\theta_1}{v}.$$

Remplaçons maintenant θ et v par θ_1 et v_1, on a $\frac{dv}{dt}=0$ et

$$\frac{d^2v}{dt^2}=\frac{g^2\cos^2\theta_1}{v_1}.$$

Or le second membre de l'égalité précédente est une quantité positive puisque v_1 diffère de zéro, et θ_1 de $-\frac{\pi}{2}$.

En effet, de l'équation (4) on déduit :

$$\frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta}=\frac{f(v)}{g}\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Cette équation intégrée à partir d'un point pour lequel $v = v_0$, $\theta = \theta_0$, donne,

$$\log \frac{v \cos\theta}{v_0 \cos\theta_0} = k \log \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)};$$

en faisant $\theta = \theta_1$ et $v = v_1$, on a :

$$(8) \qquad v_1 = v_0 \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta_1} \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)} \right]^k = v_0 \left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_0}\right)^{k-1} \left(\frac{1 - \sin\theta_0}{1 - \sin\theta_1}\right)^k;$$

équation dans laquelle k est une moyenne entre toutes les valeurs que prend $\frac{f(v)}{g}$ dans les limites de l'intégration, de v_0 à v_1.

Or cette équation est incompatible avec l'équation (7), aussi bien pour $v_1 = 0$ que pour $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.

Si, en effet, dans l'équation (7) on pose $v_1 = 0$, on a $\theta_1 = 0$, et comme ces deux valeurs ne satisfont pas l'équation (8), il en résulte que $v_1 = 0$ est impossible.

Si au contraire on fait $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ dans l'équation (7), on a $\frac{f(v_1)}{g} = 1$, et par conséquent comme de v_0 à v_1 la vitesse va toujours en diminuant, la valeur de k est plus grande que 1. Mais si k est plus grand que 1, et si θ_1 est égal à $-\frac{\pi}{2}$, on a d'après l'équation (8) $v_1 = 0$, valeur qui ne satisfait plus à $\frac{f(v_1)}{g} = 1$.

Par conséquent, $\frac{dv}{dt}$ étant nul et $\frac{d^2v}{dt^2} > 0$, v_1 est un minimum.

Vitesse finale. — Revenons à l'équation (6). Au delà du point où la vitesse est minimum, v croît et $\frac{dv}{dt}$ est positif : par conséquent, au-dessous du point où la vitesse est minimum, $f(v)$ est en valeur absolue plus petit que $g \sin\theta$. Mais si v augmente, $f(v)$ augmente également, et comme il n'y a pas de limites à l'accroissement de

$f(v)$, tandis que $g \sin \theta$ a pour limite supérieure $-g$, $f(v)$ finira par atteindre la valeur $g \sin \theta$, et au point où cela aura lieu, on aura

$$f(v_2) + g \sin \theta_2 = 0.$$

La valeur de v_2 tirée de cette équation n'est pas à proprement parler un maximum, puisque la valeur $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{g^2 \cos^2 \theta_2}{v_2}$ ne peut pas être négative. Elle ne peut pas non plus être positive, parce que v_2 n'est certainement pas un minimum. Elle est donc nulle, par suite $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$; et v_2 sera donnée par l'équation

$$f(v_2) - g = 0.$$

Cette valeur de v_2 est ce qu'on appelle *vitesse finale*. Mais elle ne peut être atteinte qu'au bout d'un temps infini.

La branche descendante a une asymptote. — La première des équations (5) donne

$$gx = -\int_{\varphi}^{\theta} v^2 d\theta$$

et comme v^2 ne devient jamais infini, x est toujours fini, quelle que soit la valeur de θ. Quand $\theta = -\frac{\pi}{2}$, x représente la distance à l'origine, de la tangente à l'extrémité de la branche descendante, distance par conséquent finie.

La tangente extrême de la branche descendante est donc une asymptote.

Point de courbure maximum. — Il est plus près du sommet que le point de vitesse maximum.

Le rayon de courbure ρ se déduit de la force centrifuge $p \cos \theta$ au moyen de l'expression

$$p \cos \theta = \frac{p}{g} \frac{v^2}{\rho},$$

d'où

$$\rho = \frac{v^2}{g \cos \theta}$$

Cette valeur de ρ est indépendante de $f(v)$, et conduit d'abord à ce théorème : que toutes les trajectoires décrites par des projectiles lancés avec la même vitesse et sous le même angle sont osculatrices entre elles à l'origine, quelle que soit la résistance.

Comme jusqu'au sommet v et θ diminuent, ρ diminue au fur et à mesure que le projectile s'élève ; or, à partir du point de vitesse minimum jusqu'à un point infiniment voisin, v croît et $\cos\theta$ diminue, donc en ce point ρ est croissant. Donc entre le sommet et le point de vitesse minimum, ρ passe par un minimum.

En différentiant ρ par rapport à θ, on a :

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{2v}{g}\frac{1}{\cos\theta}\frac{dv}{d\theta}+\frac{v^2}{g}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

En substituant à la place de $\frac{dv}{d\theta}$ la valeur donnée par l'équation (4), on trouve :

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{v^2}{g^2\cos^2\theta}\left[2f(v)+3g\sin\theta\right].$$

Donc au point de courbure maximum on a :

$$2f(v)+3g\sin\theta=0.$$

Exercices.

En supposant que $f(v)$ soit une fonction algébrique de degré n, démontrer les propriétés suivantes de la branche ascendante :

1° *La tangente extrême de la branche ascendante est oblique ;*

2° *Le point où* $v=\infty$ *est à une distance finie, si le degré de* $f(v)$ *est supérieur au deuxième, et à une distance infinie dans les autres cas ;*

3° *Le temps nécessaire pour atteindre une vitesse infinie est fini, si le degré de* $f(v)$ *est plus grand que 1, et infini dans les autres cas.*

4° *La tangente extrême de la branche ascendante est à une distance finie, si* $f(v)$ *est de degré supérieur à 1, et infinie dans les autres cas.*

CHAPITRE III

CAS PARTICULIERS DANS LESQUELS L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EST POSSIBLE. — RÉSISTANCE MINIMUM. — ANGLES DE PORTÉE MAXIMUM.

---

§ 1.

On peut considérer comme intégrées les équations du mouvement, quand on peut intégrer l'équation qui lie v et θ, c'est-à-dire (chapitre II, § 1) :

$$g \frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = f(v)\frac{d\theta}{\cos\theta}. \tag{1}$$

En effet, quand v est donné en fonction de θ, en mettant son expression dans les équations (3) et (5) du chapitre II, les valeurs de x, y et t dépendent de simples quadratures.

L'intégration ne peut se faire que dans les deux cas suivants :

$$f(v) = a + bv^n, \qquad f(v) = a + b\log v$$

où a, b, n sont des constantes quelconques. Ces cas ont été indiqués par d'Alembert en 1744 (1).

Dans le premier cas, on pose

$$g\log(v\cos\theta) = a\int\frac{d\theta}{\cos\theta} + bq.$$

q désignant une nouvelle variable.

---

(1) Jean Bernouilli avait déjà, en 1719, effectué l'intégration dans les cas de $f(v) = bv^n$.

Quand on donne une relation quelconque entre v et θ, on peut toujours, par une simple différentiation, déterminer la loi de la résistance pour que cette relation soit vérifiée dans le mouvement du projectile. Il semblerait donc qu'il existe une suite illimitée de fonctions $f(v)$ susceptibles de rendre possible l'intégration. Il faut cependant remarquer que de telles fonctions ne dépendent pas seulement de v, comme doit être celle qui exprime la retardation, mais aussi de θ ou bien de la vitesse initiale.

On tire de cette équation

$$v = \frac{e^{\frac{a}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}} e^{\frac{b}{g}q}}{\cos\theta} = \frac{e^{\frac{b}{g}q}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{a}{g}}}{\cos\theta}.$$

et de l'équation (1)

$$dq e^{-\frac{nb}{g}q} = \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{na}{g}} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}.$$

En intégrant cette équation et en représentant l'intégrale du second membre par $\Psi(\theta)$, on a

$$e^{-\frac{nb}{g}q} = \mathrm{C} - \frac{nb}{g}\Psi(\theta)$$

et enfin

$$v = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{a}{g}}}{\left[\mathrm{C} - \frac{nb}{g}\Psi(\theta)\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

On détermine la constante C en posant $v = \mathrm{V}$, $\theta = \varphi$.

Dans le secon l cas, on pose :

$$g \log(v\cos\theta) = q e^{\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}}$$

d'où l'on tire

$$\log v = \frac{q}{g} e^{\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}} - \frac{\log\cos\theta}{g}.$$

Substituant dans l'équation (1), on a

$$e^{\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}} = \left(a - \frac{b}{g}\log\cos\theta\right)\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Posant alors

$$\int e^{-\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}} \frac{d\theta}{\cos\theta}\log\cos\theta = \Psi(\theta)$$

et remarquant d'autre part que l'on a

$$\int a\frac{d\theta}{\cos\theta} e^{-\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}} = -\frac{ag}{b} e^{-\frac{b}{g}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}},$$

on obtient pour q la valeur

$$q = C - \frac{ag}{b} e^{-\frac{b}{g}\int \frac{d\theta}{\cos\theta}} - \frac{b}{g}\Psi(\theta).$$

On a donc

$$g \log(v\cos\theta) = \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{b}{g}} \left[C - \frac{b}{g}\Psi(\theta)\right] - \frac{ag}{b}.$$

On déterminera la valeur de C en faisant $v = V$, $\theta = \varphi$.

§ 2.

Lorsqu'on suppose que la résistance est infiniment petite ou, ce qui revient au même, le coefficient balistique infiniment grand, les équations du mouvement peuvent s'intégrer quelle que soit la forme de la fonction qui la représente. S'il est utile d'étudier le mouvement d'un projectile en faisant abstraction complète de la résistance de l'air, il doit être encore plus utile de l'étudier dans le cas d'une résistance très faible, c'est-à-dire dans le cas où l'on peut négliger le carré et les puissances supérieures de cette résistance. Les conséquences pratiques de cette étude apparaîtront du reste dans les paragraphes 3 et 4 de ce chapitre.

L'équation $g d(v\cos\theta) = cvF(v)\,d\theta$, dans laquelle la résistance sur l'unité de masse est représentée par $cF(v)$, c étant une quantité infiniment petite quelconque, inversement proportionnelle au coefficient balistique, donne :

$$v\cos\theta = V\cos\varphi + \frac{c}{g}\int_{\varphi}^{\theta} vF(v)\,d\theta$$

ou

$$v\cos\theta = V\cos\varphi\,(1 - ck)$$

ck représentant la quantité

$$ck = \frac{c}{g}\int_{\theta}^{\varphi} \frac{v\cos\theta}{V\cos\varphi} F(v)\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Si, sous le signe intégral, on remplace $v\cos\theta$ par $V\cos\varphi$, ou v

par $\frac{V\cos\varphi}{\cos\theta}$, la valeur qui en résulte pour ck diffère de la véritable valeur par un infiniment petit du second ordre, négligeable par conséquent relativement à ck; nous pouvons donc écrire

$$k = \frac{1}{g}\int_0^\varphi F\left(\frac{V\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

et l'intégration devient possible par la disparition de v.

Si donc on pose

$$(1)' \qquad k_\alpha = \frac{1}{g}\int_0^\alpha F\left(\frac{V\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos\theta},$$

nous aurons

$$(2) \qquad v\cos\theta = V\cos\varphi\,(1 - ck_\varphi + ck_\theta).$$

En substituant dans les équations du mouvement :

$$gdx = -v^2\cos^2\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \qquad gdy = -v^2\cos^2\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

$$gdt = -v\cos\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

et intégrant de φ à θ, il vient :

$$(3) \qquad \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi} = -\int_\varphi^\theta (1 - 2ck_\varphi + 2ck_\theta)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$(4) \qquad \frac{gy}{V^2\cos^2\varphi} = -\int_\varphi^\theta (1 - 2ck_\varphi + 2ck_\theta)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{tg}\,\theta$$

$$(5) \qquad \frac{gt}{V\cos\varphi} = -\int_\varphi^\theta (1 - ck_\varphi + ck_\theta)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Au moyen de ces équations la solution du problème est ramenée à des quadratures.

Soit ω la valeur numérique de l'angle de chute, valeur qui diffère infiniment peu de l'angle φ, puisque la résistance est infiniment petite. Comme lorsque $\theta = -\omega\ y = 0$, l'équation (4) donne

$$(\mathrm{tg}^2\omega - \mathrm{tg}^2\varphi)(1 - 2ck_\varphi) + 2c\,(l_{-\omega}\,\mathrm{tg}^2\omega - l_\varphi\,\mathrm{tg}^2\varphi) = 0.$$

ayant posé pour abréger,

(6)
$$\int_0^\theta 2k_\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{tg}\theta = l_\theta \operatorname{tg}^2\theta.$$

Négligeant ensuite les infiniment petits du 2e ordre, et remarquant que $l_{-\varphi} = -l_\varphi$ il vient

$$\operatorname{tg}^2\omega = \operatorname{tg}^2\varphi\,(1 + 4cl_\varphi)$$

et par conséquent

(7)
$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi\,(1 + 2cl_\varphi).$$

La portée X s'obtiendra en posant dans l'équation (3) $\theta = -\omega$; en négligeant toujours les infiniment petits d'ordre supérieur, et en remarquant également que l'on a

$$\int_\varphi^{-\varphi} k_\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 0$$

il vient :

$$\frac{gX}{V^2\cos^2\varphi} = (\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\omega)(1 - 2ck_\varphi) = 2\operatorname{tg}\varphi\,(1 + cl_\varphi - 2ck_\varphi)$$

et par suite

(8)
$$X = \frac{V^2\sin 2\varphi}{g}(1 + cl_\varphi - 2ck_\varphi).$$

On trouvera de la même façon la durée du trajet :

(9)
$$T = \frac{2V\sin\varphi}{g}(1 + cl_\varphi - ck_\varphi),$$

la hauteur du tir :

(10)
$$Y = \frac{V^2\sin^2\varphi}{2g}(1 + cl_\varphi - ck_\varphi),$$

et la vitesse de chute :

(11)
$$U = \frac{V\cos\varphi}{\cos\omega}(1 - 2ck_\varphi).$$

D'autre part, l'équation (8) donne

(12)
$$V = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}}\left(1 + ck_\varphi - \frac{cl_\varphi}{2}\right).$$

En substituant dans les équations (9), (10), (11), on obtient :

(9)' $$T = \sqrt{\frac{2X \operatorname{tg}\varphi}{g}}\left(1 + \frac{cl_\varphi}{2}\right);$$

(10)' $$Y = \frac{X \operatorname{tg}\varphi}{4}(1 + ck_\varphi);$$

(11)' $$U \cos\omega = \sqrt{\frac{gX}{2 \operatorname{tg}\varphi}}\left(1 - ck_\varphi - \frac{cl_\varphi}{2}\right)$$

et aussi :

(13) $$Y = \frac{VT \sin\varphi}{4},$$ (14) $$\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\varphi = \frac{g^2T^4}{4X^2},$$

(15) $$U \cos\omega = \frac{X^2 \operatorname{tg}\varphi}{4TY},$$ (16) $$U \sin\omega = \frac{g^2T^3}{16Y}.$$

Ces équations, même dans le cas d'une résistance finie, donnent assez souvent une approximation suffisante ; il en est de même des équations (7), (9)', (10)', (11)', quand, dans les valeurs de k_φ et de l_φ [équations (1)' et (6)], on remplace V par $\sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}}$, que nous représenterons par V_0, et qui n'en diffère que par un infiniment petit du premier ordre.

§ 3.

Dans le prochain chapitre, nous adopterons une méthode d'intégration approximative, qui consiste à remplacer F (v) par l'expression

$$\beta F\left(\frac{v \cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}.$$

β désignant une quantité constante. Il est important de rechercher avec soin la valeur qu'il faut donner à β, pour que la valeur de la portée en fonction de V et de φ, obtenue avec cette méthode approximative, coïncide avec la valeur exacte de X. Dans le cas d'une résistance infiniment petite, il est facile de déterminer cette valeur pour β.

En effectuant la substitution indiquée, on devra, dans les expressions de k_φ et de l_φ, mettre $\beta F(V_0)\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}$ à la place de $F\left(\frac{V_0 \cos\varphi}{\cos\theta}\right)$,

c'est-à-dire substituer aux expressions (1)' et (6) de k_φ et de l_φ les valeurs

$$\frac{\beta \cos^2\varphi}{g} F(V_0) \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{2\beta\cos^2\varphi}{3g} F(V_0) \operatorname{tg}\varphi\ (^1).$$

L'équation (12) devient alors

$$(17) \qquad V = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{c\beta \sin 2\varphi}{g} F(V_0)\right].$$

Or, pour que cette valeur de V soit identique à la valeur (12), on doit avoir

$$\frac{2}{3}\frac{\beta \sin 2\varphi}{g} F(V_0) = 2k_\varphi - l_\varphi = 2k_\varphi - \frac{2}{\operatorname{tg}^2\varphi}\int_0^\varphi k_\theta \operatorname{tg}\theta\, d\operatorname{tg}\theta$$

$$= k_\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}\int_0^\varphi \operatorname{tg}^2\theta\, dk_\theta = \frac{1}{g}\int_0^\varphi F\left(\frac{V_0\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}\right)\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

et finalement :

$$(18) \qquad \beta = \frac{3}{2\sin 2\varphi F(V_0)}\int_0^\varphi F\left(\frac{V_0\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}\right)\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Cas particuliers. — Soit $cF(v) = cv^n$, posons :

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \xi_n(\theta), \qquad \xi_n(\varphi) = \xi_n,$$

nous avons :

$$(19) \qquad \beta = \beta_n = \frac{3\cos^{n-2}\varphi}{4\operatorname{tg}\varphi}\int_0^\varphi d\xi_n(\theta)\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}\right)$$

$$= \frac{3\cos^{n-2}\varphi}{4\operatorname{tg}\varphi}\left[\xi_n + \operatorname{cotg}^2\varphi\,(\xi_{n+2} - \xi_n)\right]$$

et comme

$$(20) \qquad \xi_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\xi_n + \frac{1}{n+2}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos^{n+1}\varphi},$$

il vient

$$(21) \qquad \beta_n = \frac{3\cos^{n-2}\varphi}{4\operatorname{tg}\varphi}\left[\left(1 - \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{n+2}\right)\xi_n + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{(n+2)\cos^{n+1}\varphi}\right].$$

---

(1) Il est évident que si c est infiniment petit, il est indifférent de mettre dans l'expression de β, V ou V_0.

Au moyen de l'équation (20), le calcul de β_n peut être ramené à celui de ξ_{n-2}, à ξ_{n-4}, et finalement, si n est pair, à ξ_2, dont il existe des tables numériques.

Pour $n=2$, $n=4$, $n=6$, on obtient :

$$\beta_2 = \frac{3}{4 \operatorname{tg}\varphi}\left[\left(1-\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{4}\right)\xi_2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{4\cos^3\varphi}\right],$$

$$\beta_4 = \frac{3\cos^2\varphi}{4\operatorname{tg}\varphi}\left[\frac{3}{4}\left(1-\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{6}\right)\xi_2 + \frac{2-7\cos^2\varphi}{24\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}^5\varphi}\right],$$

$$\beta_6 = \frac{3\cos^4\varphi}{4\operatorname{tg}\varphi}\left[\frac{15}{24}\left(1-\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{8}\right)\xi_2 + \frac{36+4\cos^2\varphi-45\cos^4\varphi}{192\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}^7\varphi}\right].$$

Si n est impair, la réduction est plus simple. Posons, en effet, $\operatorname{tg}\theta = p$, $\operatorname{tg}\varphi = p_0$, on a

$$d\xi_n(\theta) = dp\,(1+p^2)^{\frac{n-2}{2}} = dp\left[1+\left(\frac{n-1}{2}\right)_1 p^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)_2 p^4 + \left(\frac{n-1}{2}\right)_3 p^6 + \ldots\right]$$

et le polynôme entre parenthèses est fini. En mettant cette expression dans l'équation (19) et en intégrant, il vient

$$\text{(22)} \qquad \beta_n = \cos^{n-2}\varphi\left[1+\frac{2}{5}\left(\frac{n-1}{2}\right)_1 p_0^2 + \frac{9}{35}\left(\frac{n-1}{2}\right)_2 p_0^4 + \frac{4}{21}\left(\frac{n-1}{2}\right)_3 p_0^6 + \ldots\right].$$

Cette équation peut servir à calculer β_n, même quand n est fractionnaire, jusqu'à $\varphi = 45°$, puisque la série est certainement convergente jusqu'à cette limite. Pour $n = 1, 3, 5, 7$, on a

$$\beta_1 = \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad \beta_3 = \cos\varphi\left(1+\frac{2}{5}\operatorname{tg}^2\varphi\right),$$

$$\beta_5 = \cos^3\varphi\left(1+\frac{4}{5}\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{9}{35}\operatorname{tg}^4\varphi\right),$$

$$\beta_7 = \cos^5\varphi\left(1+\frac{6}{5}\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{27}{35}\operatorname{tg}^4\varphi + \frac{4}{21}\operatorname{tg}^6\varphi\right).$$

Il est évident que si $F(v) = av^m + bv^n + \ldots\ldots$ on a :

$$\beta = \frac{aV_0^m\beta_m + bV_0^n\beta_n + \ldots}{aV_0^m + bV_0^n + \ldots}.$$

Par conséquent la valeur de β correspondant à la formule (g) de l'*Introduction* est donnée par l'expression

$$(23) \qquad \beta = \frac{110\beta_2 - 2{,}5W_0^4\beta_6 + 0{,}572W_0^6\beta_8 - 0{,}0228W_0^8\beta_{10}}{110 - 2{,}5W_0^4 + 0{,}572W_0^6 - 0{,}0228W_0^8}$$

W_0 désignant la quantité

$$W_0 = \frac{V_0}{100} = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}} < 4{,}00.$$

§ 4.

Angles de portée maximum.

Reprenons l'équation (17), que nous considérons sous la forme

$$X = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{g}\left[1 - \frac{2c\beta \sin 2\varphi}{3g} F(V)\right].$$

Cette équation est exacte lorsque c est infiniment petit et que l'on adopte pour β la valeur donnée par l'équation (18); nous nous proposons de rechercher maintenant les cas dans lesquels l'angle de plus grande portée est supérieur ou inférieur à 45° pour une valeur donnée de V.

La dérivée de X par rapport à φ, égalée à zéro, donne :

$$2\cos 2\varphi - \frac{2c}{3}\beta \sin 4\varphi \frac{F(V)}{g} - \frac{2c}{3}\sin 2\varphi \frac{F(V)}{g}\frac{d\beta}{d\varphi} = 0.$$

L'angle φ qui satisfait à cette équation diffère infiniment peu de 45°; on peut poser $\varphi = 45° + \varepsilon$, et en négligeant les infiniment petits du second ordre, nous avons

$$(24) \qquad \varepsilon = -\frac{c}{6}\frac{F(V)}{g}\beta'$$

β' représentant la valeur de $\dfrac{d\beta}{d\varphi}$ pour $\varphi = 45°$.

D'où le théorème :

Suivant que β' tiré de l'équation (18) est négatif ou positif, la fonction résistante donne, pour une valeur déterminée de la vitesse, des angles de portée maximum ou minimum plus grands ou plus petits que 45°.

Ce théorème, et ceux qui suivent, bien qu'établis dans l'hypothèse d'une résistance infiniment petite, sont encore vrais dans le cas d'une résistance finie, pourvu que i soit suffisamment petit, et il n'est pas même démontré qu'ils ne sont applicables qu'aux petites valeurs. Cependant on connaît des cas de résistance où l'angle de portée maximum peut, suivant la valeur de i, être plus grand ou plus petit que 45°, et par conséquent, nous déduirons du théorème précédent le corollaire suivant.

Si pour une valeur finie de c, et pour une certaine vitesse initiale, on obtient une portée maximum avec un angle > 45° (ou < 45°), suivant que β' est positif (ou négatif) : avec une valeur moindre de c, mais différente de zéro, on obtiendra un angle de portée maximum égal à celui que l'on obtiendrait dans le vide.

Cas particuliers. — En différentiant l'équation (21) et en posant $\varphi = 45°$, nous avons après réductions :

$$(25) \quad \beta'_n = \left(\frac{d\beta_n}{d\varphi}\right)_{45°} = \frac{3}{2\sqrt{2^n}} \frac{n\sqrt{2^{n+1}} - (n^2+n-4)\,\xi_n\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n+2} \text{ [1]}.$$

En faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots 10$, on trouve

$\beta'_1 = 1,4142$, $\beta'_4 = -0,1587$, $\beta'_7 = -0,4512$, $\beta'_{10} = -0,4295$
$\beta'_2 = 0,6302$, $\beta'_5 = -0,3232$, $\beta'_8 = -0,4591$,
$\beta'_3 = 0,1414$, $\beta'_6 = -0,4124$, $\beta'_9 = -0,4194$,

Donc les résistances proportionnelles aux puissances 4[me]... 10[me] de la vitesse donnent, du moins pour de petites valeurs de c, des angles de portée maximum supérieurs à 45°. Dans la note VI, nous démontrerons que le fait a lieu, quel que soit n, entier ou fractionnaire, pourvu qu'il soit supérieur à 3,4142.

Dans le cas des projectiles sphériques entre certaines limites de vitesses, on admet la loi,

$$F(v) = av^2\left[1 + \left(\frac{v}{186}\right)^2\right],$$

[1] Au moyen de l'équation (20), $\xi_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$, quand n est pair, se réduit à $\xi_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,1478$.

On a donc

$$\beta' F(v) = aV^2 \left[\beta'_2 + \beta'_4 \left(\frac{V}{186}\right)^2\right].$$

Or β'_2 et β'_4 étant de signe contraire, il existe une valeur de V qui annule β'; cette valeur est

$$V = 186\sqrt{-\frac{\beta'_2}{\beta'_4}} = 186 \times 2{,}018 = 375.$$

Cette formule donne donc, suivant que V est plus grand ou plus petit que 375 m, des angles de portée maximum supérieurs ou inférieurs à 45°.

Pour les projectiles oblongs, la formule (23) qui s'applique jusqu'à $W_0 = 4{,}00$ donne :

$$\beta' = \frac{69{,}327 - 1{,}031W_0^4 + 0{,}2626W_0^6 - 0{,}009793W_0^8}{110 - 2{,}5W_0^4 + 0{,}572W_0^6 + 0{,}0228W_0^8},$$

expression qui pour $W_0 < 4{,}00$ est toujours positive. Cette formule ne permet donc pas d'affirmer que les projectiles oblongs admettent des angles de portée maximum supérieurs à 45°, sauf ce qui est dit dans le § suivant.

§ 5.

Dans les paragraphes précédents, nous avons fait abstraction de la variation de la densité de l'air avec l'altitude, mais dans les applications, et spécialement dans le tir courbe, on ne peut la négliger. L'introduction de cette variation apporte des modifications importantes aux théorèmes démontrés sur les angles de portée maximum.

Si l'on représente la densité de l'air par une expression de la forme :

$$\delta = \delta_0 (1 - \alpha y),$$

où δ_0 est la densité à la bouche et $\alpha = 0{,}00008$, il faut dans les formules précédentes remplacer $cF(v)$ par

$$cF(v)(1 - \alpha y) \qquad \text{ou} \qquad cF\left(\frac{V\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left[1 - \frac{\alpha V^2 \cos^2\varphi}{2g}(\mathrm{tg}^2\varphi - \mathrm{tg}^2\theta)\right]$$

ou

$$cF\left(\frac{V_0 \cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left[1-\alpha Y\left(1-\frac{tg^2\theta}{tg^2\varphi}\right)\right],$$

puisque les trois expressions ne diffèrent entre elles que par des quantités du second ordre.

Toutes les formules du § 1 ne subissent donc aucune modification, si ce n'est celle qui résulte de l'expression de k_θ, dont la valeur n'est plus donnée par l'équation (1)′, mais par l'équation suivante

$$(26) \qquad k_\theta = \frac{1}{g}\int_0^\theta F\left(\frac{V_0\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left[1-\frac{\alpha V_0^2\cos^2\varphi}{2g}(tg^2\varphi - tg^2\theta)\right]\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

La valeur de β donnée par l'équation (18) se modifie et devient :

$$(27) \quad \bar\beta = \frac{3}{2\sin 2\varphi F(V_0)}\int_0^\varphi F\left(\frac{V_0\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left(1+\frac{tg^2\theta}{tg^2\varphi}\right)\left[1-\alpha Y\left(1-\frac{tg^2\theta}{tg^2\varphi}\right)\right]\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

ou

$$\bar\beta = \beta - \frac{3\alpha V_0^2\, tg\varphi}{8gF(V_0)}\int_0^\varphi F\left(\frac{V_0\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left(1-\frac{tg^4\theta}{tg^4\varphi}\right)\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Soit $cF(v) = cv^n$. On obtient :

$$\bar\beta'_n = \beta'_n - \frac{3\alpha V_0^2\, tg\varphi \cos^n\varphi}{8g}\left[\xi_n - \cot g^4\varphi\,(\xi_n - 2\xi_{n+2} + \xi_{n+4})\right].$$

En différentiant par rapport à φ et en faisant ensuite $\varphi = 45°$, on a :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar\beta'_n &= \beta'_n - \frac{\alpha V_0^2}{g} A_n, \\ A_n &= \frac{3}{16}\,\frac{(n+6)(n-1)\sqrt{2^{n+1}} - \xi_n(n^3+4n^2-7n-34)}{(n+2)(n+4)\sqrt{2^{n-2}}}. \end{aligned} \right.$$

Pour $n = 2, 3, 5, 6, 7$, on obtient pour A_n les valeurs suivantes :

$A_2 = 0{,}3920$,	$A_6 = 0{,}0208$,
$A_3 = 0{,}2322$,	$A_7 = -0{,}0009$.
$A_5 = 0{,}0640$,	

L'examen de ces valeurs montre que $\bar\beta'_2$ et $\bar\beta'_3$ peuvent devenir négatifs, et ils le deviennent effectivement, quand V_0 est supérieur

à 444 m et à 273 m, et par suite *il existe même pour des résistances dont le degré est inférieur à 3,4142, des vitesses initiales qui, pour des valeurs très considérables du coefficient balistique, admettent des angles de portée maximum supérieurs à celui qui a lieu dans le vide.*

On voit également qu'au delà d'une certaine valeur de n, comprise entre 6 et 7 (valeur que nous représenterons par s), A_n est négatif); par suite, *il existe pour des résistances dont le degré est supérieur à s, des vitesses initiales qui, pour des valeurs très considérables du coefficient balistique, admettent des angles de portée maximum supérieurs à 45°.*

Par conséquent, parmi les résistances proportionnelles à une puissance de la vitesse, les seules qui pour de très grandes valeurs du coefficient balistique admettent, quelle que soit la vitesse initiale, des angles de portée maximum supérieurs à 45°, sont celles dont le degré est compris entre 3,4142 et un nombre environ double.

Exercices.

Démontrer :

1° Que $V_0 \cos\varphi$ est une moyenne entre les vitesses horizontales à l'origine et au point de chute;

2° Que les valeurs de

$$\frac{F(v)\cos\theta}{F(u)\cos^2\varphi} \qquad \text{et} \qquad \frac{F\left(\frac{V_0\cos\varphi}{\cos\theta}\right)}{F(V_0)}\frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi}$$

coïncident en trois points de la trajectoire;

3° Que la valeur de β donnée par (18) est une moyenne entre les valeurs que prend la seconde de ces quantités dans les limites de la trajectoire.

CHAPITRE IV

FORMULES DE TIR



Pour résoudre exactement les divers problèmes de tir, il serait nécessaire d'intégrer les équations différentielles du chapitre II. Mais la forme que l'on peut attribuer à la fonction $F(v)$, pour qu'elle soit compatible avec les résultats d'expériences sur la résistance de l'air, ne permet pas d'effectuer l'intégration. Il est donc nécessaire d'avoir recours à une méthode approximative.

§ 1.

Reportons-nous aux équations différentielles du chapitre II en remplaçant $f(v)$ par sa valeur (Introduction, § 3), nous avons :

$$gd(v\cos\theta) = \frac{\delta_y i}{C} F(v)\, v d\theta, \text{ (}^1\text{)}$$

$$gdx = -v^2 d\theta, \qquad gdt = -v\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Décomposons la vitesse suivant deux directions, l'une verticale, l'autre parallèle à l'angle de projection. En appelant u cette dernière, il vient

(1) $$v\cos\theta = u\cos\varphi.$$

Nous appellerons u la *pseudo-vitesse*. Sa valeur est identique à celle de v en deux points, savoir : à l'origine et, sur la branche descendante, au point où $\theta = -\varphi$. Sur le reste de la trajectoire, la

(1) Nous avons employé la notation δ_y pour distinguer la densité à la hauteur y, de la densité à la bouche, que nous continuerons à représenter par δ.

pseudo-vitesse diffère d'autant moins de la vitesse, que le tir est plus tendu.

En substituant, on obtient :

$$gdu = \frac{\delta_y i F(v)}{C} u \frac{d\theta}{\cos\theta},$$

$$gdx = -u^2 \cos^2\varphi \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

$$gdt = -u \cos\varphi \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

Posons maintenant

$$(2) \qquad \delta_y F(v) = \delta i \beta F(u) \frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta},$$

on tire de la première,

$$gdu = \frac{\delta i \beta \cos^2\varphi}{C} u F(u) \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

ou

$$(3) \qquad \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{C}{\delta i \beta \cos^2\varphi} \frac{gdu}{uF(u)}.$$

En remplaçant dans les deux autres équations $\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ par la valeur (3), il vient

$$(4) \qquad dx = -\frac{C}{\delta i \beta} \frac{udu}{F(u)},$$

$$(5) \qquad dt = -\frac{C}{\delta i \beta \cos\varphi} \frac{du}{F(u)}.$$

Intégrant et posant

$$(6) \qquad -\int \frac{udu}{F(u)} = D(u), \qquad -\int \frac{2gdu}{uF(u)} = J(u), \qquad -\int \frac{du}{F(u)} = T(u).$$

et observant qu'à l'origine $u = V$, nous avons :

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{C'_\theta}{2\cos^2\varphi} [J(u) - J(V)],$$

$$(8) \qquad x = -C'_x [D(u) - D(V)],$$

$$(9) \qquad t = -\frac{C'_t}{\cos\varphi} [T(u) - T(V)],$$

équations dans lesquelles, C'_θ, C'_x, C'_t désignent trois valeurs moyennes parmi toutes celles que prend la quantité $\frac{C}{\delta i \beta}$ dans les limites des trois intégrations.

En multipliant (7) par la différentielle de (8), et observant que $dx \operatorname{tg}\theta = dy$, on a

$$dy - dx \operatorname{tg}\varphi = -\frac{CC'_\theta}{2\delta i\beta \cos^2\varphi}\left[J(u) - J(V)\right] dD(u).$$

Intégrant de nouveau, et divisant par (8), et posant

$$(9)' \qquad \int J(u)\, dD(u), \qquad \text{ou} \qquad -\int J(u) \frac{u du}{F(u)} = A(u),$$

il vient :

$$(10) \qquad \frac{y}{x} - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{C'_y}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right].$$

C'_y étant une quatrième valeur moyenne analogue aux trois précédentes.

Les quatre quantités C'_θ, C'_x, C'_t, C'_y diffèrent entre elles, et correspondent à des valeurs différentes de la quantité β définie par l'équation (2). Mais la différence qui existe entre elles n'étant pas très grande, on peut, pour la solution pratique des problèmes de tir, choisir pour les quatre valeurs précédentes une valeur commune, la plus convenable pour le problème principal qui est le suivant.

Étant données deux des trois quantités, la vitesse initiale, l'angle de projection, et la portée, déterminer la troisième.

Ce problème est en effet celui qui demande la solution la plus exacte.

La valeur commune, que l'on donne aux quatre quantités C, et que l'on regarde comme constante pour chaque trajectoire, s'appelle le *coefficient balistique réduit,* que l'on représente sans avoir recours à une nouvelle notation par

$$(11) \qquad C' = \frac{C}{\delta i \beta},$$

β dépend de l'angle de projection et de la distance. Sa détermination fait l'objet du paragraphe suivant.

Les valeurs numériques de D (u), J (u), A (u), T (u) dépendent de F (u) et sont données dans la table V, que nous appellerons *Table balistique.*

Les équations (1), (4), (8), (9), (10), en y faisant $C'_\theta = C'_x = C'_t = C'_y = C'$ et celles qui en sont la conséquence, s'appellent les formules de tir et sont généralement employées par toutes les artilleries. Elles ont été publiées pour la première fois en 1880 ([1]). Les opérations arithmétiques qu'elles exigent, sont des plus simples; elles sont indépendantes de la forme de la fonction représentant la résistance de l'air, et par conséquent ne peuvent changer, quels que soient les progrès réalisés dans l'étude de cette résistance; dans le cas où la forme de la fonction se modifierait, les résultats numériques seuls de la table seraient modifiés. Cette table peut être établie, quelle que soit la résistance adoptée, que celle-ci soit exprimée par une formule unique de n'importe quelle forme pour toutes les vitesses, ou qu'elle soit représentée par une suite de formules variant avec les limites de ces mêmes vitesses, ou même encore lorsqu'aucune formule ne pourrait exprimer la résistance en fonction de la vitesse, et que l'on n'aurait à sa disposition que des quantités numériques correspondant aux vitesses.

Douze tables numériques ont été construites depuis 1880, 9 en Europe et 3 en Amérique, tables de plus en plus perfectionnées, mais basées toutes sur la même méthode. Nous en indiquerons les principes au § (4).

En 1880, nous avons employé une méthode d'intégration approximative due à Didion et généralisée par St-Robert. Cette méthode nous a conduit tout d'abord à des formules moins simples, que nous avons ramenées ensuite aux formules actuelles au moyen de considérations étrangères à la méthode elle-même. Le procédé que nous avons employé par la suite ([2]) et que nous présentons ici, est bien plus direct et constitue une méthode d'intégration différente; la différence entre les deux méthodes consiste en ce que, au lieu de substituer avec Didion à $\delta_y F(v)$ la quantité $\dfrac{\delta F(\alpha v \cos\theta)}{\alpha \cos\theta}$, α étant une constante, nous y substituons la quantité $\delta\beta F\left(\dfrac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\dfrac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}$, β étant également une constante. Or les deux quantités α et β ne peuvent à la fois être constantes si ce n'est dans le cas où la résistance est proportionnelle à une puissance de la vitesse. Dans tous les autres cas, si on regarde β comme constant, α est variable et *vice versa*. Si la résistance est quadratique, $\beta = \alpha$.

([1]) *Nuovo metodo per resolvere i problemi del tiro* (*Giornale d'Artiglieria e Genio.* Parte II. 1880).

([2]) Sur un procédé d'intégration des formules balistiques (*Revue d'artillerie*, janvier 1886).

D'autres méthodes d'intégration approximative ont été proposées antérieurement, basées toutes sur une altération de la formule de la résistance $F(v)$. Borda, Legendre, Français, ont suivi cette voie, mais tous ces géomètres n'ont jamais considéré que le cas de la résistance quadratique. Ils ont tour à tour proposé de multiplier la quantité $F(v)$ par les facteurs

$$\alpha \cos\theta, \qquad \cos\theta\,(1 + a\,\text{tg}^2\theta), \qquad \cos\theta\,\frac{1 + b\,\text{tg}^2\theta}{\sqrt{1 + c\,\text{tg}^2\theta}},$$

α, a, b, c désignant des constantes, que l'on détermine de façon que les multiplicateurs diffèrent le moins possible de l'unité. La méthode de Borda revient à celle de Didion. Bezout a proposé également une méthode qui revient à celle de Borda et de Didion ; il prit même pour α la valeur peu justifiée admise depuis par Didion, Mayevski et d'autres balisticiens, c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\sec\varphi + \cot\text{g}\,\varphi \log \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].\ (^1)$$

Les méthodes de Legendre et de Français donnent des résultats beaucoup plus approchés, mais sont très laborieuses dans les applications (²).

§ 2.

La quantité β définie par l'équation (2), c'est-à-dire

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta}\,\frac{F(v)\cos\theta}{F(u)\cos^2\varphi},$$

renferme deux facteurs variables. Le premier, $\delta_y = \delta(1 - \alpha y)$, varie fort peu, à cause de la petitesse de α, avec l'angle de projection quand celui-ci est faible, mais il peut descendre jusqu'à 0,9 δ et même bien au-dessous, quand le projectile s'élève au-dessus de mille mètres.

Le second facteur que, pour abréger, nous désignerons par γ, en remplaçant $F(v)$ par $K(v)\,v^2$, prend la forme

$$\gamma = \frac{K(v)}{K(u)}\,\frac{1}{\cos\theta}.$$

(¹) Cette valeur de α est encore plus petite que celle de β_1 donnée page 41.

(²) On trouvera des renseignements plus détaillés sur ces méthodes dans Didion (*Traité de Balistique*, Paris 1860, pages 243-249).

Il convient, dans l'examen de γ, de distinguer le cas dans lequel la résistance croît comme le carré de la vitesse, de celui dans lequel cette résistance croît plus rapidement.

Dans le premier cas, $K(v) = K(u) =$ constante; γ devient alors égal à séc θ, et par conséquent à l'origine, au sommet et au point pour lequel $\theta = -\varphi$, γ passe par les trois valeurs séc φ, 1, et séc φ, et continue à croître à partir de ce dernier point. Dans le second cas, comme entre les points $\theta = \varphi$ et $\theta = -\varphi$, u est supérieur à v, entre ces mêmes points qui comprennent la plus grande partie de la trajectoire au-dessus de l'horizon, γ est toujours plus petit que séc θ, il est donc < 1 au sommet, mais pour $\theta = -\varphi$, il devient séc φ, et continue à croître comme dans le premier cas. Donc le second facteur varie entre deux limites dont l'une est dans tous les cas > 1, et l'autre égale à 1 ou plus petite que 1, suivant que la résistance croît comme le carré de la vitesse ou plus rapidement.

Mais le premier facteur est toujours plus petit que 1 au sommet; nous pouvons donc conclure de ce qui précède, que β varie dans chaque cas entre deux limites dont l'une est supérieure et l'autre inférieure à l'unité.

Ces deux limites sont très voisines de l'unité, quand les angles de projection sont petits, et dans ce cas, on peut poser $\beta = 1$, sans commettre de graves erreurs.

Si l'on opère sous de grands angles, ce n'est seulement que comme première approximation que l'on peut prendre $\beta = 1$.

Dans la note VIII, nous indiquerons comment on pourrait calculer la valeur de β, qu'il faut introduire dans l'équation (11) en employant une série ordonnée suivant les puissances décroissantes du coefficient balistique, mais à cause de la difficulté que présente le développement nous n'avons calculé dans le cas général que le premier terme de la série, qui est identique avec la valeur de $\bar{\beta}$ donnée par l'équation (27) du chapitre III. Quant aux autres termes, certains cas particuliers conduisent à retenir que ces termes décroissent rapidement, et sont positifs; la valeur (27) de $\bar{\beta}$ fournit donc une valeur un peu plus faible que la véritable valeur. Mais l'expression (27) a une partie négative, qui dépend du coefficient α, et qui peut être considérée comme étant du même ordre de gran-

deur que les termes positifs dont nous avons parlé. Si donc en même temps que ces termes, nous négligeons aussi ceux qui ont pour facteur α, l'expression qui en résulte sera assez voisine de la valeur cherchée.

Cette expression est donnée par l'équation (18) du chapitre III. En employant pour expression de la résistance la formule (g) de l'Introduction, l'équation (18) se réduit à l'équation (23), pour tous les cas où l'on a

$$\sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}} < 400.$$

Cette extension peut être considérée comme suffisante dans tous les cas de la pratique, comme il est facile de s'en rendre compte par l'inspection de la table VI qui représente le développement de l'équation (23).

Quand φ ne dépasse pas 20°, les valeurs numériques données par les formules de tir en prenant $\beta = 1$, ne diffèrent pas sensiblement en pratique de celles qui sont fournies par les mêmes formules en y introduisant les valeurs de β données par la table VI.

Pour la construction des tables de tir, la meilleure valeur à adopter pour β ou pour $i\beta$ peut se déterminer au moyen d'expériences, que l'on fait dans ce but, et dont nous indiquerons la marche en temps et lieu. Au moyen de ces déterminations expérimentales, on corrige également l'erreur (en général assez faible) qui provient de l'hypothèse que nous avons faite, en considérant l'axe de figure du projectile comme coïncidant avec la tangente à la trajectoire.

§ 3.

Calcul de la trajectoire par points.

La table balistique permet de déterminer avec telle approximation que l'on veut une trajectoire quelconque, lorsqu'on connaît V et φ, en la divisant en un certain nombre d'arcs correspondant à des inclinaisons données. En opérant de cette façon, on peut tenir compte de la diminution de la résistance de l'air suivant la hauteur.

Supposons la trajectoire partagée en arcs, compris entre les inclinaisons successives φ, θ_1 θ_2..... et supposons en outre que nous connaissions pour l'angle θ_{m-1} (qui pourra représenter aussi l'angle de projection φ) les quantités suivantes : la vitesse v_{m-1}, l'abscisse x_{m-1}, l'ordonnée y_{m-1}, et le temps t_{m-1}.

Il s'agit de déterminer les valeurs suivantes pour l'angle θ_m :

l'abscisse $x_m = x_{m-1} + \Delta x_m$,
l'ordonnée $y_m = y_{m-1} + \Delta y_m$,
le temps $t_m = t_{m-1} + \Delta t_m$,
la vitesse v_m.

Les équations à employer sont les suivantes :

$$\beta_{m-1} = \frac{1}{\cos\theta_{m-1}} (1 - \alpha y_{m-1})(1 - z N_{m-1} \operatorname{tg}\theta) \qquad C' = \frac{C}{\delta i \beta_{m-1}},$$

où $\alpha = 0,00008$, z la différence $\theta_{m-1} - \theta_m$ en degrés, N_{m-1} un nombre de la table IV correspondant à la vitesse v_{m-1} et δ la densité à la bouche.

$$J(u_m) = J(v_{m-1}) + \frac{2\cos^2\theta_{m-1}}{C'_{m-1}} (\operatorname{tg}\theta_{m-1} - \operatorname{tg}\theta_m);$$

Connaissant $J(u_m)$, la table balistique donnera u_m, et d'après la même table, on aura

$$\Delta x_m = C'_{m-1} \left[D(u_m) - D(v_{m-1}) \right],$$

$$\Delta y_m = \Delta x_m \operatorname{tg}\theta_{m-1} - \frac{C'^2_{m-1}}{2\cos^2\theta_{m-1}} \left\{ A(u_m) - A(v_{m-1}) \right\}$$
$$- J(v_{m-1}) \left[D(u_m) - D(v_{m-1}) \right],$$

$$\Delta t_m = \frac{C'_{m-1}}{\cos\theta_{m-1}} \left[T(u_m) - T(v_{m-1}) \right]$$

et enfin

$$v_m = \frac{u_m \cos\theta_{m-1}}{\cos\theta_m}.$$

De toutes ces équations, la seule qui demande une démonstration est la première, qui donne la valeur de β_{m-1}. C'est la valeur de

$$\beta = \frac{F(v)}{F\left(\dfrac{v\cos\theta}{\cos\theta_{m-1}}\right)} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta_{m-1}} \frac{\delta_u}{\delta}$$

correspondant à la valeur moyenne

$$\frac{\theta_{m-1}+\theta_m}{2}=\theta_{m-1}-\frac{z}{2}$$

et avec la supposition que z soit suffisamment petit, pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures à la première.

Soient, en effet, pour le point où l'inclinaison est $\theta_{m-1}-\frac{z}{2}$: $v_{m-1}+\Delta v$ la vitesse, $v_{m-1}\cos\theta_{m-1}+\Delta(v\cos\theta)$ la vitesse horizontale, $y_{m-1}+\Delta y$ l'ordonnée.

Comme, à cause de la petitesse de α, l'on peut prendre

$$\delta_y=\delta\left[1-\alpha(y_m+\Delta y)\right]=\delta(1-\alpha y_m)(1-\alpha\Delta y),$$

nous aurons

$$\beta_{m-1}=\frac{F(v_{m-1}+\Delta v)}{F\left(v_{m-1}+\frac{\Delta(v\cos\theta)}{\cos\theta_{m-1}}\right)}\,\frac{\cos\left(\theta_{m-1}-\frac{z}{2}\right)}{\cos^2\theta_{m-1}}(1-\alpha y_m)(1-\alpha\Delta y).$$

Supprimons maintenant, pour simplifier, et pour un instant, l'indice $m-1$, et remarquons en outre que

$$\Delta(v\cos\theta)=\cos\theta\Delta v+v\sin\theta\frac{z}{2},$$

$$F\left(v+\frac{\Delta(v\cos\theta)}{\cos\theta}\right)=F(v)+F'(v)\frac{\Delta(v\cos\theta)}{\cos\theta}$$

$$F(v+\Delta v)=F(v)+F'(v)\left(\frac{\Delta(v\cos\theta)}{\cos\theta}-v\operatorname{tg}\theta\frac{z}{2}\right)$$

$$=F\left(v+\frac{\Delta v\cos\theta}{\cos\theta}\right)-vF'(v)\operatorname{tg}\theta\frac{z}{2}$$

$$\frac{F(v+\Delta v)}{F\left(v+\frac{\Delta(v\cos\theta)}{\cos\theta}\right)}=1-\frac{vF'(v)}{2F(v)}\operatorname{tg}\theta z.$$

Remarquons également que :

$$\cos\left(\theta-\frac{z}{2}\right)=\cos\theta\left(1+\operatorname{tg}\theta\frac{z}{2}\right)$$

et enfin [équation (5) du chapitre II] que

$$\Delta y = \frac{v^2}{2g} \operatorname{tg}\theta z.$$

Substituant, on obtient la valeur

$$\beta_{m-1} = \frac{1}{\cos\theta}(1 - \alpha y)\left(1 - \frac{vF'(v)\, z \operatorname{tg}\theta}{2F(v)}\right)\left(1 + \frac{z \operatorname{tg}\theta}{2}\right)\left(1 - \frac{\alpha v^2}{2g} \operatorname{tg}\theta z\right)$$

qui, en posant

$$\frac{1}{2}\left(\frac{vF'(v)}{F(v)} - 1 + \frac{\alpha v^2}{g}\right) = N$$

se réduit à

$$\beta_{m-1} = \frac{1}{\cos\theta}(1 - \alpha y)(1 - zN \operatorname{tg}\theta).$$

Il n'y a qu'à remettre l'indice $m-1$ pour avoir la première des équations citées.

Les valeurs de N, données par la table IV, ont été multipliées par $\frac{\pi}{180}$, pour pouvoir compter z en degrés. Elles sont établies entre les limites $v = 210$ et $v = 425$. En dehors de ces limites, on prendra

$$N = \frac{\pi}{360}\left(1 + \frac{\alpha v^2}{g}\right) = 0{,}00873 + (\bar{8},8525)\, v^2.$$

Le nombre entre parenthèses indique le logarithme du coefficient de v^2.

On peut obtenir une expression de β_{m-1} qui permet de partager la trajectoire en arcs d'une amplitude plus considérable, en imaginant que chaque arc de la trajectoire soit remplacé par un arc de parabole (axe vertical), ayant ses extrémités parallèles aux extrémités de l'arc de la trajectoire, et parcouru avec une vitesse horizontale moyenne entre les vitesses horizontales extrêmes. Cet arc parabolique diffère fort peu de l'arc véritable.

Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il s'agisse du premier arc dont les extrémités ont les inclinaisons φ et θ_1 (données), et où la vitesse, l'abscisse, l'ordonnée, le temps correspondant à θ_1, sont

$$v_1,\ x_1,\ y_1\ t_1.$$

Si l'on a égard aux formules (3), (8), (9), (10) du § 1 de ce chapitre, il est facile de voir qu'en posant :

$$C'_v = \frac{C}{\delta i \beta_v}, \quad C'_x = \frac{C}{\delta i \beta_x}, \quad C'_y = \frac{C}{\delta i \beta_y}, \quad C'_t = \frac{C}{\delta i \beta_t},$$

les valeurs de β_θ, β_x, β_y, β_t, correspondant au point où $\theta = \theta_1$, $x = x_1$, $y = y_1$, $t = t_1$ sont données par

$$\beta_{\theta_1} = \frac{\int_\varphi^{\theta_1} \beta d \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\varphi}$$

$$\beta_{x_1} = \frac{\int_\varphi^{x_1} \beta dx}{x_1}$$

$$\beta_{y_1} = \frac{\int_0^{x_1} \beta dx \int_\varphi^{\theta} \beta d \operatorname{tg}\theta}{\left(\frac{y_1}{x_1} - \operatorname{tg}\varphi\right) \int_0^{x_1} \beta dx}$$

$$\beta_{t_1} = \frac{\int_0^{t_1} \beta dt}{t_1}$$

expressions dans lesquelles

$$\beta = \frac{\mathrm{F}(v)}{\mathrm{F}\left(\frac{v \cos\theta}{\cos\varphi}\right)} \frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi} (1 - \alpha y).$$

Ces quatre valeurs sont, à la rigueur, différentes, mais au moyen de l'hypothèse indiquée plus haut, nous verrons qu'on peut les réduire à une seule.

Cette vitesse horizontale moyenne, avec laquelle nous supposons décrit l'arc de parabole compris entre φ et θ, nous la représenterons par $u_0 \cos\varphi$, et alors l'abscisse, l'ordonnée et le temps correspondant à une inclinaison quelconque θ seront

$$x = -\frac{u_0^2 \cos^2\varphi}{g} (\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi), \qquad y = -\frac{u_0^2 \cos^2\varphi}{2g} (\operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\varphi),$$

$$t = -\frac{u_0 \cos\varphi}{g} (\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi)$$

et les valeurs de x_1, y_1, t_1 (en tant qu'elles servent au calcul des β) seront données par ces mêmes équations, en y faisant $\theta = \theta_1$.

Ceci posé, nous avons :

$$\int_0^x \beta dx = -\frac{u_0^2 \cos^2\varphi}{g} \int_\varphi^\theta \beta d \operatorname{tg}\theta,$$

$$\int_0^x \beta dx \int_\varphi^\theta \beta d \operatorname{tg}\theta = -\frac{u_0^2 \cos^2\varphi}{2g} \left[\int_\varphi^\theta \beta d \operatorname{tg}\theta\right]^2$$

$$\int_0^\theta \beta dt = -\frac{u_0 \cos\varphi}{g} \int_\varphi^\theta \beta d \operatorname{tg}\theta.$$

Les substitutions effectuées, on trouve

$$\beta_{x_1}=\beta_{y_1}=\beta_{t_1}=\beta_{\theta_1}=\frac{\int_\varphi^{\theta_1}\beta\, d\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,\theta-\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Pour arriver à ce résultat, nous n'avons pas eu besoin de déterminer u_0. Mais pour calculer l'intégrale

$$\int_\varphi^{\theta_1}\beta\, d\,\mathrm{tg}\,\theta=\int_\varphi^{\theta}\frac{\mathrm{F}(v)}{\mathrm{F}\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)}\frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi}(1-\alpha y)\,d\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

nous devons remplacer v par $\frac{u_0\cos\varphi}{\cos\theta}$, et faire $y=-\frac{u_0^2\cos^2\varphi}{2g}(\mathrm{tg}^2\theta-\mathrm{tg}^2\varphi)$.

Or, si tout l'arc est parcouru d'après une loi de résistance proportionnelle à v^n, l'intégrale se réduit à

$$\cos^{n-2}\varphi\int_\varphi^{\theta_1}\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\left[1-\frac{\alpha u_0^2\cos^2\varphi}{2g}\left(1-\frac{\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\varphi}\right)\right],$$

et comme u_0^2 est multiplié par $\alpha=0,00008$, on pourra sans erreur sensible mettre pour u_0 la vitesse à l'origine de l'arc.

Il suffira donc de faire en sorte que les points où a lieu un changement dans la loi de résistance (points où $v=420$, 343, 282, 240) soient aussi des points de division de la trajectoire, ce qu'il est d'ailleurs bien facile d'obtenir.

Avec cette méthode, il sera donc possible de partager la trajectoire en arcs d'amplitude assez considérable, et les formules sont les mêmes que celles indiquées dans la première méthode, sauf la première, qui doit être remplacée par

$$\beta_{m-1}=\frac{\cos^2\theta_{m-1}}{\mathrm{tg}\,\theta_{m-1}-\mathrm{tg}\,\theta_m}\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m}\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\left[1-\alpha v^2_{m-1}\sin^2\theta_{m-1}\left(1-\frac{\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta_{m-1}}\right)\right]$$

Quant à la valeur de n, elle dépendra des valeurs de v_{m-1} et de v_m.

Pour v_{m-1} et v_m	supérieures à 420,	$n=2$
—	comprises entre 420 et 343,	$n=3$
—	comprises entre 343 et 282,	$n=6$
—	comprises entre 282 et 240,	$n=3$
—	inférieures à 240,	$n=2$

Mais il serait nécessaire d'avoir des tables pour $n=2$, 3 et 6.

§ 4.

Calcul de la table de balistique.

La plupart des tables balistiques actuellement en usage ont été calculées dans l'hypothèse que F (u) est susceptible de prendre diverses formes suivant les limites entre lesquelles varie la vitesse. Nous allons faire connaître la façon d'opérer dans ce cas, en supposant que F (u) affecte l'une quelconque des formes indiquées page 5, formes qui du reste ont servi à l'établissement de la table V. Dans le cas où l'on considérerait une autre série de formes, on opérerait de même.

I. — *Vitesses supérieures à 420 m.*

$$F(v) = qv^2, \qquad q = 0{,}0^3 33933,$$

$$D(u) = -\int \frac{du}{qu} = -\frac{1}{q}(\log u + Q),$$

$$J(u) = -\frac{2g}{q}\int \frac{du}{u^3} = \frac{g}{q}\left(\frac{1}{u^2} + Q_1\right),$$

$$A(u) = -\frac{g}{q^2}\int \left(\frac{1}{u^2} + Q_1\right)\frac{du}{u} = \frac{g}{q^2}\left(\frac{1}{2u^2} + Q_1 \log u + Q_2\right),$$

$$T(u) = -\frac{1}{q}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{u} + Q_3\right).$$

Les quantités Q, Q_1, Q_2, Q_3 désignent des constantes arbitraires que nous déterminerons en temps opportun.

II. — *Vitesses comprises entre 420 et 343 m.*

$$F(v) = cv^3, \qquad c = 0{,}0^6 808,$$

$$D(u) = -\frac{1}{c}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{cu} + C,$$

$$J(u) = -\frac{2g}{c}\int \frac{du}{u^4} = \frac{2g}{3c}\left(\frac{1}{u^3} + C_1\right),$$

$$A(u) = -\frac{2g}{3c^2}\int \left(\frac{1}{u^3} + C_1\right)\frac{du}{u^2} = \frac{2g}{3c^2}\left(\frac{1}{4u^4} + \frac{C_1}{u} + C_2\right),$$

$$T(u) = -\frac{1}{c}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2cu^2} + C_3.$$

C, C_1, C_2, C_3 étant des constantes à déterminer.

III. — *Vitesses comprises entre 343 m et 282 m.*

$$F(v) = kv^6, \qquad k = 0{,}0^{13}2,$$

$$D(u) = -\frac{1}{k}\int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{4ku^4} + K,$$

$$J(u) = -\frac{2g}{k}\int \frac{du}{u^7} = \frac{g}{3k}\left(\frac{1}{u^6} + K_1\right),$$

$$A(u) = -\frac{g}{3k^2}\int \left(\frac{1}{u^6} + K_1\right)\frac{du}{u^5} = \frac{g}{3k^2}\left(\frac{1}{10u^{10}} + \frac{K_1}{4u^4} + K_2\right),$$

$$T(u) = -\frac{1}{k}\int \frac{du}{u^6} = \frac{1}{5ku^5} + K_3.$$

K, K_1, K_2, K_3 constantes à déterminer.

IV. — *Vitesses comprises entre 282 m et 240 m.*

Formules identiques au cas de la vitesse comprise entre 420 et 343, en remplaçant c par $c' = 0{,}0^{6}449$. Nous désignerons les constantes arbitraires par C', C'_1, C'_2, C'_3.

V. — *Valeurs inférieures à 240 m.*

Formules identiques à celles pour lesquelles la vitesse est supérieure à 420 m, en remplaçant q par $q' = 0{,}0^{7}108$. Les constantes sont Q', Q'_1, Q'_2, Q'_3.

VI. — *Détermination des constantes arbitraires.*

Les constantes Q, Q_1, Q_2, Q_3 sont tout à fait arbitraires. On peut donc les déterminer de façon que les quatre fonctions $D(u)$, $J(u)$, $A(u)$, $T(u)$ prennent des valeurs déterminées pour une valeur déterminée de u [1].

Les autres constantes doivent être déterminées de façon que les quatre fonctions ne présentent pas de discontinuité, lorsque la vitesse u passe par les valeurs

$$u = 420 \quad , \quad u = 343 \quad , \quad u = 282 \quad , \quad u = 240$$

---

[1] La table V dans la première édition commençait par $u = 700$, et on avait déterminé Q, Q_2, Q_3, de façon que pour $u = 700$, on eût $D = 0$, $A = 0$, $T = 0$, et on avait posé $Q_1 = 0$. Dans le prolongement de la table jusqu'à $u = 983$, pour éviter des nombres négatifs, on a augmenté D de 1000, A de 100 et T de 1,00.

D'après cela, pour $u = 420$, on doit avoir :

$$C + \frac{1}{cu} = -\frac{1}{q}(\log u + Q),$$

$$\frac{2}{3c}\left(\frac{1}{u^3} + C_1\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{u^2} + Q_1\right),$$

$$\frac{2}{3c^2}\left[\frac{1}{4u^4} + \frac{C_1}{u} + C_2\right] = \frac{1}{q^2}\left[Q_2 + Q_1 \log u + \frac{1}{2u^2}\right],$$

$$C_3 + \frac{1}{2cu^2} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{u} + Q_3\right).$$

On détermine ainsi C, C_1, C_2, C_3.

Pour $u = 343$, on a :

$$K + \frac{1}{4ku^4} = C + \frac{1}{cu},$$

$$\frac{1}{k}\left(K_1 + \frac{1}{u^6}\right) = \frac{2}{c}\left(C_1 + \frac{1}{u^3}\right),$$

$$\frac{1}{k^2}\left(K_2 + \frac{K_1}{4u^4} + \frac{1}{10u^{10}}\right) = \frac{2}{c^2}\left(C_2 + \frac{C_1}{u} + \frac{1}{4u^4}\right),$$

$$K_3 + \frac{1}{5ku^5} = C_3 + \frac{1}{2cu^2}.$$

Ces quatre équations donnent K, K_1, K_2, K_3.

Pour $u = 282$, on se sert des expressions trouvées pour $u = 343$, en remplaçant c par c', et C, C_1, C_2, C_3 par C′, C'_1, C'_2, C'_3 qui sont ainsi déterminées.

Pour $u = 240$, on se sert des mêmes équations que pour $u = 420$, en mettant l'indice prime à c et q, et aux autres constantes. Q′, Q'_1, Q'_2, Q'_3 sont ainsi déterminées.

Les valeurs des constantes ainsi connues, en donnant à u des valeurs décroissantes, les formules précédentes servent à constituer une table des quatre fonctions D, J, A, T, ayant u pour argument. Or u diffère très peu de la vitesse, et comme l'espace que doit parcourir un projectile pour perdre une fraction de sa vitesse, 1 m par exemple, est d'autant plus grand que cette vitesse est plus petite, il en résulte que, lorsque la différence entre les valeurs de u est constante, les valeurs correspondantes de la fonction D (u) augmentent rapidement ; il en est de même pour les autres fonctions. D'autre part, quand on doit construire une table de tir, l'argument naturel est la distance, et non la vitesse restante. Il est donc plus avantageux de construire une table balistique ayant la fonction D pour argument, c'est-à-dire donnant dans la colonne D des différences constantes. C'est dans cet esprit qu'a été établie la table V. La plus grande partie de cette table (de $u = 700$ à $u = 100$) est due au lieutenant Berardinelli qui l'a

déduite d'une autre ayant pour argument u (¹). Le lieutenant Mola l'a récemment prolongée depuis $u = 700$ jusqu'à $u = 983^m$ et de $u = 100^m$ à $u = 97^m,1$.

§ 5.

Pour calculer une table balistique ayant pour argument D (u), il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une autre table ayant pour argument u, ni de tronçonner F (v) en plusieurs formules. Il n'est pas même nécessaire de donner à F (v) une forme algébrique quelconque, il suffit de disposer d'une table numérique donnant les valeurs de F (v) correspondant aux valeurs de v.

Mais avant de faire connaître la méthode à suivre, dans cette construction, il est utile d'exposer certaines formules d'interpolation.

1° *Interpolation linéaire.* — Connaissant deux valeurs d'une fonction E, c'est-à-dire E (z) et E ($z+h$) correspondant à z et à ($z+h$), nous voulons obtenir les valeurs de E correspondant à $z+\delta$ et $z+2\delta$, comprises entre z et $z+h$.

En posant

$$E(z+h) - E(z) = \Delta,$$

l'interpolation linéaire donne

$$E(z+\delta) = E(z) + \Delta\frac{\delta}{h},$$
$$E(z+2\delta) = E(z+\delta) + \Delta\frac{h}{\delta}.$$

Cette interpolation que l'on emploie généralement est d'autant plus exacte que Δ est plus petit.

2° *Interpolation quadratique.* — Connaissant trois valeurs de la variable E, savoir E (z), E ($z+h$), E ($z+2h$), on se propose de trouver la valeur de E ($z+\delta$), $z+\delta$ étant une valeur intermédiaire entre z et $z+h$.

En posant

$$E(z+2h) - E(z+h) = \Delta', \qquad \Delta' - \Delta = \Delta_2,$$

l'interpolation quadratique a pour formule

$$E(z+\delta) = E(z) + \left(\Delta - \frac{\Delta_2}{2}\right)\frac{\delta}{h} + \frac{\Delta_2}{2}\frac{\delta^2}{h^2}.$$

(¹) Siacci, *Cours de balistique*, 1re édition, volume III, pages 56-61.

Ce genre d'interpolation est souvent d'une application fatigante, aussi, dans les cas pratiques, convient-il de borner cette interpolation à partager en deux l'intervalle h s'il est trop grand, et de recourir ensuite à l'interpolation linéaire.

Pour réduire l'intervalle h à $\frac{h}{2}$, il faut calculer

$$E\left(z+\frac{h}{2}\right).$$

La formule précédente donne alors :

$$\begin{aligned} E\left(z+\frac{h}{2}\right) &= E(z)+\frac{1}{2}\left(\Delta-\frac{\Delta_2}{2}\right)+\frac{\Delta_2}{8}, \\ &= E(z)+\frac{\Delta}{2}-\frac{\Delta_2}{8}, \\ &= \frac{3E(z)+6E(z+h)-E(z+2h)}{8}. \end{aligned}$$

3° *Interpolation cubique.* — Nous n'emploierons l'interpolation cubique que pour partager en deux les intervalles, lorsque l'on connaît les valeurs des dérivées $E'(z)$ et $E'(z+h)$, outre celles de $E(z)$ et de $E(z+h)$. La formule à employer dans ce cas est la suivante :

$$E\left(z+\frac{h}{2}\right)=\frac{E(z)+E(z+h)}{2}-\frac{h}{8}\left[E'(z+h)-E'(z)\right].$$

En employant les méthodes précédentes de calcul, la construction de la table balistique se fera de la façon suivante :

(*a*) Calcul des $z = D(u)$ avec l'argument u.
(*b*) Calcul des u avec l'argument $D(u) = z$.
(*c*) Calcul de $J(u)$, $T(u)$, $A(u)$ avec argument z.

(*a*) *Calcul de* z $= D(u)$ *ayant pour argument* u. — Supposons que l'on veuille construire une table balistique de $u = 1000$ m à $u = 88$ m et que l'on ait à sa disposition une table des valeurs de $F(u)$, donnant par conséquent celles de la fonction résistante pour des valeurs de u variant en progression arithmétique

de 48^m en 48^m de 1000^m à $1000 - 12 \times 48 = 424$,
de 24^m en 24^m de 424^m à $424 - 8 \times 24 = 232$,
de 12^m en 12^m de 232^m à $232 - 12 \times 12 = 88$.

On établira d'abord au moyen de ces 33 valeurs de $F(u)$ un tableau

contenant celles de $\frac{u}{F(u)}$. Ces valeurs serviront à déterminer les valeurs successives de $D(u)$ au moyen de la formule de Simpson

$$D(u-2m) = D(u) + \frac{m}{3}\left[\frac{u}{F(u)} + \frac{4(u-m)}{F(u-m)} + \frac{u-2m}{F(u-2m)}\right],$$

équation dans laquelle on posera

$$\begin{aligned} m &= 48, \text{ de } u = 1000 \text{ à } u = 424, \\ m &= 24, \text{ de } u = 424 \text{ à } u = 232, \\ m &= 12, \text{ de } u = 232 \text{ à } u = 88, \end{aligned}$$

en même temps que $D(1000) = 0$.

On obtient ainsi 17 valeurs de $D(u)$ correspondant à 16 intervalles; 6 de 96^m, 4 de 48^m, 6 de 24^m.

On partagera chacun de ces intervalles en deux par une interpolation cubique, et les nouveaux intervalles seront encore une fois partagés par la même interpolation.

Rappelons maintenant que dans ce cas, comme

$$D'(u) = -\frac{u}{F(u)},$$

la première opération de partage donnera

$$D(u-m) = \frac{D(u) + D(u-2m)}{2} - \frac{2m}{8}\left[\frac{u-2m}{F(u-2m)} - \frac{u}{F(u)}\right]$$

et la seconde

$$D\left(u-\frac{m}{2}\right) = \frac{D(u) + D(u-m)}{2} - \frac{m}{8}\left[\frac{(u-m)}{F(u-m)} - \frac{u}{F(u)}\right].$$

Les intervalles sont ainsi au nombre de 64; 24 de 24^m, 16 de 12^m et 24 de 6^m. On pourrait encore partager les intervalles, en employant l'interpolation quadratique, mais la chose n'est pas nécessaire.

Observation. — Les expériences ne donnent pas en général les valeurs immédiates de $F(u)$, elles fournissent plutôt celles de la fonction $\frac{F(u)}{u^2} = K(u)$ (Hutton, Didion, Mayevski, etc.) ou encore celles de $\frac{F(u)}{u^3} = B(u)$ (Bashforth), ou de $\frac{F(u)}{u} = H(u)$ [Hojel]. Dans ces divers cas, on remplacera la fonction $\frac{u}{F(u)}$ par

$$\frac{1}{uK(u)}, \qquad \frac{1}{u^2 B(u)}, \qquad \frac{1}{H(u)}.$$

(*b*) *Calcul des valeurs de* u *avec l'argument* $D(u)=z$. En prenant 10 pour différence constante de l'argument $z=D(u)$, on peut employer l'interpolation linéaire. Ainsi, dans le premier intervalle de 1000 m à 976 m les accroissements de 10 dans la valeur de $D(u)$ fourniront pour u des décroissements représentés par

$$\frac{10(1000-976)}{D(976)-D(1000)}$$

et ainsi de suite pour les autres intervalles.

(*c*) *Calcul de* $J(u)$, $T(u)$, $A(u)$ *avec l'argument* z.

En appelant $\bar{J}(z)$, $\bar{T}(z)$, $\bar{A}(z)$ les valeurs que prennent les fonctions $J(u)$, $T(u)$, $A(u)$ lorsqu'on remplace u par sa valeur en fonction de z comme on a

$$J(u)=-\int\frac{2g\,du}{uF(u)},$$

il en résulte pour $\bar{J}(z)$ la valeur

$$\bar{J}(z)=\int\frac{2g}{u^2}\,dz.$$

Nous pouvons donc établir d'abord une table des quantités $\frac{2g}{u^2}$ correspondant aux valeurs de $z=D(u)$ de 200 en 200. Soient

$$u, \qquad u_2, \qquad u_4,$$

les trois valeurs de u correspondant à z, $z+200$, $z+400$.

La formule de Simpson donne

$$\bar{J}(z+400)=\bar{J}(z)+\frac{400}{6}\left[\frac{2g}{u^2}+\frac{8g}{u_2{}^2}+\frac{2g}{u_4{}^2}\right].$$

Nous obtenons ainsi les valeurs de $\bar{J}(z)$ disposés pour des intervalles de 400 en z, et nous pouvons poser $J(1000)=\bar{J}(o)=0$.

Nous partagerons deux fois ces intervalles en deux au moyen d'une interpolation cubique, et nous obtiendrons :

$$\bar{J}(z+200)=\frac{\bar{J}(z)+\bar{J}(z+400)}{2}+\frac{400}{8}\left[\frac{2g}{u^2{}_4}-\frac{2g}{u^2}\right],$$

$$\bar{J}(z+100)=\frac{\bar{J}(z)+\bar{J}(z+200)}{2}+\frac{200}{8}\left[\frac{2g}{u_2{}^2}-\frac{2g}{u^2}\right].$$

Les intervalles sont ainsi réduits à la distance de 100 m. On peut alors

appliquer l'interpolation linéaire. Par conséquent entre z et $z + 100$, pour chaque augmentation de 10 en z, l'augmentation de $\bar{J}(z)$ sera

$$\frac{\bar{J}(z+100) - \bar{J}(z)}{10}.$$

Quant aux valeurs de A (u), comme $\bar{A}(z) = \int^{z} \bar{J}(z)\,dz$, en ayant recours à la formule de Simpson, on obtiendra

$$\bar{A}(z+60) = \bar{A}(z) + \frac{60}{6}\left[\bar{J}(z) + 4\bar{J}(z+30) + \bar{J}(z+60)\right]$$

et l'on peut alors poser $\bar{A}(1000) = 0$. Connaissant les valeurs de $\bar{A}(z)$, pour des valeurs croissantes de z de 60 en 60, une interpolation linéaire fera connaître les valeurs intermédiaires.

Relativement au calcul de $\bar{T}(z)$, on opérera d'une façon absolument identique à celle que nous avons indiquée pour J (z), en remarquant que la valeur de $\bar{T}(z)$ étant

$$\bar{T}(z) = \int^{z} \frac{dz}{u},$$

il suffit de remplacer $\frac{2g}{u^2}$ par $\frac{1}{u}$.

Onze tables balistiques, dont quelques-unes sont encore en usage, ont été calculées précédemment ayant toutes pour argument u, mais basées sur diverses formules de résistance :

1. Table originale de *Siacci*, basée sur les formules (a), (b), (c) et sur la troisième formule (1) de l'Introduction (*Novo metodo per calcollere i problemi del tiro. Giornale d'Artiglieria e Genio*, p. II, 1880).

2. Table *Mitcham*, officier des United-States, basée sur les mêmes formules, mais en employant les unités anglaises (*Ordnance*, notes, 1881, n° 152).

3. Table *Ingalls*, officier des United-States, basée également sur les mêmes formules, unités anglaises, coefficient balistique différent (*Course of Artillery. Ballistics*, 1883).

4. Table *Ingalls*, pour les projectiles sphériques, basée sur les formules (2), page 8 (*Course of artillery. Ballistics*, 1883).

5. Table *Krupp*, basée sur les formules (3) de la page 10 (*Ballistische Formeln von Mayevski, nach Siacci*. Essen, 1883).

6. Table *Hojel*, de l'artillerie hollandaise, basée sur les formules (4) de la page 10 (*Bijdrage tot de Ballistick van het Getrokken geschut*. Amsterdam, 1883).

7. Table *Pouchelon*, de l'artillerie française, basée sur les formules (1) de la page 10, unités décimales, plus exactes que les premières tables de Siacci (*Revue d'artillerie*, 1885).

8. Table *Duran y Loriga*, de l'artillerie espagnole, basée sur les formules (a), (b), (c) de l'Introduction et sur les deux suivantes : $K = 0{,}0^4 493\,v$, $K = 0{,}0^3 12$ (*Tablas balisticas*. Coruña, 1886).

9. Table *Hadcock*, de l'artillerie anglaise, basée sur les expériences de Bashforth, 1878-1880 (*Siacci's Method of solving traiectories and problems in ballistics*. Wolwich, 1887).

10. Table *Madsen*, de l'artillerie danoise, basée sur les expériences de Krupp. Copenhague, 1888.

11. Nouvelle table *Ingalls*, basée sur les formules (5) de la page 11 (*Ballistic*. Fort Monroe, Virginia, 1889).

12. Nouvelle table Krupp, basée sur les expériences de son polygone (*Die Berechnung der Schusstafeln*. Essen, 1890). Cette table diffère des autres en ce qu'elle donne la fonction $Y(u) = -\int D(u)\, d.\, J(u)$, au lieu de $A(u) = \int J(u)\, d.\, D(u)$. Il est évident que les deux fonctions sont liées par la relation $A(u) = J(u)\, D(u) + Y(u)$. Cette substitution ne fait que compliquer les formules de tir.

Remarque. — Les fonctions

$$D(u) - D(V), \qquad J(u) - J(V), \qquad T(u) - T(V), \qquad \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V),$$
$$\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(u)$$

dépendent des seules quantités u, V, et peuvent par conséquent être représentées au moyen de tables à double entrée ayant pour arguments V et u ou bien V et $\frac{X}{C'}$, $\frac{X}{C'}$ étant égal à $D(u) - D(V)$. Ces tables qu'on extrait très facilement de notre table balistique, et dont on trouvera un essai dans le *Giornale d'Artiglieria e Genio*, 1888, ont quelque avantage dans certains problèmes inverses, mais ont l'inconvénient bien autrement grave de nécessiter deux interpolations. On peut, du reste, voir dans le chapitre V, comment on résout aussi les problèmes inverses au moyen de la Table balistique, sans recourir à d'autres tables dérivées de celle-ci.

CHAPITRE V

PROBLÈMES DE TIR.

I. *Étant données la vitesse initiale et la portée, trouver l'angle de projection, l'angle de chute, la durée et la vitesse de chute.*

Formules :

(1) $$C' = \frac{C}{\delta i \beta},$$

(2) $$D(u) = D(V) + \frac{X}{C'},$$

(3) $$\sin 2\varphi = C'\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right],$$

(4) $$\sin 2\omega = C'\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right],$$

ou plus exactement

(4)' $$\operatorname{tg}\omega = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right],$$

(5) $$T = \frac{C'}{\cos\varphi}\left[T(u) - T(V)\right],$$

(6) $$U = \frac{u\cos\varphi}{\cos\omega}.$$

On prend d'abord $\beta = 1$. Au moyen de la table V, on trouve D (V), A (V), J (V), T (V), c'est-à-dire les valeurs de D, A, J, T qui correspondent à $u = V$; on calcule D (u) au moyen de la formule (1), et la même table V fournit les valeurs correspondantes de A (u), J (u), T (u) et u. Il ne reste donc plus qu'à substituer. Si, cependant, après avoir effectué les substitutions dans l'équation (3), on trouve une valeur de φ supérieure à 20°, avant de poursuivre les calculs, il faut chercher la valeur de β correspondant à l'angle trouvé φ, et à la portée X dans la table VI. En prenant cette valeur de β, on recommence alors le calcul.

Si en posant $\beta = 1$, on trouve $\sin 2\varphi > 1$, avant de regarder le problème comme impossible, on effectue de nouveau les calculs,

en prenant dans la table VI pour β la valeur correspondant à la distance X et à $\varphi = 45°$.

II. *Étant donnés la vitesse initiale et l'angle de projection, trouver l'ordonnée, l'inclinaison, le temps, la vitesse correspondant à une abscisse quelconque* x.

Formules :

$$C' = \frac{C}{\delta i \beta}, \qquad D(u) = D(V) + \frac{x}{C'},$$

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{C'x}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right],$$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - J(V)\right],$$

$$t = \frac{C'}{\cos\varphi}\left[T(u) - T(V)\right], \qquad v = \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

On opère comme pour le problème précédent. Si la portée est connue, l'on prend dans la table VI la valeur de β correspondant à cette portée, et à l'angle de projection donné. Si la portée n'est pas connue, on la calculera (voir Problème V).

III. *Étant donnés la vitesse initiale et l'angle de projection, trouver l'abscisse et l'ordonnée du sommet.*

Formules :

$$J(u_0) = J(V) + \frac{\sin 2\varphi}{C'},$$

$$x_0 = C'\left[D(u_0) - D(V)\right].$$

Si la portée n'est pas connue, on cherche une valeur approchée de x_0, en faisant $\beta = 1$, puis une valeur plus exacte, en prenant dans la table VI une valeur de β correspondant à φ et au double de cette valeur approchée de x_0. Ayant trouvé l'abscisse du sommet, le problème II donne l'ordonnée.

IV. *Étant donnés la vitesse initiale et l'angle de projection, trouver l'abscisse* x_1 *et l'ordonnée* y_1 *du point sur la branche descendante où l'inclinaison est égale à* $-\varphi$.

Formules :

$$J(u_1) = J(V) + \frac{2\sin 2\varphi}{C'},$$

$$x_1 = C'\left[D(u_1) - D(V)\right].$$

Procéder de la même façon que dans le problème III, excepté que la valeur de β dans la seconde approximation, doit être prise comme correspondant à φ et à la première valeur approchée de x_1.

V. *Étant donnés la vitesse initiale et l'angle de projection, déterminer la portée* V φ et X.

Formules : (1), (2) et (3) du problème I.

On prend pour la portée une valeur quelconque X′ (une bonne règle est de prendre comme première approximation $X' = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{2g}$, c'est-à-dire la moitié de la portée dans le vide). Avec cette valeur et celle de β correspondant à φ et à X′, on calcule C′, D (u) et le second membre de (3). Soit k' sa valeur. On prend ensuite $X'' = X' \frac{\sin 2\varphi}{k'}$; avec cette valeur, et celle de β correspondant à φ et à X″, on refait le même calcul, et soit k'' le second membre de (3). On aura très approximativement (quelles que soient les valeurs de k' et k'')

$$X = X' + (X' - X'')\frac{\sin 2\varphi - k'}{k' - k''}.$$

Si l'on connaît x_0 et x_1, on a aussi, approximativement,

$$X = x_0 + \frac{x_1}{2}.$$

VI. *Étant donnés la portée et l'angle de projection, trouver la vitesse initiale.*

Formules : (1), (2) et (3) du problème I.

On prend β correspondant à φ et à X, et pour la vitesse cherchée une valeur quelconque V′ (une bonne règle est de prendre comme première approximation $V' = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}}$, c'est-à-dire une fois et demie la vitesse dans le vide). Avec ces valeurs, on calcule D (u), et le second membre de (3). Soit k' sa valeur. Suivant que k' est plus grand ou plus petit que $\sin 2\varphi$, on prend pour la vitesse une seconde valeur V″ plus grande ou plus petite que V′, on refait le même calcul, et soit k'' la valeur donnée par le second nombre de (3).

On aura approximativement (quelles que soient les valeurs de k' et k'') :

$$D(V) = D(V') + [D(V') - D(V'')] \frac{\sin 2\varphi - k'}{k' - k''}.$$

Connaissant D (V), la table V donnera la vitesse V [1].

VII. *Étant donnés la portée et l'angle de chute, trouver la vitesse initiale.*

Formules : (1), (2), (4) du problème I.

On prend la valeur de β correspondant à X et à un angle de projection approchée $\left(\text{par exemple } \frac{3}{4}\omega\right)$ et pour tout le reste on opère comme il a été dit au problème VI, en considérant la formnle (8) au lieu de (3) et mettant partout $\sin 2\omega$ à la place de $\sin 2\varphi$.

VIII. *Dans un tir d'expérience, on a mesuré la densité de l'air, la vitesse initiale, l'angle de projection et la portée. On connaît le coefficient balistique* C *et on se propose de trouver* $i\beta$ [2].

---

[1] Après le premier essai, on peut avoir une vitesse initiale approximative au moyen de la formule

$$V = \frac{V'}{\sqrt{1 + \frac{V'^2}{gX}(\sin 2\varphi - k')}}$$

[2] Nous avons fait une application de ce problème à un certain nombre de projectiles de la marine française et de la guerre. Nous nous sommes servis pour cela des tables de tir existantes. La méthode indiquée dans la seconde édition italienne diffère de celle donnée dans l'édition française. Voici en quoi elle consiste :

Formules

$$A(u) = A(V) + \frac{X}{C'}\left[J(V) + \frac{\sin 2\varphi}{C'}\right],$$

$$\frac{D(u) - D(V)}{X} = \frac{1}{C'}, \qquad i\beta = \frac{C}{C'\delta}.$$

Il s'agit de trouver une valeur de u et une valeur de C' qui satisfassent aux deux premières équations. En opérant par approximations successives, on commence par remplacer dans la première équation $\frac{X}{C'}$ par $\frac{C}{\delta}$, par exemple, on calcule alors A (u), et on en déduit la valeur correspondante de D (u) donnée par la table balistique. Cette valeur, introduite dans la deuxième équation, donne une valeur de $\frac{1}{C'}$ plus approchée que la première. En prenant cette nouvelle valeur, on refait les mêmes opérations, jusqu'à ce que la seconde équation donne pour $\frac{1}{C'}$ la même valeur que celle qui satisfait à la première. La troisième équation donne alors $i\beta$. Cette méthode très longue et très laborieuse, a été remplacée sur nos observations et a amené l'auteur à la méthode actuelle, que nous avons employée pour déterminer les valeurs des coefficients de forme des projectiles donnés dans le tableau ci-dessous. Nous

Formules : (1), (2) et (3) du problème I.

Soit k la valeur donnée de l'angle de projection ; on prend pour $i\beta$ une valeur z' approchée, par exemple $z' = 1$, et soit k' la valeur de φ donnée par l'équation (3) ; suivant que k' est plus grand ou plus petit que k, on prend pour $i\beta$ une autre valeur z'' plus petite ou

avons pris d'une façon générale pour X, la valeur 5 000 m, qui correspond dans toutes les tables à un angle φ toujours inférieur à 15°, nous avons en outre supposé $\delta = 1$. Les resultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant.

PROJECTILES.	a[1].	p.	$\frac{p}{1000a^2}$.	V.	X.	ANGLES des tables.	ANGLES de relèvement.	ANGLES de projection.	$\delta i\beta$.	ANGLE de projection calculé.
Coefficients balistiques des projectiles de la marine française.										
65mm Obus ordinaire. .	61	2,7	0,6591	346	3 000	10°44'	0'	10°44'	0,718	10°44'
90mm — — . .	88,5	8	1,0214	455	4 000	10°37'	20'	10°57'	0,919	10°57'
10c — allongé. . .	98,9	30	1,4318	510	5 000	10°23'	14'	10°37'	0,834	10°37'
14c — — . . .	136,6	45	1,6077	590	5 000	7°19'	1'	7°20'	0,753	7°20'
16c Boulet de rupture .	162,3	120	1,7083	600	3 000	3°32'	4'	3°36'	0,980	3°36'
24c Obus ordinaire. . .	237,4	120	2,1292	474	5 000	10°27'	3'	10°30'	0,947	10°30'
27c Obus ordinaire . .	271,8	180	2,4365	495	5 000	8°54'	3'	8°57'	0,890	8°57'
27c Boulet de rupture.	271,8	216	2,9238	490	5 000	8°30'	3'	8°33'	0,900	8°33'
32c Obus ordinaire . .	317,0	286,5	2,852	486	5 000	8°55'	6'	9° 1'	0,981	9° 1'
32c Boulet de rupture.	317,0	345	3,4332	480	5 000	8°19'	8'	8°27'	0,906	8°27'
34c Obus ordinaire . .	337,0	350	3,082	492	5 000	8°28'	4'	8°32'	0,955	8°32'
34c Boulet de rupture.	337,0	420	3,6983	486	3 500	5°16'	4'	8°20'	1,067	8°20'
42c Boulet de rupture .	417,0	780	4,4856	530	5 000	6°14'	—10'	6° 4'	0,690	6° 4'
Coefficients balistiques des projectiles de la guerre.										
80mm de campagne . .	78,6	5,6	0,9064	490	4 000	9°15'	20'	9°35'	0,756	9°35'
90mm — . .	83,5	7,95	1,0152	455	4 000	9°45'	18'	10° 3'	0,752	10° 3'
95mm — . .	93,5	10,95	1,2525	443	4 000	10°35'	17'	10°52'	1,021	10°52'
120mm de siège	118,0	18,5	1,3286	516	4 000	7°16'	16'	7°32'	0,808	7°32'
155mm de siège	153,1	40	1,7064	470	5 000	10°23'	15'	10°38'	0,763	10°38'
19c mod. 1875-1878. Obus ordinaire	191,5	75,5	2,0588	440	5 000	13°19'	25'	13°44'	1,309	13°44'

(1) La valeur de a contenue dans cette colonne est exprimée en millimètres, tandis que dans la valeur de $\frac{p}{1000a^2}$, elle est exprimée en mètres.

Comme vérification de l'exactitude des valeurs de $i\beta$, nous en avons fait une application complète à l'obus de rupture de 27c tirant dans le canon de 27 de la marine, modèle 1870 M, et jusqu'à 20°, nous avons, pour des portées variant de 200m en 200m jusqu'à 8 700m, obtenu des valeurs de φ qui n'ont jamais différé des angles donnés par les tables de plus de 2', soit en plus, soit en moins. On peut donc considérer l'application des méthodes de l'auteur comme parfaite. Nous ferons remarquer qu'il suffit de calculer C avec trois chiffres décimaux et $\delta i\beta$ avec trois, pour obtenir des angles calculés égaux aux angles de tir des tables augmentés des angles de relèvement. (*Note du traducteur.*)

plus grande que z'. Soit k'' la nouvelle valeur obtenue pour φ. Si k est compris entre k' et k'', on a approximativement

$$i\beta = z' + (z' - z'')\frac{k - k'}{k' - k''}.$$

IX. *Mêmes données que dans le problème précédent. On demande de calculer l'angle de projection pour obtenir une portée X, avec la densité moyenne 1 et la vitesse initiale* V'.

On détermine $i\beta$ comme dans le problème VIII, et on pose $C' = \frac{C}{i\beta}$. L'angle de projection cherché est alors donné par les formules (2) et (3) du problème I, en y remplaçant V par V'.

X. *Pour atteindre un point* (x, y), *l'angle de projection est* φ, *et la valeur numérique de l'inclinaison de la trajectoire en ce point est* θ', *déterminer :* 1° *l'angle de projection* φ_0, *qui est nécessaire pour atteindre un point situé à la distance* x *sur l'horizon de la pièce,* 2° *l'angle de chute* ω_0.

Formules

(1) $$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{y}{x},$$

(2) $$\sin 2\varphi_0 = \frac{2\sin(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi}{\cos\varepsilon},$$

(3) $$\operatorname{tg}\omega_0 = (\operatorname{tg}\theta' + \operatorname{tg}\varepsilon)\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi_0}.$$

Si on a $\varphi < 10°$, on peut prendre $\varphi_0 = \varphi - \varepsilon$ (voir § 2).

§ 2

Théorèmes sur le tir tendu.

Le tir est plus ou moins *tendu* suivant que l'angle de projection est plus ou moins petit. Si l'angle de projection est assez petit, on peut supposer $\beta = 1$, et c'est dans cette hypothèse, à laquelle nous joignons quelquefois celle de $\cos\varphi = 1$, que nous avons établi les propositions suivantes. Ce sont des *théorèmes limites,* par conséquent approchés dans les cas de la pratique, mais approchés d'autant plus que les angles de projection sont plus petits.

I. *Si deux projectiles sont lancés avec la même vitesse et touchent le but avec la même vitesse, les espaces parcourus, les durées du trajet et les angles de projection sont proportionnels aux coefficients balistiques.*

On a en effet pour l'un des projectiles

$$\frac{x}{C'} = D(u) - D(V)$$

et comme les vitesses sont égales, et très approximativement les pseudo-vitesses u, on a pour le second projectile

$$\frac{x_1}{C'_1} = D(u) - D(V),$$

par conséquent :

$$\frac{x}{C'} = \frac{x_1}{C_1'}$$

ce qui démontre le théorème.

Pour les temps et les angles de projection, on procède de la même façon, en remarquant dans ces cas, que le rapport $\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}$ est très voisin de l'unité.

II. *La pseudo-vitesse* (et approximativement la vitesse) *est indépendante de la hauteur du point d'arrivée.* Ce théorème est une conséquence immédiate de l'équation qui lie x à $D(u)$, laquelle est indépendante de l'ordonnée.

III. *L'angle d'arrivée est approximativement indépendant de la hauteur du point d'arrivée.*

Soient φ_b et φ_b' les angles de projection nécessaires pour toucher deux points sur la branche descendante à la même distance a, et dont les hauteurs sont b et b'; soient θ_b et θ_b' les valeurs numériques des inclinaisons des deux trajectoires aux points d'arrivée. Nous avons pour le premier point

$$\frac{b}{a} - \operatorname{tg}\varphi_b = -\frac{C'}{2\cos^2\varphi_b}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right],$$

$$-\operatorname{tg}\theta_b - \operatorname{tg}\varphi_b = -\frac{C'}{2\cos^2\varphi_b}\left[J(u) - J(V)\right].$$

Retranchons les équations membre à membre, et désignons par ε_b l'angle de site du premier point, il vient :

$$\operatorname{tg}\varepsilon_b + \operatorname{tg}\theta_b = \frac{C'}{2\cos^2\varphi_b}\left[J(u) - \frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)}\right].$$

Nous obtiendrons de même pour la seconde trajectoire

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{b'} + \operatorname{tg}\theta_{b'} = \frac{C'}{2\cos^2\varphi_{b'}}\left[J(u) - \frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)}\right].$$

Divisons les deux dernières équations l'une par l'autre, nous avons :

$$\frac{\operatorname{tg}\varepsilon_b + \operatorname{tg}\theta_b}{\operatorname{tg}\varepsilon_{b'} + \operatorname{tg}\theta_{b'}} = \frac{\cos^2\varphi_{b'}}{\cos^2\varphi_b}.$$

Le second membre de cette égalité est approximativement égal à l'unité, on peut donc écrire :

$$\operatorname{tg}\varepsilon_b + \operatorname{tg}\theta_b = \operatorname{tg}\varepsilon_{b'} + \operatorname{tg}\theta_{b'}.$$

Remplaçant les tangentes par les arcs correspondants, on en déduit

$$\varepsilon_b + \theta_b = \varepsilon_{b'} + \theta_{b'},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — Si $b' = 0$, on a $\varepsilon_{b'} = 0$, l'angle θ'_b est alors l'angle de chute à la distance a; par conséquent

$$\varepsilon_b + \theta_b = \omega_a.$$

Toutefois, il est plus exact d'écrire

$$\operatorname{tg}\varepsilon_b + \operatorname{tg}\theta_b = \operatorname{tg}\omega_a.$$

IV. *L'angle de départ est très approximativement indépendant de la hauteur du point d'arrivée.*

En employant les notations précédentes, la première trajectoire donne

$$\operatorname{tg}\varepsilon_b - \operatorname{tg}\varphi_b = -\frac{C'}{2\cos^2\varphi_{b'}}\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V)\right]$$

et la seconde

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{b'}-\operatorname{tg}\varphi_{b'}=-\frac{C'}{2\cos^2\varphi_{b'}}\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)}-J(V)\right].$$

Par suite, on a :

(a) $$\frac{\operatorname{tg}\varepsilon_b-\operatorname{tg}\varphi_b}{\operatorname{tg}\varepsilon_{b'}-\operatorname{tg}\varphi_{b'}}=\frac{\cos^2\varphi_{b'}}{\cos^2\varphi_b}.$$

En raisonnant comme dans le théorème précédent, on trouve

$$\varphi_b-\varepsilon_b=\varphi_{b'}-\varepsilon_{b'},$$

c. q. f. d.

V. *Relations plus exactes entre les angles de projection correspondant à des points d'arrivée placés à la même distance et dont l'un est placé sur l'horizon.*—Le théorème IV ne peut être appliqué que pour les petits angles, tandis que l'équation (*a*) peut servir même pour les grands angles. En posant dans celle-ci $b'=0$ et en mettant simplement φ et ε au lieu de φ_b et de ε_b, on a :

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varphi_0}=\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi}, \quad \sin 2\varphi-2\cos^2\varphi\operatorname{tg}\varepsilon=\sin 2\varphi_0,$$

ou bien, comme $2\cos^2\varphi=\cos 2\varphi+1$

$$\sin 2\varphi-\operatorname{tg}\varepsilon\cos 2\varphi-\operatorname{tg}\varepsilon=\sin 2\varphi_0,$$
$$\frac{\sin(2\varphi-\varepsilon)-\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}=\sin 2\varphi_0.$$

Par conséquent :

(b) $$\sin(2\varphi-\varepsilon)=\sin 2\varphi_0\cos\varepsilon+\sin\varepsilon$$
$$=\frac{\sin(2\varphi_0+\varepsilon)+\sin(2\varphi_0-\varepsilon)}{2}+\sin\varepsilon.$$

Cette formule sert spécialement pour transformer une table de tir ordinaire en une autre destinée au tir de côte ou de montagne (s'il s'agit dans le second cas de positions fixes). Dans le premier cas, les angles de sité sont toujours négatifs.

VI. *Équation de la trajectoire en fonction de* φ_x. — Dans l'équation de la trajectoire

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{C'x}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V)\right]$$

la valeur de u correspond à l'abscisse x. Cette dernière peut être considérée comme la portée d'une autre trajectoire dont l'angle de projection serait φ_x au lieu de φ. Cet angle de projection φ_x est donné par l'équation

$$\sin 2\varphi_x = C'\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V)\right].$$

En éliminant entre ces deux équations le facteur compris entre la parenthèse [ ], on obtient :

$$(c) \qquad y = \frac{x}{2\cos^2\varphi}(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_x),$$

équation que l'on peut ramener à la forme

$$y = x\,\mathrm{tg}(\varphi - \varphi_x)\left[1 - \frac{\sin^2\varphi_x}{\cos^2\varphi}\right].$$

Exercices.

1° *Démontrer que, soit pour la résistance cubique, soit pour la résistance bi-quadratique, on a exactement*

$$\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} = \frac{J(V)+4J(u_m)+J(u)}{6},$$

égalité dans laquelle $J(u_m)$ *est la valeur de* $J(u)$ *correspondant à*

$$D(u_m) = \frac{D(V)+D(u)}{2}.$$

2° *Démontrer que si l'on tire contre un but placé à la distance* a *et à une hauteur* b *au-dessus de l'horizon, sous un angle de projection* $\varphi_a + \varepsilon$, *on atteint un point au-dessous du but de*

$$b \frac{\sin^2 \varphi_a}{\sin^2(\varphi_a + \varepsilon)}$$

ε *étant l'angle de site, et* φ_a *l'angle de projection pour atteindre un* but placé *sur l'horizon, à la distance* a.

CHAPITRE VI

RÉDUCTION DES FORMULES EN FONCTION DE L'ABSCISSE.

§ 1.

Posons

$$D(V) = D_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{C'} = x'$$

on a [chapitre IV, § 1]

(1) $$D(u) = D_0 + x'.$$

Il résulte de là que u, $A(u)$, $J(u)$, $T(u)$ sont fonctions de $D_0 + x'$. Nous représenterons ces fonctions par les notations suivantes

$$D^{-1}(D_0 + x') \quad , \quad \bar{A}(D_0 + x') \quad , \quad \bar{J}(D_0 + x') \quad , \quad \bar{T}(D_0 + x').$$

Par conséquent, les formules (7), (8), (9), (10) et (1) du chapitre IV deviennent :

(2) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left\{\frac{\bar{A}(D_0 + x') - \bar{A}(D_0)}{x'} - \bar{J}(D_0)\right\}, \\ &\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left\{\bar{J}(D_0 + x') - \bar{J}(D_0)\right\}, \\ &t = \frac{C'}{\cos\varphi}\left\{\bar{T}(D_0 + x') - \bar{T}(D_0)\right\} \quad , \quad v = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} D^{-1}(D_0 + x'). \end{aligned}\right.$$

On peut donner à ces formules des formes semblables à celles que l'on a trouvées pour la trajectoire dans le vide. Remarquons, en effet, que l'on a $dx' = d{\cdot}D(u)$, par suite :

$$\bar{J}(D_0 + x') = \bar{A}'(D_0 + x') \quad , \quad \frac{2g}{u^2} = \bar{J}'(D_0 + x') = \bar{A}''(D_0 + x'),$$
$$\frac{1}{u} = \bar{T}'(D_0 + x');$$

et par suite :

$$\frac{2g}{V^2} = \bar{J}'(D_0) = \bar{A}''(D_0) \quad , \quad \frac{1}{V} = \bar{T}'(D_0).$$

On a donc :

$$(3)\quad \begin{cases} y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \dfrac{gx^2}{2V^2\cos^2\varphi}\left\{\dfrac{\bar{A}(D_0+x') - \bar{A}(D_0) - x'\bar{A}'(D_0)}{\dfrac{x'^2}{1\cdot 2}\bar{A}''(D_0)}\right\}, \\ \mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,\varphi - \dfrac{gx}{V^2\cos^2\varphi}\left\{\dfrac{\bar{A}'(D_0+x') - \bar{A}'(D_0)}{x'\bar{A}''(D_0)}\right\}, \\ t = \dfrac{x}{V\cos\varphi}\left\{\dfrac{\bar{T}(D_0+x') - \bar{T}(D_0)}{x'\bar{T}'(D_0)}\right\} \quad , \quad v = \dfrac{V\cos\varphi}{\cos\theta}\left\{\dfrac{D^{-1}(D_0+x')}{D^{-1}(D_0)}\right\}. \end{cases}$$

Nous remarquerons que dans les facteurs entre les grandes parenthèses que nous représenterons dorénavant par

$$(3')\qquad G,\ G_1,\ G_2,\ G_3,$$

les termes suivent le développement de la formule de Taylor. Dans le vide, ces facteurs se réduisent à l'unité.

§ 2.

Posons $\frac{\delta i F(u)}{C} = \gamma u^n$ ou $F(u) = C'\beta\gamma u^n$, nous nous proposons de calculer les valeurs des facteurs G, G_1, G_2, G_3.

Il suffit d'exprimer u d'abord en fonction de x'. Or, comme on a

$$(4)\qquad \bar{A}''(D_0+x') = \frac{2g}{u^2} \qquad \text{et} \qquad \bar{T}'(D_0+x') = \frac{1}{u},$$

en intégrant deux fois la première de ces équations, on obtient, $\bar{A}(D_0+x')$, et une fois la seconde, $\bar{T}(D_0+x')$.

L'équation (1) donne

$$D_0 + x' = D(u) = -\int \frac{u\,du}{F(u)} = -\frac{1}{C'\beta\gamma}\int \frac{du}{u^{n-1}} = \frac{1}{C'\beta\gamma(n-2)u^{n-2}};$$

donc en se rappelant que pour $x' = 0$ on a $u = V$,

$$D_0 = \frac{1}{C'\beta\gamma(n-2)V^{n-2}} \quad , \quad 1 + \frac{x'}{D_0} = \frac{V^{n-2}}{u^{n-2}},$$

$$\frac{2g}{u^2} = \frac{2g}{V^2}\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2}{n-2}} \quad , \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{V}\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

Par suite :

$$\bar{A}''(D_0+x')=\frac{2g}{V^2}\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2}{n-2}}, \qquad \bar{A}''(D_0)=\frac{2g}{V^2},$$

$$\bar{A}'(D_0+x')=\frac{2g}{V^2}\,\frac{D_0(n-2)}{n}\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{n}{n-2}}, \qquad \bar{A}'(D_0)=\frac{2g}{V^2}\,\frac{D_0(n-2)}{n},$$

$$\bar{A}\,(D_0+x')=\frac{2g}{V^2}\,\frac{D_0^2(n-2)^2}{n\,(2n-2)}\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2n-2}{n-2}}, \qquad \bar{A}(D_0)=\frac{2g}{V^2}\,\frac{D_0^2(n-2)^2}{n\,(2n-2)},$$

$$\bar{T}'(D_0+x')=\frac{1}{V}\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{1}{n-2}}, \qquad \bar{T}'(D_0)=\frac{1}{V},$$

$$\bar{T}\,(D_0+x')=\frac{1}{V}\,\frac{D_0(n-2)}{(n-1)}\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}, \qquad \bar{T}\,(D_0)=\frac{1}{V}\,\frac{D_0(n-2)}{(n-1)},$$

En remplaçant dans les expressions de G, G_1, G_2, G_3 du § 1 on obtient

$$G=\frac{\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2n-2}{n-2}}-1-\frac{2n-2}{n-2}\,\frac{x'}{D_0}}{\frac{(n-1)\,n}{(n-2)^2}\,\frac{x'^2}{D_0^2}},$$

$$G_1=\frac{\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{n}{n-2}}-1}{\frac{n}{n-2}\,\frac{x'}{D_0}},$$

$$G_2=\frac{\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}-1}{\frac{n-1}{n-2}\,\frac{x'}{D_0}},$$

$$G_3=\left(1+\frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{1}{2-n}}.$$

§ 3.

Posons :

$$\frac{2n-2}{n-2}=m \quad , \quad \frac{2n-2}{n-2}\,\frac{x'}{D_0}=z,$$

nous avons :

$$G = \frac{\left(1+\frac{z}{m}\right)^m - 1 - z}{\frac{m-1}{2m} z^2} \quad , \quad G_1 = \frac{\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m-1} - 1}{\frac{m-1}{m} z},$$

$$G_2 = \frac{\left(1+\frac{z}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - 1}{\frac{1}{2} z} \quad , \quad G_3 = \left(1+\frac{z}{m}\right)^{\frac{2-m}{2}}.$$

Remarquons en même temps que d'après la valeur trouvée pour D_0, $z = (2n-2)\beta\gamma V^{n-2}x$, et que si $n = 3$, on a $m = 4$, et si $n = 4$, on a $m = 3$. Le cas particulier de $n = 3$ est le seul qui donne des valeurs entières aux cinq exposants n, m, $m-1$, $\frac{m}{2}$, $\frac{m-2}{2}$ (¹)

Résistance cubique.	*Résistance biquadratique.*
$\frac{\delta i F(v)}{C} = cv^3, \quad z = 4\beta c V x,$	$\frac{\delta i F(v)}{C} = bv^4, \quad z = 6\beta b V^2 x,$
$G = 1 + \frac{2}{3}\beta c V x + \frac{1}{6}(\beta c V x)^2,$	$G = 1 + \frac{2}{3}\beta b V^2 x,$
$G_1 = 1 + \beta c V x + \frac{1}{3}(\beta c V x)^2,$	$G_1 = 1 + \beta b V^2 x,$
$G_2 = 1 + \frac{1}{2}\beta c V x,$	$G_2 = \frac{(1 + 2b\beta V^2 x)^{\frac{3}{2}} - 1}{3b\beta V^2 x},$
$G_3 = (1 + \beta c V x)^{-1},$	$G_3 = (1 + 2\beta b V^2 x)^{-\frac{1}{2}}.$

Dans le cas de $n = 2$, on a $m = \infty$; mais il n'est pas nécessaire d'effectuer de nouveau les intégrations, puisque les formules qui donnent les valeurs des quatre facteurs peuvent se déduire de celles que l'on a obtenues dans le cas général. On a en effet pour $m = \infty$:

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^z \quad , \quad \lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m-1} = e^z,$$

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^{\frac{m}{2}} = e^{\frac{z}{2}} \quad , \quad \lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^{\frac{2-m}{2}} = e^{-\frac{z}{2}},$$

(¹) Si $n = 2 + \sqrt{2} = 3,4142$, on a $m = n$. Rapprocher cette remarque de ce qui est dit au commencement de la note VI.

Nous avons donc :

Résistance quadratique.

$$\frac{\delta i F(v)}{C} = qv^2 \quad , \quad z = 2\beta q x,$$

$$G = \frac{e^z - 1 - z}{\frac{1}{2} z^2} \quad , \quad G_1 = \frac{e^z - 1}{z} \quad , \quad G_2 = \frac{e^{\frac{z}{2}} - 1}{\frac{1}{2} z} \quad , \quad G_3 = e^{-\frac{z}{2}}.$$

Exercices.

1° Démontrer que soit pour la résistance cubique, soit pour la résistance biquadratique, en désignant par θ_m l'inclinaison du point milieu de la trajectoire, on a

$$\operatorname{tg}\theta_m = \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi).$$

2° Démontrer que dans le cas où la résistance suit les deux lois précédentes, en désignant par u_m la pseudo-vitesse à la distance $\frac{X}{2}$, on a

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{6V^2 \cos^2\varphi}\left[1 + 2\left(\frac{V}{u_m}\right)^2\right].$$

3° Démontrer que dans le cas de la loi biquadratique, l'équation de la trajectoire est

$$y = \frac{x(X - x)\left[x \operatorname{tg}\omega + (X - x)\operatorname{tg}\varphi\right]}{X^2}.$$

4° Démontrer que cette trajectoire partage par moitié la surface comprise entre les deux paraboles donnant la même portée et ayant pour inclinaisons extrêmes, la première φ, la seconde ω.

CHAPITRE VII

RÉSISTANCE QUADRATIQUE
APPLICATIONS AU TIR INDIRECT ET AU TIR COURBE

---

§ 1.

Facteurs de tir.

Lorsque la vitesse initiale est inférieure à 240 m, la résistance peut être considérée comme quadratique. Dans le tir indirect et dans le tir courbe, la vitesse initiale est en général inférieure à cette limite, et quand elle lui est supérieure, elle descend très rapidement au-dessous dans le parcours de la trajectoire. La résistance quadratique trouve donc une application directe à ces genres de tir, application certainement plus sûre que n'est celle, qu'on a fait quelquefois, de la résistance cubique ou biquadratique dans le tir de plein fouet, car dans ce dernier tir, la vitesse du projectile varie évidemment dans tout le parcours de la trajectoire dans de très grandes limites.

En reprenant les équations du tir sous la forme (3) que nous lui avons donnée au chapitre VI, et en posant :

$$\frac{\delta i}{C} F(v) = qv^2 \quad , \quad z = 2\beta qx,$$

nous avons trouvé que les facteurs entre parenthèses G, G_1, G_2, G_3 avaient pour valeur

$$(1) \qquad \begin{cases} G = \dfrac{e^z - 1 - z}{\frac{1}{2}z^2} \quad , \quad G_1 = \dfrac{e^z - 1}{z}, \\ G_2 = \dfrac{e^{\frac{z}{2}} - 1}{\frac{1}{2}z} \quad , \quad G_3 = e^{-\frac{z}{2}}. \end{cases}$$

Des tables permettent, étant donnée la valeur de z, de trouver les valeurs de ces fonctions, et inversement [1].

Facteurs de tir et leurs propriétés. — Nous appellerons facteurs de tir, certaines quantités qui sont toutes déterminées, lorsque l'une d'entre elles est connue. Au nombre de ces quantités sont les six suivantes :

$$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX}, \quad \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad \frac{T}{\sqrt{X \operatorname{tg}\varphi}}, \quad \frac{V\cos\varphi}{U\cos\omega}, \quad \frac{x_0}{X}, \quad \frac{Y}{X\operatorname{tg}\varphi}.$$

Nous les désignerons par f, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. (U représente la vitesse de chute, x_0 l'abscisse du sommet, Y la hauteur de tir.)

On reconnaît en effet qu'elles sont des facteurs de tir, d'après les équations du chapitre VI, § 3, en observant que X, Z, ω sont les valeurs de x, z et $-\theta$, quand $y = o$ et que x_0, z_0, Y sont les valeurs de x, z, y quand $\theta = o$, et l'on trouve

$$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX} = G(Z), \qquad \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2G_1(Z)}{G(Z)} - 1,$$

$$\frac{T}{\sqrt{X\operatorname{tg}\varphi}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{G_2(Z)}{\sqrt{G(Z)}}, \qquad \frac{U\cos\omega}{V\cos\varphi} = G_3(Z),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_0}{X} &= \frac{z_0}{Z} \\ \frac{Y}{X\operatorname{tg}\varphi} &= \frac{z_0}{Z}\left[1 - \frac{G(z_0)}{2G_1(z_0)}\right] \end{aligned}\right\} \quad z_0 \text{ étant déterminé par la relation } z_0 G_1(z_0) = \frac{ZG(Z)}{2}.$$

D'après ces équations, on voit facilement comment, en se donnant une valeur de Z, on peut calculer les valeurs des autres quantités; par conséquent une quelconque d'entre elles étant donnée, les cinq autres s'en déduisent. D'après les définitions, il résulte que Z qui, pour une résistance quadratique, se réduit à $2\beta q X = \frac{2\lambda\delta i\beta X}{C}$ (λ étant un coefficient numérique) est lui-même un facteur de tir.

Or, cette valeur de Z étant indépendante de la vitesse initiale, il en est de même des autres facteurs, dans le cas d'une résistance

---

[1] DIDION, *Balistique*, 1860. — MAYEVSKI, *Balistique*, 1872. — SIACCI, *Balistique*, 1re édition, vol. I, 1870.

quadratique. On peut aussi les considérer comme indépendants de l'angle de projection, lorsque cet angle est relativement faible, comme dans le tir indirect.

Nous donnons à la fin du volume une table des facteurs de tir (Table VII), établie dans le cas d'une résistance quadratique. Nous avons également fait figurer dans cette table la quantité $\frac{\delta i\beta}{C}X = f_6$, que nous avons déduite en divisant Z par $2\lambda = 0{,}0^3216$ (on trouve en effet cette valeur de 2λ en se reportant à l'Introduction) et la quantité $\frac{\delta i\beta}{C}\frac{V^2 \sin 2\varphi}{g} = f_7$, qui s'en déduit en multipliant $\frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX}$ par $\frac{\delta i\beta X}{C}$, c'est-à-dire par f_6 (¹).

Remarque. — Pour employer la table VII, il est nécessaire d'avoir égard à la vitesse initiale, qui ne doit jamais dépasser, ou de quelques mètres seulement, la limite de 240 m. Quand on donne trois des six quantités V, φ, X, ω, T, U, x_0, Y, comme dans les problèmes I, II, III, IV, V et VI, l'emploi de la table peut être poussé jusqu'à une vitesse notablement supérieure, environ 300 m, parce que dans ce cas, tout en admettant une résistance quadratique, le coefficient numérique λ n'a pas pour valeur 0,000108, mais, implicitement, celle qui vérifie la coexistence des trois quantités que l'on se donne.

§ 2.

Problèmes.

I. *On a déterminé par expérience la vitesse initiale V, la portée X et l'angle de projection φ; on cherche l'angle de chute ω, la durée du*

(¹) A la suite de la table VII, nous avons ajouté la table VIII qui contient les facteurs de tir pour la résistance cubique, table établie par le capitaine Chapel, de l'artillerie française, le premier qui ait considéré les facteurs de tir, et aux logarithmes desquels il a donné le nom de logarithmes balistiques (*Revue d'artillerie*, 1881). Comme la résistance de l'air ne suit pas la loi cubique si ce n'est dans des limites de vitesses très restreintes (de 210 à 242 et de 343 à 420), la table VIII ne peut être employée dans le cas de calculs demandant une certaine exactitude ; elle peut néanmoins servir pour des calculs qui n'exigent pas une grande approximation lorsque la vitesse dépasse au moins 300 m. Nous ferons remarquer finalement que les facteurs de tir de la table VIII ne jouissent pas de la propriété caractéristique de ceux de la table VII, d'être indépendants de la vitesse initiale.

trajet T, la vitesse de chute U, l'abscisse du sommet x_0, la hauteur de tir Y et le coefficient $i\beta$.

Au moyen des données, on calcule la valeur numérique de $f = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX}$; la table donne les valeurs de f_1, f_2.... des facteurs de tir correspondants, on en déduit ω et les autres quantités cherchées. Nous avons ainsi $\operatorname{tg} \omega = f_1 \operatorname{tg} \varphi$, $T = f_2 \sqrt{X \operatorname{tg} \varphi}$, etc.

Quant au coefficient $i\beta$, en supposant que l'on ait mesuré la densité de l'air δ, connaissant C et X, on a $i\beta = \frac{f_6 C}{\delta X}$ (1).

II. *On a obtenu une portée* X *avec une vitesse initiale* V *et un angle de projection* φ. *On demande quelle portée on obtiendrait, en tirant sous le même angle* φ, *avec une vitesse initiale* V'.

On calcule f, on cherche dans la table les valeurs correspondantes de f_7 et de f_6, et on calcule $f_7' = f_7 \frac{V'^2}{V^2}$; on prend enfin la valeur de f_6' correspondante à f_7' et l'on a $X' = \frac{f_6'}{f_6} X$.

---

(1) *Exemple.* — Données. — Canons de 155^m long. Tir à charge réduite.

Charge $2^{kg},370$, $V = 220$, $p = 40$ kg, $X = 3\,000$, $\varphi = 22^\circ 6'$.

On trouve immédiatement :

$$\log f = \log \frac{\overline{220}^2 \times \sin 44^\circ 12'}{9,81 \times 3\,000} = 0,0594.$$

Le logarithme de f se rapprochant le plus de ce dernier dans la table VII est 0,0583. En effectuant les calculs des ~~portées~~ proportionnelles, on trouve au moyen de la même table

$\log f_1 = 0,0592$, $\log f_2 = \bar{1},6693$, $\log f_3 = 0,0888$,
$\log f_4 = \bar{1},7135$, $\log f_5 = \bar{1},4276$.

On a alors

$\omega = 24^\circ 57'$, $T = 16''3$, $U = 183^m$, $x_0 = 1\,551$, $Y = 326$.

La table de tir donne pour les mêmes quantités

$\omega = 23^\circ 30'$, $T = 16''$, $U = 189^m$, $Y = 310$.

Pour le calcul de $i\beta$, en supposant qu'on ait trouvé $\delta = 1,013$, on trouve dans la table pour $f_6 = 1\,894$. D'autre part $C = 1,686$, il en résulte pour $i\beta$ la valeur $i\beta = 1,046$.

Exemple. — Prenons encore le mortier de 220 mm pour lequel on a

Charge $2^{kg},750$, $V = 155^m$, $p = 98$, $X = 2\,000$, $\varphi = 54^\circ 15'$,

on trouve $\omega = 58^\circ 33'$, la table de tir donne $59^\circ 15'$. Pour le temps on trouve $T = 24''8$, la table donne $25''7$. (*Note du traducteur.*)

Lorsque V′ diffère très peu de V, on a plus rapidement

$$X' = X + \frac{2}{f_1} \frac{V' - V}{V} X,$$

f_1 correspondant à f (voyez chapitre IX).

III. *On a obtenu avec une vitesse initiale* V *et un angle de projection* φ *une portée* X. *On demande quelle portée* X′ *on obtiendrait en tirant avec la même vitesse initiale et avec l'angle de projection* φ'.

On calcule f et on prend dans la table les valeurs correspondantes de f_6 et f_7; on calcule ensuite $f'_7 = f_7 \frac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi}$ et l'on prend la valeur de f_6' correspondant à f_7', on a alors

$$X' = \frac{f'_6}{f_6} X.$$

IV. *On a obtenu avec l'angle de projection* φ *et la vitesse* V *une portée* X, *on demande quelle portée* X′ *on obtiendrait en tirant avec la vitesse* V′ *et l'angle* φ'.

On calcule f, on prend f_6 et on détermine $f_7' = f_6 \frac{V'^2 \sin 2\varphi'}{gX}$; on prend alors f_6' correspondant à f_7' et l'on a

$$X' = \frac{f_6'}{f_6} X.$$

V. *Dans un tir d'expérience, on a mesuré l'angle de projection* φ, *la portée* X, *la durée* T *(ou à défaut de* T, *la vitesse initiale* V) *et la densité* δ. *On demande quelle portée* X′ *on obtiendrait si la densité eût été* δ'.

On calcule f_2 (ou bien f) et l'on cherche dans la table les valeurs correspondantes de f_6 et de f_7. On calcule ensuite $f_7' = f_7 \frac{\delta'}{\delta}$, prenant alors la valeur de f_6' correspondant à f_7', on a

$$X' = \frac{\delta f_6'}{\delta' f_6} X.$$

Si δ' diffère peu de δ, on a plus simplement (chap. IX) :

$$X' = X + \frac{2}{f_1} \frac{\delta - \delta'}{\delta} X.$$

VI. *Avec une vitesse initiale* V *et un angle de projection* φ *on a obtenu une portée* X. *On demande quel angle de projection il faudrait employer pour obtenir avec la même vitesse une portée* X'.

On calcule f et l'on cherche dans la table f_6 et f_7. On calcule ensuite $f_6' = f_6 \frac{X'}{X}$, d'où l'on déduit f_7', on a alors

$$\sin 2\varphi' = \frac{f_7'}{f_7} \sin 2\varphi.$$

VII. *Étant donnés la portée* X *et l'angle de projection* φ, *on demande la vitesse initiale.*

On prend la valeur de β correspondant à φ et à X d'après la table VI, on calcule $f_6 = \frac{\delta i \beta X}{C}$, on prend f correspondant à f_6, et l'on a

$$V^2 = f \frac{gX}{\sin 2\varphi}.$$

Si l'on obtient $V > 240^m$, cette valeur n'est qu'approximative; pour l'obtenir plus exactement, on se reportera au chapitre V (problème VI).

VIII. *Étant donnés la vitesse initiale* V *et l'angle de projection* φ, *trouver la portée.*

On calcule d'abord $f_7 = \frac{\delta i \beta}{C} \frac{V^2 \sin 2\varphi}{g}$ et en prenant f_6 correspondant à f_7 on aura $X = f_6 \frac{C}{\delta i \beta}$. Dans une première approximation on prendra $\beta = 1$; ayant une première valeur de X, on prendra β correspondant et on recommencera le calcul par la même méthode.

IX. *Étant données la vitesse initiale* V *et la portée* X, *trouver l'angle de projection* φ.

Calculer $f_6 = \frac{\delta i \beta}{C} X$, en prenant pour première approximation $\beta = 1$, la table VII donne f, et l'on a

$$\sin 2\varphi = f \frac{gX}{V^2}.$$

Si l'on trouve $\varphi > 20°$, on prend pour β la valeur correspondante à φ et à X, on détermine $f_6' = f_6'\beta$, on trouve la valeur correspondante de f', et l'on obtient :

$$\sin 2\varphi' = f' \frac{gX}{V^2},$$

valeur plus approchée que la première.

X. *Étant donnés la portée* X *et l'angle de chute* ω, *trouver l'angle de projection* φ *et la vitesse initiale* V.

Calculer $f_6 = \frac{\delta i\beta}{C} X$, en prenant $\beta = 1$, on en déduit f_1 et f, et l'on obtient

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\omega}{f_1} \quad , \quad V^2 = \frac{gX}{\sin 2\varphi} f$$

si l'on trouve $\varphi > 20°$, on cherche la valeur de β correspondant à φ et à X, et avec cette valeur on recommence le calcul.

Remarque. — Dans les problèmes II, III, IV, V, VI, il y aurait lieu de considérer deux valeurs de β, l'une (β) correspondant à φ et à X, l'autre (β') correspondant à φ' et X'. Les solutions proposées donnent une première approximation, qui est déjà suffisante dans presque tous les cas pratiques. Il est d'ailleurs bien facile de voir comment on pourrait passer à une seconde approximation.

XI. Tir indirect. — *Pour un certain projectile on a mesuré la vitesse initiale* V *et l'angle de projection* φ *correspondant à la portée* X. *On demande quel serait l'angle de projection* φ' *correspondant à la même portée, si la vitesse initiale devenait* V' (on suppose V et $V' < 300^m$ et $\varphi' < 20°$).

Comme pour les distances égales de tir les facteurs de tir sont égaux, nous avons :

$$\frac{V'^2 \sin 2\varphi'}{gX} = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX},$$

par suite

$$\sin 2\varphi' = \frac{V^2 \sin 2\varphi}{V'^2},$$

on a de même

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi}\operatorname{tg}\varphi', \text{ etc.}$$

En résumé, étant donnée une table de tir indirect pour une vitesse initiale V, on peut immédiatement en déduire une autre relative à une autre vitesse V′, sans même être obligé de recourir à la table VII.

§ 3.

Problèmes spéciaux du tir indirect.

Dans le tir indirect, on se propose d'atteindre un but masqué par un obstacle plus ou moins éloigné de celui-ci. Ainsi, dans le tir en brèche indirect, le but est le mur d'escarpe du fossé, et l'obstacle est le glacis. Dans le tir d'enfilade, le but est l'artillerie qui arme le terre-plein d'un ouvrage de fortification, et l'obstacle est représenté par le parapet perpendiculaire à l'axe du terre-plein ou par une traverse.

Dans n'importe quel cas, le problème balistique se présente sous les deux formes suivantes :

1° *Faire passer la trajectoire par deux points donnés.*

2° *Faire passer la trajectoire par un point donné sous une inclinaison donnée.*

Les équations dont nous ferons usage sont celles que nous avons données au chapitre VI, § 1, dans lesquelles on peut poser

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} G(z) = f, & G_2(z) = f_2\sqrt{\dfrac{fg}{2}}, \\ G_1(z) = \dfrac{1}{2}f(1+f_1), & G_3(z) = \dfrac{1}{f_3}, \end{array}\right.$$

où f, f_1, f_2, f_3 correspondent à $f_6 = \frac{\delta i x}{C}$, en effet, comme il s'agit du tir indirect, on peut faire $\beta = 1$, $z = 2qx$, $f_6 = \frac{\delta i}{C}x$.

1° *Étant donnés deux points, y faire passer la trajectoire.* — Soient a, b, a', b' les coordonnées des deux points que nous supposerons

sur la branche descendante, et $a' > a$ $b' < b$; les équations auxquelles doivent satisfaire à la fois la vitesse initiale et l'angle de projection sont :

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon' = \frac{ga}{2V^2\cos^2\varphi} G(z),$$

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}'\varepsilon = \frac{ga'}{2V^2\cos^2\varphi} G(z'),$$

équations dans lesquelles on a

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varepsilon \quad , \quad \frac{b'}{a'} = \operatorname{tg}\varepsilon' \quad , \quad z = 2qa \quad , \quad z' = 2qa',$$

Divisant les deux équations l'une par l'autre, il vient :

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon'} = \frac{a\,G(z)}{a'G(z')} = \frac{f_7}{f_7'},$$

f_7 et f_7' étant les valeurs correspondant à $f_6 = \frac{\delta ia}{C}$ et $f_6' = \frac{\delta ia'}{C}$; par suite :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a'G(z')\operatorname{tg}\varepsilon - aG(z)\operatorname{tg}\varepsilon'}{a'G(z') \quad - aG(z)} = \frac{f_7'\operatorname{tg}\varepsilon - f_7\operatorname{tg}\varepsilon'}{f_7' - f_7},$$

équation qui donne φ.

Pour déterminer la vitesse, il suffit de résoudre l'une des équations précédentes, la première par exemple, par rapport à V^2, on obtient alors :

$$V^2 = \frac{ga}{2\cos^2\varphi}\,\frac{G(z)}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{ga}{2\cos^2\varphi}\,\frac{f_7' - f_7}{f_6(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon')},$$

φ étant connu, cette équation donne V.

2° *Faire passer la trajectoire par un point donné, sous une inclinaison donnée.* — Soit (a, b) le point donné que nous supposerons sur la branche descendante, et θ' la valeur numérique de l'inclinaison donnée. En posant $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varepsilon$, les deux équations de condition sont les suivantes :

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{ga}{2V^2\cos^2\varphi} G(z),$$

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\theta' = \frac{ga}{V^2\cos^2\varphi} G_1(z).$$

Divisant membre à membre, on a :

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\theta'} = \frac{1}{2}\frac{G(z)}{G_1(z)}$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2G_1(z)\operatorname{tg}\varepsilon + G(z)\operatorname{tg}\theta'}{2G_1(z) - G(z)} = \operatorname{tg}\varepsilon + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\theta'}{f_1};$$

où f_1 correspond à $f_6 = \frac{\delta ia}{C}$. Cette équation donne φ.

Pour obtenir la vitesse, on résout l'une des deux équations précédentes, la première par exemple, par rapport à V^2, et l'on a

$$V^2 = \frac{ga}{2\cos^2\varphi}\,\frac{G(z)}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{ga}{2\cos^2\varphi}\,\frac{ff_1}{\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\theta'}.$$

Connaissant φ, cette équation donne V.

Remarque. — L'angle φ est plus petit que celui qui lui correspond dans le vide, et d'autant plus petit que la portée et la résistance de l'air sont plus grandes. Cela est évident pour le deuxième problème, puisque f_1 augmente en même temps que $\frac{\delta i\beta}{C}a$, c'est-à-dire f_6. Dans le cas du premier problème, on peut remarquer en premier lieu que la quantité $\frac{a'G(z')}{aG(z)}$ croît avec q. Ceci posé, écrivons :

$$\frac{a'G(z')}{aG(z)} = k.$$

L'équation en φ se réduit à

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon'}{k-1}.$$

En différentiant cette dernière équation, on obtient

$$\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{dk} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon' - \operatorname{tg}\varepsilon}{(k-1)^2}.$$

Or ε' est toujours plus petit que ε, par conséquent le second

membre de l'égalité précédente est négatif. L'angle φ décroît donc quand k augmente, c'est-à-dire avec la résistance de l'air.

Les quantités φ et V ayant été déterminées, les formules (3) du chapitre VI et (1) de la page (84) donneront le temps t et la vitesse v.

3° *Étant donné un point dont les coordonnées sont* a *et* b, *on demande avec quelle inclinaison la trajectoire doit passer par ce point pour que son prolongement passe également par un autre point* a′ b′.

Soit θ' la valeur numérique de l'inclinaison cherchée, l'angle de projection nécessaire pour que la trajectoire passe par a et b est donné par l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2G_1(z)\operatorname{tg}\varepsilon + G(z)\operatorname{tg}\theta'}{2G_1(z) - G(z)}.$$

La trajectoire devant également passer par a', b', l'angle de projection est aussi donné par l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a'G(z')\operatorname{tg}\varepsilon - aG(z)\operatorname{tg}\varepsilon'}{a'G(z') - aG(z)}.$$

En égalant les deux valeurs de $\operatorname{tg}\varphi$, on obtient l'équation cherchée entre θ' et les quantités données a, b, a', b'. On a donc

$$\frac{2G_1(z)\operatorname{tg}\varepsilon + G(z)\operatorname{tg}\theta'}{2G_1(z) - G(z)} = \frac{a'G(z')\operatorname{tg}\varepsilon - aG(z)\operatorname{tg}\varepsilon'}{a'G(z') - aG(z)}.$$

Pour résoudre cette équation par rapport à $\operatorname{tg}\theta'$, retranchons $\operatorname{tg}\varepsilon$ aux deux membres de l'équation et réduisons au même dénominateur, il vient :

$$\frac{\operatorname{tg}\theta' + \operatorname{tg}\varepsilon}{2G_1(z) - G(z)} = \frac{a(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon')}{a'G(z') - aG(z)}.$$

Par conséquent :

$$\operatorname{tg}\theta' + \operatorname{tg}\varepsilon = (\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon')\frac{\left[2G_1(z) - G(z)\right]z}{z'G(z') - zG(z)}.$$

Posons $z' = z + \Delta z$, la formule de Taylor donne

$$z'G(z') = zG(z) + \frac{\Delta z}{1}\frac{d\left[zG(z)\right]}{dz} + \ldots\ldots$$

En négligeant les carrés et les puissances supérieures de Δz, et en remarquant que $\frac{\Delta z}{z} = \frac{a' - a}{a}$, il vient

$$\operatorname{tg} \theta' + \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon')}{a' - a} \frac{2G_1(z) - G(z)}{\frac{d[zG(z)]}{dz}}.$$

Or il est facile de démontrer que l'on a

$$2G_1(z) - G(z) = -\frac{d[zG(z)]}{dz}.$$

par conséquent :

$$\operatorname{tg}\theta' + \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon')a}{a' - a} = \frac{b - b'}{a' - a} + \frac{b'}{a'}.$$

Cette équation vraie dans le vide, est d'autant plus approchée que la quantité $a' - a$ est plus petite. Elle permet, dans la pratique, de ramener le deuxième problème au premier.

Exercices.

1° En pratique, on tire avec la charge qui donne la portée a *et un angle de chute dont la tangente est égale à* $tg\,\theta' + tg\,\varepsilon$. *On prend d'abord pour angle de projection, l'angle* φ_0, *qui donne la portée* a, *augmenté de* ε, *et l'on effectue ensuite les corrections d'après l'observation des coups. Démontrer que le premier angle sous lequel on tire, donne une trajectoire qui passe au-dessous du point visé de la quantité* $b\,\frac{\sin^2\varphi_0}{\cos^2(\varphi_0+\varepsilon)}$, *et que lorsque la trajectoire passe par le point visé, son inclinaison est supérieure à* θ' *de la quantité*

$$\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\varphi_0 \sin 2\theta'$$

en négligeant les carrés et les puissances supérieures de ε.

2° Quel doit être l'angle de chute et l'angle de projection, pour que

la portée soit $= a$, *la vitesse initiale V étant celle trouvée dans le premier ou dans le deuxième problème.*

3° Démontrer que si l'on se donne la charge à laquelle correspond, pour une portée a, *un angle de chute dont la tangente est donnée par l'expression*

$$\mu\left(1-\frac{2f_1\mu\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{f_1^2-\mu^2}\right) \qquad (\mu = \mathrm{tg}\,\theta' + \mathrm{tg}\,\varepsilon),$$

l'inclinaison de la trajectoire quand elle passe par le point visé est θ', *en négligeant le carré et les puissances supérieures de* ε.

CHAPITRE VIII

TRAJECTOIRES SEMBLABLES.

---

§ 1.

Conditions de similitude. — Deux trajectoires sont évidemment semblables, lorsque l'arc d'une des trajectoires, compris entre deux inclinaisons quelconques, est dans un rapport constant avec l'arc de l'autre trajectoire compris entre les mêmes inclinaisons.

Quand on suppose la résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse, on peut établir la relation à laquelle doivent satisfaire les vitesses initiales de deux projectiles, pour que lancés sous le même angle de projection, ils décrivent des trajectoires semblables.

Pour arriver à ce résultat, il est nécessaire de recourir à l'expression de l'arc de trajectoire compris entre les angles θ et θ', dans l'hypothèse d'une retardation de la forme $\frac{\delta i \lambda v^n}{C}$, λ étant un coefficient numérique quelconque.

Nous avons en premier lieu [chap. II, éq. (4)] :

$$gd(v\cos\theta) = \frac{\delta i \lambda}{C} v^{n+1} d\theta.$$

On en déduit

$$\frac{gd(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^{n+1}} = \frac{\delta i \lambda}{C} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}.$$

et en intégrant

$$-\frac{g}{n}\left[\frac{1}{(v\cos\theta)^n} - \frac{1}{(V\cos\varphi)^n}\right] = \frac{\delta i \lambda}{C}\int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}$$

d'où

$$(1)\qquad (v\cos\theta)^n = \frac{(V\cos\varphi)^n}{1 - \dfrac{n\delta i\lambda V^n \cos^n\varphi}{gC}\displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}}.$$

Nous avons en outre

$$g\,dx = -\,v^2 d\theta$$

et comme $dx = ds\cos\theta$, on a

$$g\,ds = -\,v^2\frac{d\theta}{\cos\theta},$$

d'où en substituant et intégrant entre les limites θ et θ' :

$$gs = -\int_{\theta'}^{\theta} \frac{V^2\cos^2\varphi}{\left[1 - \dfrac{n\delta i\lambda V^n\cos^n\varphi}{gC}\displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{2}{n}}}\,\frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$(2)\qquad \frac{gs}{V^2} = -\int_{\theta'}^{\theta} \frac{\cos^2\varphi}{\left[1 - \dfrac{n\delta i\lambda V^n\cos^n\varphi}{gC}\displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{2}{n}}}\,\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

Pour un autre projectile, ayant pour coefficient balistique C_1, semblable au premier, lancé dans le même milieu avec la vitesse initiale V_1 et sous le même angle φ, nous aurions une expression analogue à la précédente et qui lui serait identique, si l'on avait

$$(3)\qquad \frac{V^n}{C} = \frac{V_1^{\,n}}{C_1}.$$

Si donc cette dernière équation est vérifiée, nous aurons :

$$\frac{s}{V^2} = \frac{s_1}{V_1^{\,2}},$$

et par suite les trajectoires seront semblables.

La relation (3) peut encore s'écrire :

$$\frac{\delta i\lambda V^n}{C} = \frac{\delta i\lambda V_1^{\,n}}{C_1},$$

qui exprime l'égalité des retardations à la bouche de la pièce.

Rapport entre les temps nécessaires pour décrire des arcs homologues. — Nous avons :

$$gdt = -v\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

En substituant et en intégrant, il vient :

$$(4) \qquad \frac{gt}{V} = -\int_{\theta}^{\theta'} \frac{\cos\varphi}{\left[1 - \frac{n\delta i\lambda(V\cos\varphi)^n}{gC}\int_{\varphi}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right]^{\frac{1}{n}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Pour l'arc homologue, nous aurons une expression égale en vertu de l'équation (3). Par conséquent

$$\frac{t}{V} = \frac{t_1}{V_1}.$$

Rapport entre les vitesses en deux points homologues. — La vitesse au point d'inclinaison θ, pour le premier projectile, est donnée par l'équation (1) ; pour le second projectile, elle est donnée par une expression analogue, d'où l'on tire :

$$\frac{v}{V} = \frac{v_1}{V_1}.$$

Rapport entre les retardations en deux points homologues. — Pour deux points homologues, les expressions des retardations sont respectivement :

$$r = \frac{\delta i\lambda v^n}{C}, \qquad r_1 = \frac{\delta i\lambda v_1^{\,n}}{C_1}$$

par conséquent

$$\frac{r}{r_1} = \frac{v^n}{v_1^{\,n}}\frac{C_1}{C} = \frac{V^n}{V_1^{\,n}}\frac{C_1}{C}$$

et ce rapport étant égal à l'unité en vertu de l'équation (3), on a

$$r = r_1.$$

Conclusion. — En supposant la résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse, pour que deux trajectoires obtenues avec

le même angle de projection soient semblables, il faut que les retardations initiales soient égales.

Dans ce cas :

1° Les arcs homologues et les lignes homologues sont proportionnels aux carrés des vitesses initiales.

2° Les temps homologues et les vitesses homologues sont proportionnels aux vitesses initiales.

3° Les retardations homologues sont égales.

Corollaire. — Dans le vide toutes les trajectoires sont semblables.

§ 2.

Quand la résistance est quadratique, la condition (3) devient :

$$\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{C}{C_1}.$$

Par conséquent, les vitesses initiales doivent être proportionnelles aux racines carrées des coefficients balistiques, pour que la similitude ait lieu. Dans ce cas, les arcs homologues sont proportionnels aux coefficients balistiques, les temps et les vitesses, aux racines carrées de ces mêmes coefficients.

Le théorème sur la similitude ne peut avoir d'application pratique que pour le tir indirect ou pour le tir courbe, car c'est seulement dans le cas de ces tirs qu'on peut regarder la résistance comme proportionnelle à une puissance fixe, c'est-à-dire au carré de la vitesse. Mais pour faire une telle application, il convient de transformer la relation entre les vitesses initiales en une relation entre les charges. La loi de Hutton se prête facilement à cette transformation ; mais il est bon de remarquer qu'elle ne se vérifie avec une approximation suffisante que dans le cas où les bouches à feu et les projectiles diffèrent peu.

D'après la loi de Hutton, les forces vives initiales des projectiles sont proportionnelles aux charges.

Nous avons donc

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{p_1}{p} \frac{V_1^2}{V_2}$$

p et p_1 désignant les poids des projectiles, μ et μ_1 les deux charges. Or

$$\frac{V_1^2}{V^2}=\frac{C_1}{C}$$

par suite

$$\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{p_1 C_1}{pC}.$$

D'après cela, si l'on se donne la charge μ pour un projectile de poids p et de coefficient C, la relation précédente permet de déterminer la charge μ_1 correspondant à un projectile de poids p_1 et de coefficient C_1 pour qu'il décrive une trajectoire semblable à celle décrite par le premier.

Mais les poids des projectiles semblables extérieurement et intérieurement sont proportionnels aux cubes des diamètres, et les coefficients balistiques aux diamètres; par suite, pour ces projectiles, les charges sont proportionnelles à la quatrième puissance des diamètres, les lignes homologues aux diamètres, les temps et les vitesses aux racines carrées des diamètres (¹).

§ 3.

Des équations (1) et (4) qui donnent v et t, et de celles qui donneraient également x et y, et qui ne diffèrent de l'équation (2) que par le facteur $\cos\theta$ ou $\sin\theta$ sous le signe intégral, on déduit facilement, en posant

$$\frac{\delta i\lambda}{gC}=l, \qquad \frac{1}{l\,(V\cos\varphi)^n}+n\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}=E,$$

que les quantités suivantes

$$(a) \qquad \frac{v}{V}\ ,\quad \frac{gt}{V}\ ,\quad \frac{gx}{V^2}\ ,\quad \frac{gy}{V^2},$$

(¹) On a proposé une autre formule qui semble plus exacte que celle de Hutton, cette formule est la suivante :

$$\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{p_1^{\frac{3}{4}}V_1^{\frac{5}{3}}}{p^{\frac{3}{4}}V^{\frac{5}{3}}}=\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\frac{5}{3}}.$$

On en déduit comme condition de similitude de trajectoires de deux projectiles semblables $\frac{\mu_1}{\mu}=\left(\frac{a_1}{a}\right)^3$ environ.

ou bien encore

$$(b)\qquad l^{\frac{1}{n}}v\ ,\quad l^{\frac{1}{n}}t\ ,\quad gl^{\frac{2}{n}}x\ ,\quad gl^{\frac{2}{n}}.$$

et aussi

$$(c)\qquad lV^{n}v\ ,\quad lV^{n-1}t\ ,\quad glV^{n-2}x\ ,\quad glV^{n-2}y,$$

peuvent s'exprimer en fonction des seules quantités θ et E, lorsqu'on fait $\theta' = o$, c'est-à-dire que l'on place l'origine des coordonnées sur la verticale du sommet : elles peuvent donc être données par une table à double entrée, c'est-à-dire par une table ayant pour arguments θ et E, ou θ et une fonction quelconque de E. Les tables d'Otto, de Bashforth et de Zaboudski ont été établies sur ces principes, les premières en admettant une résistance quadratique, les secondes une résistance cubique, et les dernières une résistance biquadratique.

Le professeur Bashforth calcule les quantités (a) en prenant pour origine le sommet, et en remplaçant V par la vitesse moyenne v_0 en ce point, et il prend pour second argument $\frac{1}{E}$, c'est-à-dire lv_0^n ($n = 3$) (¹). On ne peut faire usage des tables de Bashforth qu'en divisant la trajectoire en plusieurs arcs pour lesquels on puisse considérer la résistance de l'air à peu près cubique, et en faisant par conséquent varier le coefficient de résistance d'un arc à l'autre.

Otto, sur les traces d'Euler, calcule au contraire les quantités (b) en choisissant pour argument, non pas E, mais l'inclinaison extrême Θ de la branche ascendante, inclinaison qui pour $n = 2$ est liée à E par l'équation :

$$(d)\qquad \int_0^{\Theta}\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{E}{2} - \frac{1}{2l(V\cos\varphi)^2} + \int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

Des vingt-deux trajectoires calculées par le général Otto, trajectoires correspondant à autant de valeurs de Θ, il n'a été publié que ce qui suit :

1° Les valeurs de gly correspondant aux inclinaisons sur la branche ascendante croissant de 5° en 5°, depuis 30° jusqu'à 75°. Comme l'origine est au sommet, ces valeurs sont celles de glY (Y étant la hauteur de tir) pour les angles 30°, 35°, 40°.... 75°.

2° Les inclinaisons sur la branche descendante correspondant aux valeurs calculées de glY. Ces inclinaisons représentent les angles de chute ω pour les angles de projection précédemment indiqués.

3° Les sommes arithmétiques des deux valeurs de glx qui correspondent

(¹) Bashforth, *On the Motion of projectiles*. London, 1873.

à chaque couple des valeurs de φ, ω. Ces sommes représentent les valeurs de glX ($X =$ portée) pour les angles φ.

4° Les sommes arithmétiques des deux valeurs de $gl^{\frac{1}{2}}t$ qui correspondent à chaque couple φ, ω. Ces sommes représentent les valeurs de $gl^{\frac{1}{2}}T$ (T, durée du trajet) pour les mêmes angles φ.

Les tables d'Otto donnent donc glY, ω, glX, et $gl^{\frac{1}{2}}T$ pour les dix précédentes valeurs de l'angle φ et les vingt-deux valeurs de Θ. Étant par conséquent donnés φ et l'une des cinq autres quantités, on en déduit les quatre autres quantités et inversement : de Θ on passe à V, et inversement, au moyen de l'équation (d) [1].

Le comte de Saint-Robert imagina de chasser de ces équations la valeur de Θ en la remplaçant pour chaque valeur de φ, par la valeur de lV^2 ; mais il se contenta d'établir des tableaux graphiques. Le général Giovannetti (décédé en 1889) en a déduit des tables numériques que nous avons publiées dans la première édition de notre *Balistique* (vol. I, pages 188-191). Elles sont très commodes, quand on se donne l'angle de projection et qu'il est un des dix angles des tables; mais dans la pratique, ce cas est rare, et alors il faut recourir à une double interpolation, opération toujours fort incommode, et qui donne des résultats peu exacts pour des intervalles aussi grands que 5°.

Récemment les tables d'Otto ont été prolongées sous la dernière forme jusqu'aux plus petits angles par le capitaine Von Scheve, de l'artillerie prussienne.

Enfin, le capitaine Zaboudski, de l'artillerie russe, a publié, en 1888, sous la même forme, des tables qui sont basées sur la résistance biquadratique : ces tables sont établies de degré en degré depuis l'angle de 14° jusqu'à l'angle de 20°, et ensuite de cinq en cinq degrés jusqu'à 65°.

La résistance ne croît ni comme les cubes, ni comme les quatrièmes puissances de la vitesse; il en résulte que les tables basées sur ces résistances hypothétiques ne peuvent servir dans les applications pratiques, à moins de déterminer pour chaque trajectoire un coefficient spécial de résistance, détermination qui est d'autant moins sûre que la différence entre la vitesse initiale et la vitesse minimum est plus considérable, et cette différence est toujours grande.

Les tables d'Otto n'ont pas cet inconvénient lorsque les vitesses initiales sont inférieures à 240 m. Nous préférons toutefois l'emploi de la *table des facteurs de tir* (Table VII) qui est à simple entrée. Elle peut s'appliquer à tous les angles, résout un plus grand nombre de problèmes, et présente enfin une approximation plus que suffisante en pratique.

---

(1) *Tafeln für den Bombenwurf*, Berlin, 1842. — *Tables balistiques pour le tir élevé*, Paris, 1844 (traduction Rieffel).

Exercices

1° La similitude n'est possible que dans le cas d'une résistance proportionnelle à une puissance n *de la vitesse;*

2° Si l'on tient compte de l'angle fait par l'axe de figure avec l'axe instantané de rotation, la similitude des trajectoires de deux projectiles ne peut se vérifier sans une condition entre les milieux où le mouvement a lieu. Cette condition est:

$$\pi = \mu\lambda^{1-\frac{n}{2}}$$

où π, μ, λ *sont les rapports : entre les densités des milieux, entre les densités des projectiles, et entre les diamètres. Il faut en outre que les projectiles soient tout à fait semblables, que les vitesses initiales soient proportionnelles aux diamètres. Quand toutes ces conditions sont remplies, les dimensions linéaires des trajectoires sont proportionnelles aux diamètres, les vitesses et les temps pour des points homologues sont proportionnels aux racines carrées des diamètres* (Giornale d'Artiglieria, *1868*. P. II).

CHAPITRE IX.

VARIATIONS DES PARAMÈTRES DE LA TRAJECTOIRE ÉCARTS

§ 1.

Les paramètres de la trajectoire peuvent être ramenés à trois : la vitesse initiale, l'angle de projection et le coefficient balistique. La variation de l'un quelconque d'entre eux entraîne celle de la trajectoire et, par suite, celle de la portée. Nous étudierons dans ce chapitre les faibles variations de la portée (écarts), correspondant aux petites variations des trois paramètres. Cette étude trouve son application non seulement dans la théorie des écarts, mais aussi dans l'étude des corrections qu'il faut souvent faire sur l'une des quatre quantités X, V, φ, C′, quand l'une d'entre elles varie par rapport aux trois autres.

§ 2.

Équations préliminaires. — L'équation générale de la trajectoire (chapitre VI) peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \varphi} G\left(\frac{x}{C'}\right),$$

G étant une fonction dépendant de $\frac{x}{C'}$ et de V, et C′ une quantité qui, dans le tir de plein fouet et indirect, peut être regardée comme constante.

On tire de l'équation (1), en posant $y = o$, $x = X$,

$$(2) \qquad \frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX} = G\left(\frac{X}{C'}\right)$$

et pour l'angle de chute, en dérivant et en posant $x = X$, $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\omega$,

$$(3) \qquad -\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi - \frac{g}{2V^2\cos^2\varphi}\left[2XG\left(\frac{X}{C'}\right) + \frac{X^2}{C'}G'\left(\frac{X}{C'}\right)\right].$$

En divisant par tg φ et en ayant égard à l'équation (2), on a

$$\frac{\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = 2 + \frac{X}{C'}\frac{G'\left(\frac{X}{C'}\right)}{G\left(\frac{X}{C'}\right)}$$

et par conséquent :

$$(4) \qquad \frac{X}{C'}\frac{G'\left(\frac{X}{C'}\right)}{G\left(\frac{X}{C'}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Écarts en portées. — La portée X, donnée par l'équation (2), dépend du coefficient C', de l'angle de projection φ et de la vitesse initiale V. Si C', φ, V varient, X varie également. Supposons qu'au lieu de tirer un projectile de coefficient C' on tire un projectile de coefficient $C' + \Delta C'$, sous l'angle $\varphi + \Delta\varphi$, avec la vitesse $V + \Delta V$, la portée devient $X + \Delta X$. Supposons également que l'on néglige les carrés et les puissances supérieures de $\Delta C'$, $\Delta\varphi$, ΔV, ΔX, la variation ou la déviation ΔX peut être considérée comme la différentielle de X, considérée elle-même comme fonction de C', φ, V.

Ceci posé, en différentiant logarithmiquement l'équation (2) par rapport aux quatre quantités qu'elle renferme, il vient :

$$\frac{2dV}{V} + \frac{d\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} - \frac{dX}{X} = \frac{G'\left(\frac{X}{C'}\right)}{G\left(\frac{X}{C'}\right)}\frac{C'dX - XdC'}{C'^2} + \frac{V}{G}\frac{dG}{dV}\frac{dV}{V},$$

Se reportant à l'équation (4) et remplaçant d par Δ on a

$$(5) \qquad \frac{\Delta X}{X}\frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\Delta C'}{C'} + \frac{2\Delta\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi} + \left(2 - \frac{V}{G}\frac{dG}{dV}\right)\frac{\Delta V}{V}.$$

Les trois écarts partiels relatifs à $\Delta C'$, $\Delta\varphi$ et ΔV sont donc donnés par les formules

$$(6) \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega}\frac{\Delta C'}{C'}, \quad \frac{\Delta X}{X} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega}\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi},$$
$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega}\left(2 - \frac{V}{G}\frac{dG}{dV}\right)\frac{\Delta V}{V}.$$

Quand on n'a en vue que les écarts et que l'on ne recherche pas une grande approximation, on peut considérer la résistance moyenne comme cubique quand la vitesse dépasse 300 m, et comme quadratique quand elle est inférieure à cette limite.

Dans le cas de la résistance cubique, en posant $c\beta = \frac{\lambda}{C'}$ (chapitre VI), on a

$$G\left(\frac{X}{C'}\right) = 1 + \frac{2}{3}\lambda\frac{VX}{C'} + \frac{1}{6}\lambda^2\frac{V^2X^2}{C'^2}.$$

Par conséquent, en dérivant par rapport à X, à V et à $\frac{X}{C'}$, nous avons

$$\frac{dG}{dX} = \frac{2}{3}\frac{\lambda V}{C'} + \frac{1}{3}\frac{\lambda^2 V^2 X}{C'^2},$$
$$\frac{dG}{dV} = \frac{2}{3}\frac{\lambda X}{C'} + \frac{1}{3}\frac{\lambda^2 V X^2}{C'^2},$$
$$G'\left(\frac{X}{C'}\right) = \frac{2}{3}\lambda V + \frac{1}{3}\frac{\lambda^2 V^2 X}{C'},$$

et par suite :

$$\frac{V}{G}\frac{dG}{dV} = \frac{X}{G}\frac{dG}{dX} = \frac{X}{C'}\frac{G'\left(\frac{X}{C'}\right)}{G\left(\frac{X}{C'}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

La dernière des équations (6) devient donc dans le cas de la résistance cubique

$$(6)' \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\omega}\frac{\Delta V}{V}$$

et dans celui de la résistance quadratique, comme G est indépendant de V,

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}\,\omega}\frac{\Delta V}{V} \tag{6''}$$

Les seconds membres de ces équations se calculent au moyen des facteurs de tir ; nous avons donc :

Résistance quadratique.	*Résistance cubique.*
$\frac{\Delta X}{X} = \frac{f_1 - 1}{f_1}\frac{\Delta C'}{C'}$	$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\mathfrak{f}_1 - 1}{\mathfrak{f}_1}\frac{\Delta C'}{C'}$
$\frac{\Delta X}{X} = \frac{2}{f_1}\frac{\Delta \varphi}{\mathrm{tg}\,2\varphi}$	$\frac{\Delta X}{X} = \frac{2}{\mathfrak{f}_1}\frac{\Delta \varphi}{\mathrm{tg}\,2\varphi}$
$\frac{\Delta X}{X} = \frac{2}{f_1}\frac{\Delta V}{V}$	$\frac{\Delta X}{X} = \frac{3 - \mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_1}\frac{\Delta V}{V}.$

Les valeurs de f_1 et de $\mathfrak{f}_1$ sont données dans les tables VII et VIII et correspondent à celles de

$$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX}, \qquad \frac{V^2 \sin 2\varphi}{X}.$$

§ 3.

Problèmes.

I. *On demande la variation* ΔX *correspondant à une variation* $\Delta\delta$ *de la densité de l'air.*

On a $C' = \frac{p}{1000\delta i \beta a^2}$. En différentiant logarithmiquement on a

$$\frac{\Delta C'}{C'} = -\frac{\Delta\delta}{\delta}$$

si la variation de δ est due à l'altitude h du lieu du tir, alors on a (*Introduction*, p. 15) $\frac{\Delta\delta}{\delta} = -0{,}00008\,h$, et $\Delta X = 0{,}00008\,\frac{\mathrm{tg}\,\omega - \mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi} X h$. Si donc X est la distance du but, on tirera avec la hausse qui correspond à la distance $X - \Delta X$ (¹).

(¹) Cfr. PARODI, *Sul tiro nelle grandi altitudini* (*Rivista d'Artiglieria*), 1890.

II. *On demande la variation* ΔX *correspondant à une variation de poids dans la charge.*

D'après la loi de Hutton, on a :

$$\alpha p V^2 = \mu$$

donc en différentiant logarithmiquement

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \mu}{2\mu}.$$

III. *On cherche la variation* ΔX *correspondant à une variation du poids du projectile.* — Le poids du projectile influe sur la vitesse initiale et sur le coefficient balistique. D'après la valeur de C′ et la loi de Hutton (charge constante), on a

$$\frac{\Delta C'}{C'} = \frac{\Delta p}{p} \quad , \quad \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{2p}.$$

L'écart en portée est donc (dans le cas de la résistance cubique)

$$\Delta X = X \frac{f_1 - 1}{f_1} \frac{\Delta p}{p} - X \frac{3 - f_1}{2f_1} \frac{\Delta p}{p} = X \frac{3f_1 - 5}{2f_1} \frac{\Delta p}{p}.$$

Les deux écarts partiels tendent à se compenser, mais il est évident qu'aux petites distances, celui qui est dû à la variation de vitesse a plus d'influence que l'autre, tandis qu'aux grandes distances l'inverse a lieu. Le point où les deux écarts se compensent est donné par l'équation $\Delta X = 0$. En ce point, on a $f_1 = \frac{5}{3}$ c'est-à-dire

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{5}{3} \operatorname{tg} \varphi.$$

Par conséquent la compensation a lieu lorsque l'angle de chute est environ les $\frac{5}{3}$ de l'angle de projection.

IV. *On cherche la variation* $\Delta \varphi$ *de l'angle de projection nécessaire pour compenser une augmentation* $\Delta C'$ *du coefficient balistique réduit et une augmentation* ΔV *de la vitesse.*

Posons dans l'équation (5) $\Delta X = 0$, et (dans le cas de la résistance cubique)

$$2 - \frac{V}{G} \frac{dG}{dV} = \frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

On obtient :

$$0=\frac{\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\Delta C'}{C'}+\frac{2\Delta\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi}+\frac{3\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\Delta V}{V}$$

d'où l'on tire :

$$\Delta\varphi=-\frac{\operatorname{tg}2\varphi}{2}\left\{(f_1-1)\frac{\Delta C'}{C'}+(3-f_1)\frac{\Delta V}{V}\right\}.$$

Dans le cas de la résistance quadratique, on remplacera $f_1 - 1$ par $f - 1$ et $3 - f_1$ par 2.

V. *De combien faut-il augmenter la vitesse initiale, ou la charge, pour compenser à une distance donnée une augmentation* $\Delta\delta$ *de la densité de l'air?*

Il suffit, dans la dernière équation, de poser $\Delta\varphi = 0$ et $\frac{\Delta C'}{C'} = -\frac{\Delta\delta}{\delta}$

On obtient ainsi

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{f_1-1}{3-f_1}\frac{\Delta\delta}{\delta}.$$

Dans le cas de la résistance quadratique

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{f_1-1}{2}\frac{\Delta\delta}{\delta}.$$

La variation de charge est donnée par l'équation

$$\Delta\mu=2\mu\frac{\Delta V}{V}.$$

VI. *Pour une vitesse initiale* V, *on a calculé un angle* φ *correspondant à une portée* X, *en mettant dans* C' *une certaine valeur à la place de* $i\beta$. *L'expérience avec la même vitesse a donné pour* X *un angle de projection* $\varphi + \Delta\varphi$, *on demande la vraie valeur de* $i\beta$.

On tire de l'équation (5) en posant $\Delta V = 0$, $\Delta X = 0$

$$\frac{\Delta C'}{C'}=-\frac{2\Delta\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}\varphi}.$$

Appelant C″ le coefficient balistique réduit correspondant à la véritable valeur de $i\beta$, nous avons :

$$C'' = \frac{C}{\delta i\beta} = C' + \Delta C'$$

d'où

$$i\beta = \frac{C}{\delta C'}\left(1 + \frac{2\Delta\varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi}\frac{1}{f_1 - 1}\right) \quad \text{ou bien} \quad i\beta = \frac{C}{\delta C'}\left(1 + \frac{2\Delta\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{1}{f_1 - 1}\right)$$

suivant que la vitesse initiale V est inférieure ou supérieure à 300 m. Dans ce dernier cas, il est plus exact de se reporter au problème VIII du chapitre V.

§ 4.

Tir en bombe.

Dans le tir en bombe, il est en quelque sorte inutile de considérer les variations provenant des petites erreurs sur les angles de projection, puisque ces erreurs dans ce tir n'ont pas d'influence sensible sur la portée.

On peut avoir recours à l'équation (1), mais la résistance étant quadratique, $G\left(\frac{X}{C'}\right)$ doit être considéré comme indépendant de la vitesse. En opérant comme dans le § 2, on obtient pour les trois écarts dus à $\Delta\delta$, ΔC et ΔV

$$\frac{\Delta X}{X} = -\frac{f_1 - 1}{f_1}\frac{\Delta\delta}{\delta}, \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{f_1 - 1}{f_1}\frac{\Delta C}{C}, \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{2}{f_1}\frac{\Delta V}{V}.$$

§ 5.

Écarts verticaux. — Les écarts verticaux se déduisent des écarts en portée, en multipliant ces derniers par tg ω. Les écarts en portée et les écarts verticaux peuvent être considérés en effet comme les côtés d'un triangle rectangle ayant pour angle opposé au côté vertical l'angle ω.

Écarts latéraux. — Quant à ce qui regarde le déplacement angulaire latéral de la ligne de projection, il est évident qu'en désignant par Ψ l'angle de la projection horizontale de ce déplacement, l'écart latéral est donné par l'équation

$$\Delta = X \sin \Psi.$$

Outre les écarts que nous venons de considérer, il en existe d'autres, dus à la rotation régulière du projectile et à la rotation irrégulière. Nous nous en occuperons dans les chapitres suivants.

Exercices.

I. *Démontrer que, quelle que soit la loi de la résistance, on a toujours*

$$2 - \frac{V}{G}\frac{dG}{dV} = \left(\frac{\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\varphi}{X \operatorname{tg}\varphi} - \frac{2g}{V^2 \sin 2\varphi}\right)\frac{V^2}{f(V)}$$

$f(V)$ *étant la retardation initiale.*

II. *Démontrer que, dans le cas d'une résistance biquadratique, la distance à laquelle pour une faible variation dans le poids du projectile l'écart est nul, est environ celle pour laquelle l'angle de chute est égal à une fois et demie l'angle de projection.*

CHAPITRE X.

ÉCARTS DUS AU VENT.

---

§ 1.

L'action du vent sur un projectile supposé en repos est évidemment égale à celle que supporterait dans un milieu en repos un projectile animé d'une vitesse égale et de sens contraire à celle du vent. La résistance qu'éprouve un projectile lancé dans un milieu en mouvement est donc égale à celle qui résulte des deux vitesses, celle du projectile et celle du vent dirigée en sens contraire de la première.

Si un projectile oblong a constamment, comme nous le supposons, son axe de figure coïncidant avec la direction de la vitesse de translation, la résistance est dirigée constamment en sens inverse de la vitesse ; par conséquent, en composant la vitesse du projectile avec la vitesse du vent, la direction de la résultante n'est plus dirigée suivant l'axe du projectile. Cependant, comme la vitesse du vent est toujours très inférieure à celle du projectile, nous supposerons que la résistance due à la résultante des deux vitesses agit toujours dans la direction même de cette résultante.

Soit W la vitesse du vent, supposée horizontale, et γ l'angle qu'elle fait avec l'axe des x. Comme il se produit une déviation latérale, nous prendrons trois axes coordonnés x, y, z, ce dernier étant perpendiculaire au plan de tir et dirigé suivant la composante latérale du vent.

Les composantes suivant les trois axes de la vitesse absolue du projectile sont $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, et $-$ W sin γ, $-$ W cos γ, 0, sont les composantes suivant les trois mêmes axes de la vitesse du vent dirigé en sens contraire; la résultante des vitesses sera donc donnée par l'équation

$$v'^2 = \left(\frac{dz}{dt} - \mathrm{W}\sin\gamma\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} - \mathrm{W}\cos\gamma\right)^2 + \frac{dy^2}{dt^2}$$

et les cosinus des angles que v' fait avec les trois axes auront pour expressions

$$\frac{1}{v'}\left(\frac{dz}{dt} - \mathrm{W}\sin\gamma\right)\quad,\quad \frac{1}{v'}\left(\frac{dx}{dt} - \mathrm{W}\cos\gamma\right)\quad,\quad \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{v'},$$

En désignant par $f(v')$ la retardation due à la vitesse v', nous aurons

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\frac{dz}{dt} - W\sin\gamma}{v'}f(v') \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\frac{dx}{dt} - W\cos\gamma}{v'}f(v'),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{1}{v'}\frac{dy}{dt}f(v') + g\right).$$

Posons alors

$$z - Wt\sin\gamma = z' \quad , \quad x - Wt\cos\gamma = x'.$$

Les nouvelles variables représentent les coordonnées horizontales du projectile rapporté à deux axes parallèles à la première direction, mais dont l'origine se déplace suivant la direction du vent et avec sa vitesse. En substituant, on a

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{dz'}{ds'}f(v') \ , \ \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{dx'}{ds'}f(v') \ , \ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{ds'}f(v') - g, \\ v'dt = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = ds'. \end{cases}$$

Les deux premières équations représentent le mouvement horizontal. On en tire $dx'd^2z' - dz'd^2x' = 0$, et en intégrant

$$\frac{dz'}{dx'} = \text{constante}.$$

Par conséquent, la projection de la trajectoire sur les axes mobiles $z'x'$ est une droite, et comme le rapport

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{\frac{dz'}{dt}}{\frac{dx'}{dt}} = \frac{\frac{dz}{dt} - W\sin\gamma}{\frac{dx}{dt} - W\cos\gamma}$$

devient à l'origine $-\frac{W\sin\gamma}{V\cos\varphi - W\cos\gamma}$, nous avons :

$$\frac{dz'}{dx'} = -\frac{W\sin\gamma}{V\cos\varphi - W\cos\gamma}.$$

Posons le second membre de cette égalité égal à $\operatorname{tg}\Psi$, il en résulte que l'on a $z' = x' \operatorname{tg}\Psi$, et la constante est nulle, puisque pour $t = 0$, $x' = z' = 0$.

Posons également $z' = x'' \sin \Psi$, et par conséquent $x' = x'' \cos \Psi$, les équations (1) deviennent :

$$\frac{d^2x''}{dt^2} = -\frac{dx''}{ds'} f(v') \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{ds'} f(v') - g,$$

$$v'dt = \sqrt{dx''^2 + dy^2} = ds'.$$

Ces équations ont la même forme que celles qui représentent le mouvement d'un projectile tiré dans un milieu en repos. Elles s'intègrent donc de la même façon ; il faut seulement remplacer la vitesse initiale et la tangente de l'angle de projection par les valeurs de v' et de $\frac{dy}{dx''}$ à l'origine, c'est-à-dire par les valeurs suivantes :

$$V' = \sqrt{V^2 + W^2 - 2VW \cos\varphi \cos\gamma}, \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{V \sin\varphi}{\sqrt{V^2 \cos^2\varphi + W^2 - 2VW \cos\varphi \cos\gamma}}.$$

Soient donc X'' et T' la portée et la durée correspondant dans un milieu en repos à un angle de projection φ' et à une vitesse initiale V', la projection de la portée effective sur le plan de tir est :

$$X = X'' \cos \Psi + WT' \cos \gamma$$

et l'écart latéral

$$Z = X'' \sin \Psi + WT' \sin \gamma.$$

Or, on a

$$\sin \Psi = -\frac{W \sin\gamma}{V' \cos\varphi'} \quad , \quad \cos \Psi = \frac{V \cos\varphi - W \cos\gamma}{V' \cos\varphi'};$$

les expressions de X et de Z deviennent donc

$$X = X'' \frac{V \cos\varphi}{V' \cos\varphi'} + W \cos\gamma \left(T' - \frac{X''}{V' \cos\varphi'}\right),$$

$$Z = W \sin\gamma \left(T' - \frac{X''}{V' \cos\varphi'}\right).$$

§ 2.

La vitesse maximum du vent avec laquelle il est encore possible de tirer ne dépasse pas 6 à 7 m. Elle est donc très petite par rapport à la vitesse du projectile.

On peut donc négliger le carré de W par rapport à V^2. Il en résulte que le binôme $T' - \frac{X''}{V' \cos\varphi'}$ qui est multiplié par W, peut être remplacé par

$T - \frac{X_0}{V\cos\varphi}$, T et X_0 étant la durée et la portée correspondant à φ et à V dans l'air en repos. On voit en outre que l'on a :

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi\left(1 + \frac{W\cos\gamma}{V\cos\varphi}\right),$$

$$V' = V\left(1 - \frac{W\cos\gamma\cos\varphi}{V}\right) \quad , \quad V'\cos\varphi' = V\cos\varphi\left(1 - \frac{W\cos\gamma}{V\cos\varphi}\right)$$

et par conséquent, en remarquant que l'on a $\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}$,

$$\varphi' - \varphi = \Delta\varphi = \frac{W\cos\gamma\cos\varphi}{V} \quad , \quad V' - V = \Delta V = -W\cos\gamma\cos\varphi.$$

Posant alors $X'' = X_0 + \Delta X_0$ et $X = X_0 + \Delta X$,

$$\Delta X = W\cos\gamma\, T + \Delta X_0.$$

Quant à la valeur de ΔX_0, elle se calcule par les formules du chapitre précédent, la variation de X_0 correspondant aux variations $\Delta\varphi$ et ΔV.

Écarts. — On conclut de ce qui précède :

Si W' est la composante latérale de la vitesse du vent, l'écart latéral est $Z = W'\left(T - \frac{X}{V\cos\varphi}\right)$, T étant la durée du trajet et X la portée dans un air calme.

Si W'' est l'autre composante, estimée dans le sens du tir, l'écart en portée ΔX est $W''T$ augmenté de la variation de portée due aux variations

$$\Delta\varphi = \frac{W''\sin\varphi}{V} \quad , \quad \Delta V = -W''\cos\varphi.$$

Par conséquent, suivant l'espèce de tir, tir de plein fouet, indirect ou en bombe, l'écart en portée est :

$$\Delta X = W''\left[T - \frac{X}{f_1 V\cos\varphi}\left(1 - (f_1 - 1)\cos^2\varphi\right)\right],$$

$$\Delta X = W''\left[T - \frac{X}{f_1 V\cos\varphi}\right] = W''T\left(1 - \frac{1}{ff_1}\sqrt{\frac{2}{fg}}\right),$$

$$\Delta X = W''\left[T - \frac{X}{f_1 V\cos\varphi}\left(1 + \frac{f_1 - 1}{2}\sin^2\varphi\right)\right].$$

La troisième équation donne lieu à la même réduction que la seconde.

CHAPITRE XI.

RÉSISTANCE OBLIQUE ET DÉRIVATION.

---

§ 1.

Mode d'action de la résistance.

Quand un corps se déplace dans l'air ou dans un autre milieu, sa surface est soumise à certaines actions qui modifient à chaque instant son mouvement. La *résistance du milieu* est l'ensemble de toutes ces actions.

Si le corps est un projectile oblong, animé seulement d'un mouvement progressif, mais dont la direction fait un certain angle avec la direction de l'axe, la résistance est dite *oblique;* elle peut être réduite à une force unique, mais sa direction ne coïncide pas avec celle de la vitesse. En effet, les actions du milieu sont symétriques deux à deux par rapport au plan méridien du mobile, qui est parallèle à la direction de la vitesse. Elles donnent donc lieu à une résultante unique R placée dans ce plan, plan que nous appellerons *plan de résistance.* Le point C où cette résultante rencontre l'axe de figure est appelé le *centre de résistance* (fig. 4).

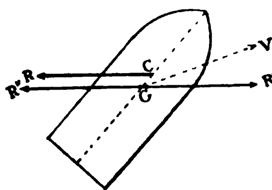


Fig. 4.

En appliquant au centre de gravité G deux forces contraires R′ et R″, égales et parallèles à R, la force R″ modifie le mouvement de progression, et le couple (R, — R′) tend à faire tourner le projectile autour d'un axe perpendiculaire au plan de résistance. Si le centre de résistance est en avant du centre de gravité, la pointe du projectile tend par l'effet du couple à s'éloigner de la direction de la vitesse ; si au contraire le centre de résistance est en arrière du centre de gravité, le fait inverse se produit.

Dans les projectiles ogivaux, lorsque l'angle entre la direction

de la vitesse et celle de l'axe n'est pas très considérable, le centre de résistance se trouve en général en avant du centre de gravité. Les expériences de Magnus ont démontré le fait.

Le mobile représentant le projectile consistait en un cylindre équilatéral de deux pouces surmonté d'un cône droit. L'axe de ce cylindre était suspendu au moyen de trois anneaux concentriques de façon à pouvoir prendre une direction quelconque dans l'espace, et son centre de gravité coïncidait avec le centre des trois anneaux. L'équilibre était donc indifférent (fig. 5).



Fig. 5.

Pour reproduire l'action de l'air, on dirigeait horizontalement sur le petit mobile un courant d'air au moyen d'un appareil disposé de telle façon que la vitesse d'écoulement fût constante dans toute la section de l'orifice. Celui-ci était suffisamment grand pour que le cylindre tout entier fût noyé dans le courant.

Quand la pointe du cône était un peu plus élevée que le centre de gravité, celle-ci s'élevait, elle s'abaissait au contraire quand la pointe était au-dessous du centre. Cette expérience indique clairement que le point d'application de la résultante du courant fluide, ou le centre de résistance, se trouvait entre le centre de gravité et le sommet du cône.

Le fait s'explique facilement quand on réfléchit que si l'inclinaison de l'axe sur la direction de la vitesse est faible, la majeure portion de la résistance que rencontre le projectile a lieu sur la partie conique ou sur l'ogive, tandis que la partie cylindrique n'en subit qu'une très faible portion.

Force retardatrice et force déviatrice. — La résistance de l'air transportée au centre de gravité n'a pas en général une direction qui coïncide avec la direction du mouvement ; on la décompose suivant deux directions (fig. 6) : l'une OT, directement opposée au

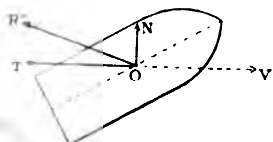


Fig. 6.

sens de la vitesse, l'autre ON, perpendiculaire à cette direction. La première composante ne fait que retarder le mouvement, c'est la *force retardatrice,* l'autre en change la direction, c'est la *force déviatrice.*

Quand l'angle formé par la direction de la vitesse et l'axe n'est pas très considérable, la déviation a toujours lieu dans le sens indiqué par la pointe du projectile : la chose est du reste assez claire par elle-même ; on démontre, d'autre part, par le calcul que si la force retardatrice croît avec l'obliquité, la force déviatrice est toujours tournée dans le sens indiqué par la pointe du projectile. (Voir Notes IV et V.)

Nous avons supposé jusqu'ici que le projectile n'était animé que d'un mouvement de translation, ou tournait exactement autour de son axe de figure. Mais dès la première inflexion de la trajectoire, la vitesse angulaire résultant du couple perturbateur, en se composant avec celle que le projectile possède déjà, donne lieu à un déplacement de l'axe de rotation, lequel continue à changer de position. Mais la vitesse angulaire initiale étant toujours très grande relativement à celle que peut lui communiquer l'action oblique de l'air ; il en résulte que l'axe instantané de rotation reste toujours très voisin de l'axe de figure : nous les considérerons pour cette raison comme coïncidant.

Conclusion. — Nous pouvons donc conclure de ce qui précède que l'action de l'air sur un projectile oblong, animé d'un mouvement rapide de rotation autour de son axe de figure, et dont le centre de gravité se meut dans une direction différente de celle de cet axe, peut se réduire :

1° A une force retardatrice directement opposée à la direction du mouvement ;

2° A une force déviatrice perpendiculaire à la première, située dans le plan de résistance et dirigée vers le côté indiqué par la pointe ;

3° A un couple perturbateur dont le plan coïncide avec le plan de résistance.

Quand l'angle que fait l'axe de figure avec la direction de la vitesse n'est pas très considérable, le couple perturbateur tend à

éloigner la pointe du projectile de la direction de la vitesse, et sa valeur peut être considérée comme proportionnelle au sinus de l'obliquité, c'est-à-dire de l'angle formé par la vitesse avec l'axe de figure.

§ 2.

Rotation des projectiles oblongs.

Vitesse angulaire initiale. — Le projectile en sortant de la bouche à feu est animé d'une vitesse angulaire dont la grandeur dépend de la vitesse initiale et de l'inclinaison des rayures. Supposons d'abord que cette inclinaison soit constante, que h soit le pas de l'hélice, et V la vitesse initiale. Si dans une seconde le projectile tend à parcourir V mètres, dans le même temps il tend à faire autant de tours que h est contenu dans V, c'est-à-dire $\frac{V}{h}$.

Comme, d'autre part, à chaque tour un point situé à l'unité de distance de l'axe parcourt 2π, la vitesse angulaire est

$$r = \frac{2\pi V}{h}.$$

Soit θ, l'inclinaison de la rayure sur la génératrice, et R le rayon de l'âme ; on a :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\pi R}{h} \qquad \text{et par suite} \qquad r = \frac{V}{R}\operatorname{tg}\theta.$$

Si l'inclinaison des rayures n'est pas constante, il est évident que la vitesse angulaire dépend uniquement de l'inclinaison finale. Si donc θ représente l'inclinaison finale, l'expression précédente est encore vraie, bien que l'inclinaison soit variable sur tout le parcours de l'âme.

Mouvement d'un projectile oblong relativement à son centre de gravité. — Les forces qui, conjointement avec le poids, modifient à chaque

instant le mouvement de translation d'un projectile, dépendent non seulement de sa vitesse, mais aussi de la position de son axe, qui varie à chaque instant sous l'influence du couple perturbateur. Le problème du mouvement de translation dans le cas général ne peut donc pas être traité en dehors de celui du mouvement de rotation, et inversement, puisque l'intensité du couple varie, elle aussi, avec la vitesse du projectile.

L'étude simultanée des deux mouvements, même dans le cas où l'on connaîtrait les fonctions qui représentent les forces et le couple de la résistance de l'air, présente de grandes difficultés au point de vue de l'analyse. Nous nous bornerons ici à faire connaître les caractères principaux des deux mouvements.

Nous étudierons d'abord le mouvement pendant un temps très court, pendant lequel l'arc de trajectoire décrit puisse être considéré comme rectiligne.

Dans ce cas, le mouvement progressif n'a pas d'action sur la rotation ; nous pouvons donc, en étudiant cette dernière, supposer le centre de gravité fixe, et le projectile réduit à un solide de révolution animé d'une vitesse angulaire très rapide autour de son axe de figure et soumis à l'action d'un couple dont le plan passe par ce même axe, et par la droite fixe suivant laquelle est dirigé le mouvement de translation. Le moment de ce couple est proportionnel au sinus de l'obliquité, si celle-ci est faible.

Réduit à cette simplicité, le mouvement du projectile est tout à fait analogue à celui d'une toupie. En effet, dans la toupie, on a un mouvement très rapide de rotation, un point fixe (correspondant au centre de gravité du projectile), une droite fixe, la verticale (qui correspond à la tangente à la trajectoire, c'est-à-dire à la direction supposée fixe du mouvement de translation), et un couple proportionnel au sinus de l'obliquité, qui tend à faire tomber la toupie, c'est-à-dire à éloigner son axe de la verticale, comme le couple perturbateur tend à éloigner l'axe de figure du projectile de la tangente à la trajectoire. Dans le cas de la toupie, on démontre et on constate que, tandis que le corps tourne très rapidement autour de l'axe de figure, celui-ci tourne lentement et dans le sens de la rotation autour de la verticale, en décrivant autour de celle-ci un cône. Le même phénomène a lieu pour le projectile : pendant qu'il

tourne très rapidement autour de son axe de figure, celui-ci tend à tourner lentement et dans le même sens de la rotation, autour de la tangente. Le mouvement conique est appelé dans ce cas *direct*.

Si la toupie est disposée de manière à avoir son centre de gravité au-dessous du point fixe, c'est-à-dire de façon que son axe tende non plus à s'éloigner de la verticale, mais à s'en rapprocher, le mouvement conique se fait en sens contraire de la rotation. Il en est de même pour le projectile : si le centre de résistance est en arrière du centre de gravité, le mouvement conique a lieu en sens contraire de la rotation. Le mouvement dans ce cas est dit *rétrograde*.

On démontre en mécanique rationnelle que la vitesse angulaire autour de l'axe de figure reste constante et égale à r, et que si le couple est $K \sin \theta$, θ étant l'inclinaison de l'axe sur la verticale, la vitesse angulaire moyenne du mouvement conique est $\frac{K}{Ar}$, A étant le moment d'inertie polaire du mobile. On voit donc que le mouvement conique est d'autant plus lent que Ar est plus grand ; et, en effet, il est très lent.

Au moyen de ces notions, il est facile d'expliquer les principaux caractères de la trajectoire des projectiles oblongs et la *dérivation* qui représente la quantité dont le projectile s'éloigne du plan de tir.

§ 3.

Dérivation.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que la rotation imprimée par les rayures au projectile est telle que sa surface supérieure se meut de droite à gauche relativement à l'observateur placé derrière la bouche à feu.

Au moment où le projectile sort de la pièce, son axe de figure coïncide avec la tangente à la trajectoire.

Immédiatement après sa sortie, par l'effet de la gravité, la trajectoire est déjà courbe, et la tangente détermine avec l'axe de figure un plan que nous avons appelé plan de résistance, et qui

contient les forces appliquées au centre de gravité, provenant de la résistance de l'air, l'une dirigée suivant la tangente, force *retardatrice,* l'autre normale, force *déviatrice.* Ce plan contient également le couple perturbateur, qui renverserait le projectile, s'il ne possédait pas la rotation, *mais la rotation produit la stabilité.* En vertu de cette rotation, l'effet du couple perturbateur se réduit à ceci : l'axe du projectile, en se séparant de la tangente, prend un mouvement conique, et sort par conséquent du plan de tir. Ce mouvement reste *direct,* tant que le centre de résistance est en avant du centre de gravité ; il deviendrait *rétrograde,* si le centre de résistance passait en arrière.

L'axe du projectile, aussitôt que ce dernier est sorti de la pièce, commence donc à tourner de droite à gauche autour de la tangente, et continue à tourner dans le sens de la rotation, tant que le centre de résistance ne passe pas en arrière du centre de gravité. Mais cela n'arrive que dans des cas exceptionnels et quand l'angle de projection est très grand.

L'axe de figure sortant du plan de tir, le plan de résistance se sépare du même plan. Par suite, en vertu de la force déviatrice, le centre de gravité sort également du plan de tir et se porte vers *la gauche,* en décrivant un arc de courbe tangent à ce plan : cet arc projeté sur un plan horizontal donne une courbe convexe par rapport à la trace du plan de tir, et tangente à cette dernière.

La dérivation se manifeste, en général, du côté de la rotation de la partie supérieure du projectile, mais elle est susceptible de grandes anomalies, à cause des agitations de l'atmosphère, qui donnent lieu à des forces déviatrices supérieures presque toujours à la faible force déviatrice provenant de l'obliquité de l'axe du projectile sur le plan de tir.

Les difficultés analytiques que l'on rencontre dans le calcul de la dérivation, comparées à sa petitesse et à ses anomalies, ont fait renoncer à la déterminer pour les applications pratiques.

On peut, pour les mêmes raisons, considérer comme négligeables les autres perturbations qui peuvent naître dans le mouvement de translation du projectile, à cause de la faible obliquité de l'axe de figure sur la direction de la tangente à la trajectoire. En effet, en tenant compte de cette obliquité, les résultats que l'on obtient,

comparés avec ceux de l'expérience, ne sont pas plus satisfaisants que si l'on négligeait cette obliquité, c'est-à-dire en regardant la résistance comme directement opposée à la vitesse, et simplement fonction de cette dernière [1].

Quand on veut avoir une valeur approchée de la dérivation, on peut faire usage de l'équation empirique

(1) $$\text{Dérivation} = hV^2 \sin^2\varphi.$$

Cette formule est due à Hélie, qui l'a déduite d'expériences où toutefois V ne surpassait pas 330 m. De ces expériences [2], on déduit aussi

(2) $$h = \frac{0,485}{C} a \operatorname{tg}\theta,$$

---

[1] La théorie de la rotation des projectiles, si elle n'a pas une grande importance pratique, est intéressante au point de vue scientifique. Les principaux travaux sur cette question sont dues au comte de Saint-Robert (*Mémoires scientifiques*, t. I), au général Mayevski (*Traité de balistique*) et au comte de Sparre (*Mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fouet*. Paris, 1875).

[2] Les expériences de Gâvre 1860-1861 sur des obus de 16^c et de 22^c avaient conduit à prendre 2 pour exposant de la vitesse et du sinus de l'angle d'inclinaison, de sorte que les dérivations étaient suffisamment bien représentées pour ces deux projectiles par

$$D = 0,000721\, V^2 \sin^2\varphi \quad \text{obus de 16},$$
$$D = 0,000737\, V^2 \sin^2\varphi \quad \text{obus de 22}.$$

Les obus de 22^c, sans être tout à fait semblables à ceux de 16^c, se rapprochaient de la similitude ; ainsi pour l'obus de 22^c on avait $\frac{p}{a^3} = 0,0001323$, et pour celui de 16^c $\frac{p_1}{a^3} = 0,0001357$. De ce rapprochement on avait cru pouvoir conclure que pour des projectiles semblables et de même densité, les actions déviatrices étaient les mêmes lorsque les vitesses étaient égales.

En admettant alors que le coefficient numérique H était proportionnel à $\frac{p}{a^3}$, on posait

$$D = H \frac{a^3}{p} V^2 \sin^2\varphi.$$

En 1876-1877, des expériences nouvelles furent faites avec deux canons de 16^c ayant des inclinaisons de rayures différentes, 4° et 8°. Les deux canons tiraient le même projectile, avec la même charge et sous la même inclinaison. On reconnut alors que les dérivations étaient proportionnelles à la tangente de l'angle final des rayures. Par suite, la formule précédente fut mise sous la forme

$$D = H' \frac{a^3}{p} \operatorname{tg}\theta\, V^2 \sin^2\varphi.$$

nfin en 1876 et 1877 d'autres expériences, faites également sur des obus de 16^c, montré que pour des vitesses supérieures à 450 m et inférieures à 530 m, les dérions sont simplement proportionnelles à la vitesse. On comprend, en effet, que si

θ étant l'inclinaison finale des rayures, a le diamètre du projectile en mètres et C le coefficient balistique.

---

la dérivation augmente d'abord rapidement avec la vitesse, cet accroissement doit se ralentir et finir par être remplacé par un décroissement, puisque $D = 0$ pour $V = \infty$.

L'expression de D contient donc une fonction de V, qui croît d'abord, puis décroît ensuite. L'exposant du sinus de l'inclinaison varie probablement aussi, et il y aurait lieu de s'en assurer expérimentalement. (*Note du traducteur.*)

CHAPITRE XII.

ÉCARTS MOYENS. — ROTATION IRRÉGULIÈRE.

---

§ 1.

Causes des écarts. — En exécutant des tirs avec une même arme dans des conditions autant que possible identiques, on obtient en réalité autant de trajectoires qu'on a tiré de coups. Elles sont toutes réunies à la bouche et forment un faisceau qui va en s'élargissant à mesure que les distances augmentent. Les variations de position et de forme des trajectoires, relatives à chaque coup, dépendent de plusieurs causes, qui, soit à l'origine, soit pendant le trajet, tendent à faire dévier soit dans un sens, soit dans un autre, le projectile de la trajectoire moyenne, c'est-à-dire de celle qui occuperait dans le faisceau la position centrale, si le nombre de coups tirés était infiniment grand.

Les causes des écarts sont très nombreuses, mais les causes immédiates peuvent être ramenées aux suivantes :

1° Les variations de la direction initiale ;

2° Les variations de la vitesse initiale ;

3° Les variations du coefficient balistique ;

4° La rotation irrégulière du projectile ;

5° Les agitations de l'atmosphère.

En ne considérant que les écarts des trajectoires particulières comparativement à la trajectoire moyenne, il n'y a pas lieu de considérer l'action régulière du vent, ni la rotation régulière du projectile, ni la rotation de la terre [1]. Ce sont ce qu'on appelle les causes *permanentes*, elles agissent toujours dans un sens déter-

[1] La rotation de la terre n'a pas d'influence sur le tir pratique. Consulter sur ce sujet le *Mémoire classique* de Poisson, les *Mémoires scientifiques* du comte de Saint-Robert. Voir également *Revue d'artillerie*, t. V, décembre 1874, la note du commandant Astier.

miné, sur toutes les trajectoires du faisceau ; elles influent par conséquent sur la directrice de celui-ci, c'est-à-dire sur la trajectoire moyenne, mais n'ont pas d'effet sensible sur l'ouverture du faisceau.

Les écarts produits par les trois premières causes ont été examinés dans le chapitre IX. L'écart moyen dû à chacune d'elles s'obtiendra évidemment en remplaçant $\Delta\varphi$, ΔV, $\Delta C'$ et Ψ par les moyennes arithmétiques trouvées expérimentalement pour chacune d'elles. L'écart moyen dû à l'action simultanée des trois causes perturbatrices se détermine au moyen du théorème suivant, que l'on démontre dans le calcul des probabilités :

Si dans un nombre considérable d'épreuves, plusieurs causes perturbatrices indépendantes les unes des autres agissent simultanément, le carré de l'écart moyen est égal à la somme des carrés des écarts moyens, que produiraient les différentes causes, si chacune d'elles agissait isolément.

En appelant ΔX_1, ΔX_2, ΔX_3 les écarts moyens en portée dus aux variations moyennes des quantités φ, V, C, le carré de l'écart moyen résultant est donc :

$$\Delta X^2_{123} = \Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \Delta X_3^2.$$

Quant à l'écart moyen produit par les agitations variables de l'atmosphère, rien de positif n'existe à ce sujet, leur nature même s'opposant à toute espèce de calcul.

Il ne reste donc que l'irrégularité dans la rotation, qui est, en réalité, la cause la plus puissante des écarts. Pour les projectiles oblongs, elle peut provenir : 1° du déplacement du centre de gravité causé par la disposition variable de la charge intérieure et par le défaut d'homogénéité de la fonte; 2° de la position défectueuse du projectile dans l'âme; 3° des chocs qui peuvent se produire dans l'âme, si la pièce se charge par la bouche; mais la valeur des écarts dus à ces causes n'a pas encore fait l'objet d'études, ou tout au moins celles-ci n'ont pas fourni de résultats bien déterminés. C'est seulement en tirant un grand nombre de coups dans un air calme, et en déduisant l'écart moyen total ΔX, et en appliquant

le théorème précédent, c'est-à-dire $\overline{\Delta X^2} = \overline{\Delta X^2}_{123} + \Delta X^2_4$, qu'on pourrait trouver l'écart moyen ΔX_4, dû à l'irrégularité de la rotation.

Mais la question principale dans les applications est l'écart total.

Hélie, en se basant sur de nombreux résultats pratiques de tir, a donné les formules empiriques suivantes :

$$\text{Écart moyen en direction} = h' V^2 \sin \varphi,$$
$$\text{Écart moyen en portée} = \sqrt{h'^2 V^4 \cos^2 2\varphi + h''^2 V^4 \sin^2 2\varphi}$$

h' et h'' étant deux quantités constantes pour chaque projectile et pour chaque bouche à feu. Ces coefficients se déduisent des expériences, ainsi qu'on le verra dans la construction des tables de tir.

La rotation irrégulière a été étudiée d'une façon assez suivie pour les projectiles sphériques, et nous ferons connaître, dans le paragraphe suivant, les observations et les tentatives qui ont été faites pour l'annuler ou la rendre régulière, avant l'adoption des projectiles oblongs.

§ 2.

Projectiles sphériques. — Le mouvement de rotation des projectiles sphériques est occasionné par les battements, et par la non-coïncidence du centre de gravité avec le centre de figure.

Quand le projectile vient à toucher les parois de l'âme, le frottement F (fig. 7) développé au point de contact C, constitue une force qui, transportée de la surface au centre de gravité G, tandis qu'il retarde le mouvement de translation, donne naissance à un couple (F, F'), et par suite à une rotation.

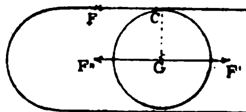


Fig. 7.

Si le choc a lieu à la partie supérieure de l'âme, l'hémisphère antérieur prend un mouvement de bas en haut, et inversement. Quand le choc a lieu à droite, l'hémisphère antérieur prend un mouvement de gauche à droite, et inversement quand le choc a lieu à gauche. La vitesse angulaire dépend évidemment de l'intensité des chocs, de leur obliquité, de leur nombre et du point où ils se produisent. Le premier choc qui produit une cavité ou sorte de logement semble, quant au sens de la rotation, avoir une influence prédominante. Relativement à l'intensité de la rotation, on ne connaît pas d'expérience qui ait été faite dans sens.

Les défauts d'homogénéité de la fonte font que le centre de gravité du projectile ne coïncide jamais exactement avec le centre de figure. L'excentricité qui en résulte, souvent considérable relativement au diamètre, donne lieu à un mouvement de rotation.

En effet, la pression, ou le choc des gaz (fig. 8) sur le projectile, agissant normalement à sa surface, la force d'impulsion F passe nécessairement par le centre de figure. Si le centre de gravité n'est pas sur la direction de cette force, mais en G, en transportant la force F en G, on donne lieu à un couple (F, F′) produisant le mouvement de rotation, tandis que la force F″ produit la translation. Quand le centre de gravité est au-dessus de l'axe de figure, l'hémisphère antérieur se meut dans le mouvement de rotation, de dessous en dessus, et *vice versâ*. Si le centre de gravité est à droite, le mouvement de l'hémisphère antérieur a lieu de gauche à droite, et inversement, quand le centre de gravité est à gauche.

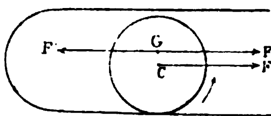


Fig. 8.

Après avoir fait une demi-révolution dans l'âme, le choc des gaz agit par rapport à la rotation en sens inverse, puisque, dans cette position du projectile, son centre de gravité occupe une position opposée par rapport au centre de figure, mais il est difficile que le projectile puisse décrire dans l'âme plus d'un quart de tour ; de toute façon, quel que soit le sens de la rotation et n'importe comment elle peut varier, le sens de la rotation définitive reste ce qu'il était primitivement à l'origine du mouvement.

L'expérience a démontré ce qui suit :

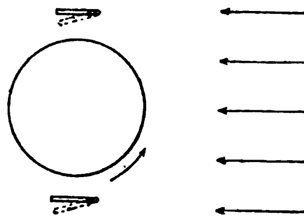
1° Quand l'excentricité n'est pas supérieure à $^1/_{100}$ du diamètre, aussi bien pour les projectiles pleins que pour les projectiles creux, les battements influent surtout sur le mouvement de rotation.

2° Quand l'excentricité augmente, c'est elle qui a le plus d'influence.

§ 3.

Expériences du docteur Magnus sur la rotation des projectiles. — Si un corps de révolution tournant autour de son axe est soumis à l'action d'un courant d'air parallèle à cet axe, la pression est la même sur les côtés opposés. Quand la direction du courant est normale à l'axe de figure, la pression de l'air devient plus considérable sur la portion de surface, qui se meut en sens inverse du courant, et moindre sur l'autre portion.

Ce fait a été constaté par le Dr Magnus de Berlin au moyen de l'expérience suivante (fig. 9).


Fig. 9.

Il exposait à l'action d'un courant d'air

horizontal produit par un ventilateur un cylindre tournant sur son axe, qu'il plaçait tantôt parallèle au courant, tantôt perpendiculaire. Il fixait à droite et à gauche du courant et très près du cylindre deux petites banderoles très légères et très mobiles. Le centre de ces dernières était placé dans le prolongement d'un diamètre horizontal du cylindre perpendiculaire au courant. Quand l'axe de rotation était parallèle à la direction du courant, les plans des banderoles n'éprouvaient aucun mouvement; quand l'axe était normal, l'une des deux s'approchait, tandis que l'autre s'éloignait; la banderole qui s'éloignait était celle qui était la plus voisine de la surface, se déplaçant en sens inverse de l'air; au contraire, celle qui s'approchait était celle qui était voisine de la portion de surface se déplaçant dans le même sens que le courant. Ce fait indique évidemment une augmentation de pression de l'air entre le projectile et la banderole repoussée, et à une diminution de pression entre le même projectile et la banderole attirée.

L'explication de ce fait appartient plutôt à la physique qu'à la balistique. Toutefois, l'augmentation de pression sur la surface qui se meut en sens inverse du courant, peut s'expliquer immédiatement, en remarquant que l'air adhérent à la surface détermine dans la rotation un courant circulaire; celui-ci se rencontrant sur l'un des côtés avec un courant rectiligne, doit nécessairement produire une condensation du fluide. Quant à l'explication de la raréfaction, qui a lieu sur la partie dans laquelle les courants sont de même sens, nous renvoyons au mémoire de Magnus(1).

Cette différence de pression, exercée sur les deux faces du cylindre, équivaut à une force tendant à transporter les cylindres du côté vers lequel se meut dans le mouvement de rotation la portion de surface qui est directement exposée au courant.

Quand on lance un projectile sphérique dans l'air avec un mouvement de rotation autour d'un diamètre normal à la direction de la vitesse, des phénomènes analogues à ceux qui ont été observés par Magnus se manifestent. Il est en effet évident que l'action de l'air provenant du mouvement de translation du projectile équivaut à celle d'un courant marchant en sens contraire.

Si le mouvement de rotation est tel que l'hémisphère antérieur se meut de bas en haut, la pression maximum s'exerce sur la portion dont le mouvement de rotation concorde avec le mouvement de translation, c'est-à-dire sur l'hémisphère antérieur. Par conséquent, le projectile dévie en haut, et la portée est supérieure à la portée moyenne. Le fait a été observé avec des projectiles excentrés, toutes les fois qu'en faisant le chargement on plaçait le projectile dans l'âme avec le centre de gravité au-dessus du centre de figure. En plaçant le centre de gravité au-dessous, la portée était

---

(1) *Revue de technologie militaire*, par Delobel, t. I, Liège 1854, page 382.

inférieure à la portée moyenne. En le plaçant à droite ou à gauche, on obtenait une déviation à droite ou à gauche du plan de tir. Tous ces faits s'accordent très bien avec la théorie de Magnus.

Il arrive quelquefois que le projectile en sortant de la bouche à feu dévie d'abord d'un côté du plan de tir et tombe ensuite de l'autre côté ([1]). Le fait peut s'expliquer de la façon suivante. Si le projectile, avant sa sortie de la bouche à feu, vient rencontrer la paroi gauche de l'âme, il reçoit immédiatement, par suite du choc, une déviation vers la droite du plan de tir, mais la rotation provenant de ce choc est telle que l'hémisphère antérieur se meut de droite à gauche : il en résulte donc une force déviatrice qui reporte le projectile vers le plan de tir, et qui le fait tomber à gauche de ce dernier.

§ 4.

Projectiles excentrés. — La rotation est la cause principale des écarts des projectiles sphériques. Avant l'adoption des canons rayés, de nombreuses études et tentatives ont été faites soit pour annuler cette rotation, soit pour la régulariser.

Pour contre-balancer l'effet de la rotation, on proposa de munir le projectile d'un taquet, disposé de façon à ne pouvoir se séparer de lui qu'une fois sorti de la bouche à feu. Cette disposition n'a pas donné de bons résultats, parce que le taquet se détachait la plupart du temps avant sa sortie.

Thiroux proposa, du moins pour les bombes, de munir le projectile d'un appendice qui ne pouvait s'en séparer, c'est-à-dire un autre projectile plus petit, réuni au premier par l'intermédiaire d'une chaîne. Comme la rotation que tendait à prendre la bombe n'était pas très rapide, le second projectile, restant en l'arrière, empêchait la rotation du premier.

D'autres dispositions ont été essayées, mais elles ont donné des résultats nuls ou tellement médiocres, qu'ils ne compensaient pas les inconvénients de leur adoption en service. On a proposé alors de régulariser la rotation en donnant aux projectiles sphériques une excentricité artificielle considérable, et en les plaçant toujours dans une position identique dans l'âme.

Toutes ou presque toutes les artilleries d'Europe ont entrepris de nombreuses expériences sur le tir des projectiles excentrés, les conclusions n'ont pas toujours été concordantes quant au degré de leur précision. Il a paru toutefois hors de doute que les bouches à feu courtes étaient celles qui utilisaient le mieux l'excentricité des projectiles ; et la raison en est simple.

([1]) Ce fait a été contaté la première fois par Lombard. Pour déterminer la direction initiale des projectiles, il plaçait à quelques mètres de la pièce un diaphragme en bois ; quelquefois le projectile, après avoir traversé le diaphragme à droite du plan de tir, tombait à gauche, ou *vice versâ*.

les battements dans ces bouches à feu étant peu nombreux. Quant aux autres, les avantages n'ont pas semblé compenser les difficultés que présentait la mise en place dans une position constante des projectiles au fond de l'âme.

En Prusse, on avait adopté tout un système d'obus et de bombes excentrés. L'excentricité était due à un déplacement du centre de la chambre intérieure du projectile.

Cette chambre n'était pas sphérique, mais présentait la forme d'un ellipsoïde allongé de révolution, ayant son grand axe assez différent du petit, et placé perpendiculairement au plan de tir. Cette disposition avait pour but la stabilité du mouvement de rotation ([1]).

Pour le tir de plein fouet, on plaçait le centre de gravité en haut, et pour le tir en bombe en bas.

Quand le centre de gravité était en haut, le tir était tellement tendu que l'angle de chute était parfois plus petit que l'angle de projection. Quand le centre était en bas, la rotation produite par l'excentricité s'ajoutant à celle qui était produite par le premier choc du gaz sur le projectile, et du choc de ce dernier sur la génératrice inférieure de l'âme, la rotation résultante étant plus rapide, la précision était plus grande. Par l'effet de cette rotation la courbure de la trajectoire était plus prononcée que dans le cas ordinaire, ce qui était un avantage dans le tir courbe, puisqu'on pouvait alors obtenir avec un angle relativement faible d'élévation, un angle de chute considérable.

§ 5.

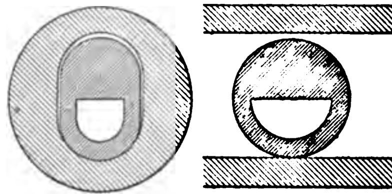
Projectiles lenticulaires. — Avant l'adoption des projectiles oblongs, on a étudié d'autres sortes de projectiles dans le but d'utiliser le mouvement de rotation, non seulement au point de vue de la précision du tir, mais aussi de sa tension, et dans de meilleures conditions qu'on ne l'avait fait pour les projectiles excentrés.

([1]) Pour que la rotation d'un projectile soit stable, on cherche à ce que celle-ci s'effectue autour de l'un des deux axes principaux auxquels appartient le plus grand ou le plus petit moment d'inertie. Par conséquent, l'axe de figure d'un corps de révolution est un axe de stabilité, puisque le moment d'inertie relatif à cet axe est maximum ou minimum, les deux autres axes étant égaux. Cet axe est donc le seul axe de stabilité, et le projectile est d'autant plus stable qu'il a un moment d'inertie plus considérable par rapport à cet axe.

Les projectiles sphériques excentrés, de la façon dont ils sont construits ordinairement, sont des corps de révolution autour de la ligne des centres : par conséquent, leur rotation s'effectuant autour d'un axe qui n'est pas l'axe de figure doit être instable. Et c'est dans le but d'éviter cet inconvénient que l'artillerie prussienne avait donné au vide intérieur des projectiles la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé.

Les projectiles lenticulaires, tout au moins au point de vue théorique, paraissent pouvoir remplir le but, quand ils sont lancés de façon que leur plan équatorial coïncide avec le plan de tir, et qu'ils sont animés d'un mouvement de rotation autour de leur axe. Ils présentent alors sur les projectiles sphériques excentrés deux avantages incontestables, d'abord celui de posséder sous le même volume une résistance moindre, et ensuite celui d'avoir une plus grande stabilité sur leur axe de rotation.

De Puydt, de l'artillerie belge, fut un des premiers à proposer l'emploi de cette espèce de projectile. Il avait adopté la forme (fig. 10) d'une lentille excentrée, ou d'un tore limité latéralement par deux plans. L'épaisseur du tore était de 80^{mm}, et le diamètre d'équateur de $113^{mm},5$. L'excentricité résultait de l'existence d'un vide intérieur, ayant une forme semblable au tore extérieur. Le poids était de $3^{kg},53$, et l'excentricité $5^{mm},3$. L'âme avait la même forme que le projectile, avec un vent de 2^{mm}.


Fig. 10.

Celui-ci était introduit relié à sa gargousse, ayant le centre de gravité en haut, et il était lancé sous un angle de 1° avec une charge de $^1/_3$ du poids, lui imprimant une vitesse de 510^m. La portée fut pour deux projectiles tirés de $2,600^m$ à $2,700^m$, et l'écart latéral presque nul. Le tir d'un troisième projectile donna une portée de $2,232^m$, et une déviation de 326^m. Un quatrième projectile tiré dans les mêmes conditions donna une portée de $2,050^m$ et une déviation de 198^m.

Ces résultats laissent beaucoup à désirer au point de vue de la précision, mais sont fort remarquables au point de vue de la portée, portée plus que sextuple de celle que l'on aurait obtenue dans des conditions identiques de tir avec des projectiles n'ayant pas de mouvement de rotation. Un autre projectile, en effet, lancé sans rotation et pourvu à cet effet d'un taquet en bois, avait donné une portée de 410^m.

Le comte de Saint-Robert a également proposé des projectiles lenticulaires, mais concentriques, c'est-à-dire ayant leur centre de figure coïncidant avec le centre de gravité, la rotation était produite par l'arme elle-même (fig. 11). Parmi tous les moyens imaginés par lui en 1877 pour communiquer le mouvement de rotation au projectile, celui auquel il avait donné la préférence consistait à donner une certaine courbure dans le sens du plan de tir, cette courbure ayant sa concavité tournée vers le sol. Le projectile en chaque point de son parcours dans l'âme, tendait à suivre la tangente à la courbe, mais obligé par la paroi de suivre sa courbure, il en résultait une pression normale qui n'était autre que la force centrifuge. Cette pression donnait lieu au point de contact à une force de frottement, laquelle, transportée sur l'équateur du mobile, engendrait le mouvement de

rotation, mouvement qui, relativement à la portion antérieure, était évidemment dirigé de bas en haut.

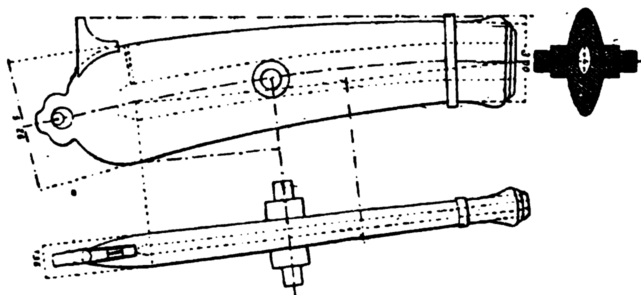


Fig. 11.

Étant donnée la grande vitesse des projectiles, il suffisait d'une très faible courbure pour leur communiquer une très grande vitesse angulaire. En prenant comme directrice de la courbe de l'âme un arc de cercle, le comte de Saint-Robert avait trouvé, que pour imprimer une vitesse de 100 tours par seconde à un projectile de 3^{kg}, le rayon de courbure de l'axe de la pièce devait être plus grand que 7^m, et la flèche plus petite que $0^m,04$. Il n'y avait donc pas à craindre que la courbure de la pièce rendît trop difficile le chargement. Pour un fusil, le rayon était de 21^m et la flèche de $0^m,007$ [1].

Aux projectiles lenticulaires, on peut objecter d'une façon générale que : 1° l'axe de rotation étant parallèle à l'axe des tourillons, quand celui-ci n'est pas horizontal, il en résulte une déviation latérale d'autant plus grande que cet axe est incliné sur l'horizon ; 2° la position éventuelle du centre de gravité, en dehors du plan d'équateur du projectile ne donne pas de perturbations sensibles, quand le projectile tourne très rapidement autour de son axe, mais le premier choc des gaz, dans l'intérieur de l'âme, peut provoquer un déplacement du plan d'équateur suffisant pour coincer le projectile [1].

Les qualités des projectiles oblongs qui les ont fait remplacer les projectiles sphériques et les projectiles lenticulaires sont :

1° La précision ;

2° La masse relativement considérable qu'ils possèdent à égalité de section, par rapport aux projectiles sphériques, et *à fortiori* aux projectiles lenticulaires ;

---

(1) Saint-Robert, *Mémoires scientifiques*, t. II, p. 47. Voir également *Giornale d'Artiglieria*, 1873, p. 83-88.

3° La possibilité d'employer une fusée percutante.

Les projectiles oblongs ont été proposés en 1845 par le général Giovanni Cavalli [1].

NOTE DU TRADUCTEUR

La marine française a essayé, en 1873, des mortiers à disques, dont l'axe de l'âme était rectiligne, nous ne parlerons pas d'un premier essai fait avec de petites charges sur un ancien mortier en fonte qui éclata à la charge de 300^gr. La section de l'âme du mortier présentait la forme d'un rectangle dont les faces supérieures étaient surmontées par deux triangles à contours arrondis. Une large rayure rectiligne forçait le centre du disque à suivre l'axe de la pièce et une petite rayure parabolique (inclinaison finale 5°) conduisait un tenon fixé sur le projectile. Le tir a été effectué au moyen de projectiles de deux espèces, la première était un disque creux avec tenon venu de fonte, et garni d'une ceinture en cuivre dans la partie destinée à s'appuyer sur le flanc de la rayure. Le disque de la seconde espèce ne possédait pas de tenons, son contour latéral était en dents de scie, on le plaçait dans l'âme de façon que l'action du gaz sur les dents lui donnât la rotation nécessaire. Les premiers résultats obtenus montrèrent l'insuffisance des dents au point de vue de la rotation. Le poids des projectiles était de 51^kg et la charge de 0^k,682. L'angle de tir de 5°. Les disques à tenons se maintinrent parfaitement sur la ligne de tir après plusieurs ricochets, ainsi que le montre le tableau ci-dessous :

ANGLE de tir.	1er POINT de chute.		2e POINT de chute.		3e POINT de chute.		4e POINT de chute.		5e POINT de chute.	
	Distance.	Déviation.	Distance.	Déviation.	Distance	Déviation.	Distance.	Déviation.	Distance.	Déviation.
5°	125,4	0,15 G	189,0	0,8 G	217,5	0,1 G	308,0	0		
5°	114	0,2 G	151,0	0,2 D	214,0	0,1 D	280,0	0,3 D	320,0	0,4 D
5°	133	0,0	196,0	0,9 G	261,0	0,4 G	302,0	0,5 D		

L'inclinaison de la rayure ayant paru trop forte, et nuisible au point de vue de l'usure des tenons, un second mortier fut construit avec une rayure parabolique dont l'inclinaison finale était de 4°.

---

[1] On peut consulter les deux éloges historiques du lieutenant-colonel Siacci, sur le général Cavalli et sur le comte de Saint-Robert (*Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino*, 1884, et *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 1889).

Les projectiles employés furent lestés à 51^{kg}. On essaya également des disques à tenons excentrés, et pour mettre en évidence l'influence de la rotation sur la portée, certains disques furent placés dans l'âme, les uns avec le tenon en avant, les autres en arrière. Dans le premier cas, la rotation se faisait de bas en haut, dans le second de haut en bas.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus :

ANGLE de tir.	CHARGE.	PROJECTILES. Dési-gnation.			NOMBRE de coups.	PORTÉE moyenne.	ÉCART moyen en portée.	RAPPORT de l'écart moyen à la portée.	DÉVIATION moyenne.
		Dési-gnation.	Position du tenon.	Poids.					
45°	800	D. C.	AV	51	7	1 041	14	0,014	53,7 G
45°	800	D. C.	AR	51	5	1 083	29.6	0,027	33,6 G
45°	1 700	D. C.	AR	51	5	1 936	26	0,013	29,6 D
15°	800	D. C.	AR	51	2	532			15 G
15°	800	D. C.	AV	51	1	553			12 G
18°	800	D. C.	AR	51	1	690			17 G
18°	800	D. C.	AV	51	2	645			11 G
11°	800	D. C.	AR	51	1	469			16 G
45°	1 700	D. E.	0	51	2	1 887			29,5 G
45°	1 500	D. C.	AR	51	1	1 695			18 D
45°	1 600	D. C.	AR	51	1	1 829			21,5 G
45°	1 500	D. C.	AV	51	1	Brisé dans l'âme.			
45°	1 600	D. C.	AV	51	1	Brisé dans l'âme.			
45°	1 700	D. C.	AV	51	1	Brisé dans l'âme.			

Notations. — D. C. Disques concentriques. — D. E. Disques excentriques. — AV Tenon à l'avant. — AR Tenon à l'arriere.

Une autre série d'expériences fut entreprise sur des disques pesant 63^{kg} excentriques tirés à la charge de 2^{k},700 sous l'angle de 45°. La portée moyenne pour 5 coups fut de 2 254 pour les projectiles à tenon avec une déviation à gauche de 16,5 et de 2 095 pour les projectiles sans tenons avec une déviation à droite de 9,8. Les expériences ne furent pas continuées par suite de l'éclatement du mortier. De l'ensemble des expériences, la commission a conclu que les disques excentriques à tenons sont supérieurs aux mêmes disques sans tenons, que les disques ont une portée supérieure à la bombe de 27^{c} pesant environ le même poids sous l'angle de 45° et que les ricochets sous les petits angles sont remarquables par leur amplitude, par leur faible élévation au-dessus du sol, et par la régularité avec laquelle ils suivent la ligne de tir.

(Extrait du *Mémorial d'artillerie de marine.*)

Le commandant Terquem (décédé en 1877) avait également conçu le projet d'un mortier à disque, tourillonnant dans un joint sphérique, de façon à pouvoir lancer le disque sous tous les angles, et que son plan d'équateur pût prendre toutes les inclinaisons par rapport au plan de tir.

Il avait également, dans une note manuscrite que nous avons eue entre les mains, indiqué les principales propriétés des trajectoires des projectiles discoïdes. Malheureusement il nous a été impossible, malgré nos recherches et celles du frère du regretté commandant, de retrouver la note.

Enfin, en 1882, le capitaine Chapel, actuellement commandant, a publié dans la *Revue d'artillerie,* tome XX, page 415, une étude où se trouve mise en relief une propriété nouvelle et curieuse des projectiles discoïdes. Le commandant Chapel a bien voulu, sur nos instances, rédiger une note assez complète sur les propriétés de ces projectiles. Cette note, insérée à la fin du volume, porte le numéro IX.

CHAPITRE XIII.

PÉNÉTRATION DANS LES MILIEUX SOLIDES.

---

§ 1.

Expression de la résistance. — Quand un corps, soumis à l'action d'une force continue, est forcé de pénétrer lentement dans un milieu solide, homogène et que l'on peut considérer comme indéfini, il n'a d'autre résistance à vaincre que celle qui lui est opposée par la cohésion des molécules forcées de s'écarter l'une de l'autre, et par le frottement. Cette résistance varie évidemment avec la section et la forme du corps pénétrant, mais relativement à sa vitesse et, tant que celle-ci ne dépasse pas une certaine limite, on peut l'admettre comme sensiblement constante.

Quand la pénétration résulte du choc d'un projectile animé d'une très grande vitesse, l'hypothèse d'une résistance indépendante de cette vitesse conduit à des résultats qui ne concordent pas avec ceux que donne l'expérience. D'autre part, si l'on étudie la forme du trou creusé par le projectile, on ne tarde pas à reconnaître que la résistance est fonction de la vitesse. En effet, dans

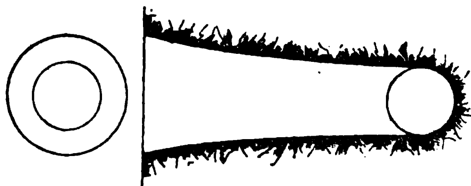


Fig. 12.

les terres argileuses, où le trou conserve sa forme (fig. 12) après le passage du projectile, cette forme est celle d'un entonnoir, plutôt

que celle d'un cylindre; la ligne méridienne est une courbe qui tourne sa convexité vers l'axe ; vers le fond de la cavité, où l'on trouve le projectile tiré, elle diffère peu d'une ligne droite parallèle à la direction du mouvement. L'excès du diamètre du trou sur celui du projectile montre que les molécules ont été non seulement séparées, mais refoulées latéralement. Le diamètre diminue à mesure que la profondeur augmente, ce qui indique clairement que la vitesse acquise par les molécules diminue en même temps que celle du projectile.

C'est en se basant sur ces considérations, que la commission de tir de Metz, à laquelle on doit les principales expériences sur ce sujet (1835-1836), a proposé de représenter la résistance dans un milieu solide par un binôme proportionnel à la section du projectile, dont le premier terme constant se rapporte à la cohésion et au frottement, tandis que le second est proportionnel au carré de la vitesse et se rapporte à la force vive communiquée aux molécules du milieu solide.

La formule de résistance dans les milieux solides est donc de la forme

$$\rho = Si\alpha(1+\beta v^2), \tag{1}$$

S représentant la section du projectile, i un coefficient dépendant de sa forme, α et β deux coefficients variant avec le milieu.

Nous verrons, dans ce qui suit, quelles sont les valeurs de ces coefficients et comment ils ont été déterminés.

Pénétration. — En faisant abstraction de la pesanteur, quantité tout à fait négligeable relativement à la résistance du milieu, l'équation du mouvement est :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gSi\alpha}{p}(1+\beta v^2) = -\frac{i\alpha'}{C}(1+\beta v^2), \tag{2}$$

C étant le coefficient balistique et

$$\alpha' = \frac{\pi g \alpha}{4\,000}.$$

Soit x l'espace parcouru pendant le temps t; nous avons :

$dt = \frac{dx}{v}$, l'équation (2) devient donc :

$$(3) \qquad \frac{vdv}{1+\beta v^2} = -\frac{i\alpha'}{C}dx.$$

Appelons V la vitesse du projectile au moment de sa pénétration dans la masse solide, l'équation (3) intégrée donne

$$(4) \qquad x = \frac{C}{2i\alpha'\beta}\log\frac{1+\beta V^2}{1+\beta v^2}.$$

La pénétration totale, que nous désignerons par X, s'obtiendra en posant $v = o$, nous aurons donc :

$$(5) \qquad X = \frac{C}{2i\alpha'\beta}\log(1+\beta V^2).$$

En indiquant les logarithmes vulgaires par le signe Log, et en posant :

$$\frac{2,3026}{2\alpha'\beta} = \frac{4605,2}{\pi g\alpha\beta} = \gamma,$$

on a

$$(5)' \qquad \frac{iX}{C} = \gamma \operatorname{Log}(1+\beta V^2).$$

Cette équation montre que, si deux projectiles semblables pénètrent dans le même milieu, avec la même vitesse, les pénétrations sont proportionnelles aux coefficients balistiques.

Pour calculer l'expression (5)′ on pose $V\sqrt{\beta} = \operatorname{tg}\lambda$, par suite :

$$(5)'' \qquad \frac{iX}{C} = 2\gamma \operatorname{Log}\frac{1}{\cos\lambda}.$$

Durée de la pénétration. — La durée de la pénétration s'obtient en intégrant l'équation (2), mise sous la forme

$$\frac{dv}{1+\beta v^2} = -\frac{i\alpha'}{C}dt$$

et comme pour $t = o$ $v = V$, on a :

$$t = \frac{C}{i\alpha'\sqrt{\beta}}\left[\operatorname{arc\,tg}(V\sqrt{\beta}) - \operatorname{arc\,tg}(v\sqrt{\beta})\right].$$

En faisant $v = o$, on a la durée de la pénétration totale, c'est-à-dire

$$T = \frac{C}{i\alpha' \sqrt{\beta}} \text{arc tg}(V\sqrt{\beta}) = \frac{C}{i\alpha' \sqrt{\beta}} \frac{\pi}{180} \lambda.$$

Forme de l'entonnoir. — La commission de Metz, en comparant les vides formés par divers projectiles, a reconnu que leur volume était proportionnel à la force vive, et que le coefficient de proportionnalité ne variait qu'avec la nature du milieu ; elle constata en outre que dans les milieux où l'entonnoir conserve la forme qu'il avait après le passage du projectile, les vides formés par des projectiles égaux, mais animés de vitesse différente, affectent au fond des formes identiques, à tel point, qu'on pourrait les emboîter l'une dans l'autre. La commission en a conclu que la portion d'entonnoir, comprise entre deux sections, était proportionnelle à la force vive perdue par le projectile d'une section à l'autre.

Soit y l'ordonnée d'un point quelconque de la section méridienne, par rapport à l'axe. Le volume compris entre l'orifice et la section considérée, d'abscisse x, est

$$\int_0^x \pi y^2 dx.$$

Si v est la vitesse correspondant à cette distance, on aura :

$$(7) \qquad \frac{p}{2g}(V^2 - v^2) = \pi h \int_0^x y^2 dx.$$

(h étant un coefficient variant avec le milieu).

Le premier membre de l'équation précédente représente la variation de force vive, il est donc égal au travail de la résistance, c'est-à-dire à

$$\int_0^x \rho dx.$$

Par conséquent :

$$(8) \qquad \int_0^x \rho dx = \pi h \int_0^x y^2 dx.$$

En différentiant et en remplaçant ρ par sa valeur (1), il vient :

$$(9) \qquad Si\alpha(1 + \beta V^2) = \pi h y^2.$$

Cette relation permet de déterminer le coefficient h. En effet, au fond de l'entonnoir, on a $\pi y^2 = S$, et $v = o$, par suite $i\alpha = h$.

L'équation (9) devient donc :

$$(10) \qquad y^2 = \frac{a^2}{4}(1+\beta v^2).$$

D'après les équations (4) et (5) on a

$$X - x = \frac{C}{2i\alpha'\beta}\log(1+\beta v^2) \qquad 1+\beta v^2 = e^{\frac{2i\alpha'\beta(X-x)}{C}}.$$

Donc

$$y = \frac{a}{2}e^{\frac{i\alpha'\beta(X-x)}{C}},$$

équation d'une logarithmique. Le diamètre de l'entonnoir à l'orifice est :

$$ae^{\frac{i\alpha'\beta X}{C}} = a\sqrt{1+\beta V^2} = \frac{a}{\cos\lambda}.$$

Détermination des coefficients. — Soient X et X′ les pénétrations totales obtenues dans un même milieu, par deux projectiles égaux animés de vitesses V et V′, on a :

$$\frac{X}{X'} = \frac{\mathrm{Log}(1+\beta V^2)}{\mathrm{Log}(1+\beta V'^2)}.$$

Cette équation permet de déterminer, au moyen de méthodes d'approximation, la valeur de β, qui, substituée dans l'expression de X, donne la valeur de α, ou mieux

$$\frac{i}{\gamma} = \frac{C}{X}\mathrm{Log}(1+\beta V^2).$$

Connaissant $\frac{i}{\gamma}$, on aura

$$i\alpha = \frac{4605.2}{\pi g\beta}\frac{i}{\gamma}.$$

C'est de cette façon et en opérant avec des projectiles sphériques, que la commission de Metz, en faisant $i = 1$ a déterminé expérimentalement les valeurs de α et de β pour différents milieux. Les valeurs de α β sont données dans la table IX.

Cette table renferme aussi les valeurs de γ, applicables à la formule (5)′ et les valeurs de γ' dont nous parlerons plus loin.

Les coefficients α et β de la table IX se rapportent spécialement aux projectiles sphériques, les seuls sur lesquels on ait fait des

expériences suivies. En appliquant ces mêmes coefficients aux projectiles oblongs et en comparant les résultats donnés par l'expérience avec ceux fournis par les formules, les différences ne sont pas en général plus grandes que celles qui se rencontrent dans le tir des projectiles sphériques. Par conséquent, dans les applications, tant qu'on n'aura pas fait d'expériences spéciales, on pourra prendre $i = 1$ pour n'importe quel projectile.

La valeur de β est constante pour la maçonnerie, elle est d'environ $0{,}0^{4}15$; elle est également constante pour les diverses essences de bois $0{,}0^{4}2$; mais elle varie pour les terres de 0,000035 à 0,0002. Dans les applications, il y a donc une certaine incertitude sur la valeur du coefficient à employer, les caractères distinctifs des terres n'étant pas toujours bien déterminés.

En prenant tous les milieux $\beta = 0{,}00005$ et en choisissant une valeur convenable pour l'autre coefficient, on ne trouve pas des pénétrations sensiblement différentes de celles que l'on obtiendrait en se servant de la table IX. On a donc adopté pour tous les milieux indiqués dans cette table la formule suivante

$$\frac{X}{C} = \gamma' \operatorname{Log}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{100}\right)^2\right].$$

En prenant pour γ' les valeurs données par la table, on obtient des pénétrations qui diffèrent de celles que l'on obtient par la formule (5), de $^1/_{10}$ tout au plus. Les différences entre les pénétrations effectives et celles qui sont calculées au moyen des formules les plus approchées ne donnent pas des différences moindres.

En classant les différents milieux par un seul coefficient γ', on a en outre l'avantage de voir immédiatement dans l'accroissement du coefficient l'accroissement de la pénétration, puisqu'à égale vitesse de choc, et pour le même coefficient balistique, la pénétration est proportionnelle à γ'.

La table X donne les valeurs de

$$A = \log\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{100}\right)^2\right]$$

pour des vitesses variant de 100 à 500^{m}.

Au moyen de cette table et de la formule $X = C\gamma' A$, on déter-

mine facilement X connaissant γ' et V, et inversement γ' si l'on connaît X et V ([1]).

Les formules précédentes supposent une masse de profondeur indéfinie ; pour pouvoir les appliquer, on admet que, pour les terres, la profondeur doit être environ $\frac{3}{2}$ X ; et pour le bois $\frac{4}{3}$ X.

Dans le fait de la pénétration, la vitesse du projectile va en diminuant, et s'il frappe normalement, elle finit par devenir nulle, et le projectile s'arrête. Il peut même arriver, comme dans le cas de la perforation du bois, que le projectile soit repoussé en arrière. La vitesse limite, à laquelle le projectile ne pénètre plus, peut être considérée comme étant celle pour laquelle la pénétration devient égale au calibre. Si, au lieu de diminuer la vitesse au choc, on augmente l'angle d'incidence, on obtient un ricochet; pour les projectiles sphériques, le ricochet paraît se produire quand la composante normale de la vitesse atteignait cette limite.

Les pénétrations des projectiles oblongs sont les plus irrégulières aux distances de combat. En effet, à ces distances, ils ne se présentent pas par la pointe et, une fois entrés dans le sol, ils dévient beaucoup à cause de leur rotation. On trouve souvent de ces projectiles qui, n'ayant pas éclaté, se présentent avec la pointe tournée du côté de la batterie. Dans les tirs contre les parapets, des projectiles entrés dans le parement extérieur ressortent quelquefois au parement supérieur, et tombent à quelques centaines de mètres plus loin ([2]).

§ 2.

Perforation des cuirasses.

Bien que toutes les artilleries d'Europe aient procédé, et procèdent encore à de nombreuses expériences de tir contre les cuirasses, le problème de la détermination de la force vive, nécessaire

---

([1]) Les valeurs de γ' et de A, depuis $\beta = 0{,}0^{t}5$ ont été calculées par le capitaine Parodi (*Nota sulla penetrazione dei proietti.* — *Rivista d'Artiglieria e Genio*, 1887).

([2]) C. Jouffret, *Les Projectiles*, Fontainebleau, 1881, p. 142. Sur la théorie de la pénétration oblique, le général Mayewski a publié un mémoire dans le tome V de la [...]e *de technologie militaire*, 1866.

à un projectile pour perforer une cuirasse, est loin d'être résolu d'une façon satisfaisante.

La plupart des expériences ont surtout pour but de mettre en évidence les qualités du métal constituant le projectile, c'est-à-dire sa plus ou moins grande résistance à la déformation et à la rupture, au moment du choc; il y a souvent incertitude soit sur la vitesse avec laquelle le projectile pénètre dans la plaque, soit sur celle avec laquelle il en sort. La qualité de la plaque, la résistance de la charpente sur laquelle elle est placée, sont des données très variables. Les projectiles, généralement en fonte dure ou en acier, subissent des déformations, qui absorbent une partie de la force vive, variable d'un coup à l'autre. Enfin la forme antérieure du projectile a une énorme influence sur la façon dont il agit sur la plaque.

Les projectiles entièrement cylindriques, ou ayant l'avant aplati, ne traversent les plaques qu'en en détachant des ménisques assez volumineux ; ceux qui sont surmontés d'un hémisphère détachent des morceaux de moindre dimension et, enfin, ceux qui sont ogivaux, pénètrent la plaque, en refoulant le métal latéralement, et la traversent généralement sans en détacher de morceaux. La plupart des expériences exécutées jusqu'ici ont conduit à la loi suivante : *La force vive nécessaire pour perforer une plaque est proportionnelle à la circonférence du projectile et à une certaine puissance de l'épaisseur de la plaque.*

Soit :

p, le poids du projectile en *kg*,

D, son diamètre en *cm*,

V, la vitesse au choc en *m*,

S, l'épaisseur de la plaque en *cm*.

On a en général

$$\frac{pV^2}{2\,000\,g} = h\pi DS^n$$

et en posant

$$\frac{pV^2}{2\,000\,g\pi D} = \lambda,$$

λ est la force vive en dynamodes par centimètre de circonférence du projectile, et l'on a :

$$\lambda = hS^n.$$

Le capitaine Noble, qui s'est occupé le premier de la question, a trouvé pour λ les valeurs suivantes

$$\lambda = 0{,}023542\, S^2, \tag{11}$$

$$\lambda = 0{,}026158\, S^2, \tag{12}$$

suivant que le projectile était ogival ou à tête hémisphérique. Ces valeurs de λ peuvent s'appliquer pour les plaques comprises entre 1 et 30 cm (expériences anglaises 1865-1866).

Pour les plaques en fer ayant des épaisseurs comprises entre 30 et 55 cm, les expériences exécutées à la Spezia, en 1876, ont donné

$$\lambda = 0{,}03498\, S^{1{,}668}. \tag{13}$$

En 1878, les usines Whitworth, Krupp et Schneider sont arrivées à produire des projectiles en acier dont la pointe possédait une très grande dureté, le corps une grande malléabilité, presque indéformables.

En réunissant les diverses expériences exécutées en Angleterre, en Allemagne et en France, avec les projectiles Whitworth, Krupp et Schneider, M. Rognetta a trouvé la formule suivante :

$$\lambda = 0{,}039178\, S^{1{,}7876} \tag{14}$$

qui reproduit assez bien les résultats d'expérience.

D'autres formules, plus ou moins satisfaisantes, ont été données par divers auteurs : Hélie, Hing, Martin de Brettes, Adts, Krupp.

La formule employée par ce dernier est la suivante :

$$\lambda = 0{,}025 \sqrt[3]{S^4 D^2}.$$

Cette formule est celle dont il se sert dans ses ateliers, et qui coïncide presque avec celles de Noble quand $S = D$.

Quant à l'infrastructure de la cuirasse, on peut admettre avec Krupp, que si cette dernière ne possède pas de fers d'angle, sa résistance est environ $^1/_{20}$ de celle que présenterait une plaque de fer d'égale épaisseur, et, qu'au contraire, si elle est soutenue par des fers d'angle, le coefficient est d'environ $^1/_{10}$.

Les canons de marine les plus récents, et en particulier ceux du système Krupp, peuvent se diviser en plusieurs classes, suivant leur longueur d'âme, ou le poids. Pour les canons d'une même classe, la force vive par centimètre de circonférence est à peu près proportionnelle à la section. On a donc à la bouche

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{D^2}{D'^2}.$$

En se reportant à la formule de Krupp, on peut écrire :

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{D^2}{D'^2}\sqrt[3]{\frac{S^4D^2}{S'^4D'^2}};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{S}{D} = \frac{S'}{D'}.$$

On peut donc dire que, pour des canons de même classe, le rapport de l'épaisseur de plaque perforable à la bouche au calibre est sensiblement constant. Ainsi pour les canons Krupp modèle 1880 et 1882, et dans le cas de plaques de fer forgé, on a les rapports suivants :

CANONS KRUPP.	$\frac{D}{S}$.
De 25 calibres léger	1,66
De 25 — lourd	1,86
De 30 — —	2,02
De 35 — —	2,16
De 50 — —	3,00
De 70 — —	4,35
De 100 — —	5,4

NOTE SUR LE PERCEMENT DES PLAQUES ISOLÉES EN FER FORGÉ

Par M. LAURENT

Parmi les nombreuses formules en usage en France pour déterminer les épaisseurs de plaque en fer forgé traversées par les projectiles ogivaux, nous citerons les trois suivantes. La première due à C^{ne} Noble, de l'artillerie anglaise, et qui est

$$\lambda = 0,06916\, S_1^{1,6}.$$

λ représentant la puissance vive au choc en dynamodes par centimètre de circonférence du projectile, et S_1 l'épaisseur en centimètres, on peut la mettre sous la forme

$$S_1 = \left(\frac{\lambda}{0,06916}\right)^{\frac{5}{8}}.$$

La seconde est celle de la commission de Gâvre. En adoptant les mêmes unités que précédemment, elle est de la forme

$$\lambda = 0{,}16537\, S_2^{\frac{7}{5}} \quad \text{ou} \quad S_2 = \left(\frac{\lambda}{0{,}16537}\right)^{\frac{5}{7}}.$$

La troisième enfin est le résultat des expériences faites à l'usine Krupp, c'est la formule (14) citée plus haut.

$$\lambda = 0{,}025\, \sqrt[3]{S^4 D^2}.$$

Les trois formules précédentes tiennent compte à la fois du diamètre et de la section du projectile, comme il est facile de s'en assurer. Quand il s'agit de plaques en acier, on prend comme épaisseur traversée les $\frac{3}{4}$ de l'épaisseur de la plaque de fer. Les trois formules précédentes sont loin de donner des épaisseurs identiques pour les mêmes valeurs λ. Supposons comme exemple un projectile de 24^c, pesant 170 kg et animé d'une vitesse de 680 m. Son diamètre est à la couronne guide de $239^{mm},8$. L'épaisseur S calculée par la première formule est 63,6, par la seconde 61,8 et par la troisième 64,1. Les deux dernières se rapprochent assez, et la seconde donne une épaisseur moindre.

Pour éviter les calculs des exposants fractionnaires, il a été construit des tables de perforation pour les trois formules. La première contient comme argument les épaisseurs de 1 mètre en millimètres, et dans les colonnes en regard les puissances vives en mètres-tonnes par centimètre de circonférence; elle s'étend depuis 0^{mm} jusqu'à $1^m,055$. Pour faire usage de cette table, on calcule la quantité λ, on cherche dans les colonnes verticales le nombre le plus voisin, et dans la colonne horizontale on a l'épaisseur. C'est la table n° XVIII.

La table de Gâvre est établie sur le même principe; elle s'étend de 0^{mm} à $1^m,106$. C'est la table n° XIX.

Dans la troisième enfin, disposée de la même façon, on calcule non plus λ, mais $\dfrac{10pV^2}{2g\frac{\pi D^2}{4}} D^{\frac{1}{3}}$, et l'on a S_3; c'est la table n° XX.

Dans les trois tables, les unités sont, pour les puissances vives, le mètre-tonne et le centimètre pour le calibre du projectile. Comme exemple, soit à calculer l'épaisseur de la plaque en fer forgé perforée à la bouche par un projectile de 24^c pesant 170 kg, animé d'une vitesse initiale de 680 m. Son diamètre extérieur est 239,8 λ. La circonférence extérieure étant de $75{,}33\,\lambda = 53{,}19$. On cherche alors, soit dans la table XVIII, soit dans la table XIX, suivant qu'on se sert de la formule de Noble ou de la formule de Gâvre, le chiffre se rapprochant le plus possible de 53,19, et l'on trouve ainsi $63^c,6$ et $61^c,8$. S'il s'agit de la formule de Krupp, on calcule la puissance vive en mètres-tonnes par centimètre carré de section $\dfrac{pV^2}{2g\frac{\pi D^2}{4}}$, on multiplie par $10\,D^{\frac{1}{3}}$ et l'on cherche dans la table le chiffre qui se rapproche le plus possible de ce produit. Dans le cas de l'exemple précédent, on trouverait $10\,\dfrac{pV^2}{2g\frac{\pi D^2}{4}}\,D^{\frac{1}{3}} = 255{,}8$, nombre auquel correspond une épaisseur de 64,1. (p est exprimé en *kg*.)

Il est certain que ces formules ne peuvent guère servir que de termes de comparaison, car les murailles de navires sont en acier avec matelas en bois, et de plus la qualité des plaques influe d'une façon tout à fait prépondérante. Nous renvoyons le lecteur pour de plus amples renseignements aux expériences de Gâvre, du Creusot, etc.

SECTION II

TABLES DE TIR ET EXPÉRIENCES

CHAPITRE I.

TABLES DE TIR

§ 1.

Définitions.

Les *tables de tir* sont des tables numériques renfermant toutes les données nécessaires à l'exécution du tir, et propres à juger de son effet.

Le *but* est un point par lequel on veut faire passer la trajectoire. Le but fait en général partie de l'objectif à battre, mais, quand ce dernier est couvert, on choisit pour but un point en avant. Dans les tables de tir le but est toujours supposé placé sur l'horizon de la pièce. La façon dont on doit opérer, quand il est en dessus ou en dessous, sera indiquée plus loin, dans la théorie du pointage. Nous donnons seulement dans ce qui suit la signification de certains termes, que nous n'avons pas encore définis, qui font partie des tables de tir ou qui sont nécessaires soit pour leur construction, soit pour leur emploi.

Plan de direction. — Plan vertical, passant par le but et par la bouche de la pièce. En pratique, n'importe quel point de la pièce ou de la plate-forme peut être considéré comme placé dans le plan de direction. Par la même considération, on peut prendre pour *ligne de site* la droite qui joint le but à un point quelconque de la plate-forme ou de la bouche à feu.

Angle de direction (β). — L'angle que la ligne de site fait avec le plan de tir, quand la pièce est prête à tirer. L'angle de direction est toujours très petit; il en résulte que les angles et les segments de droite placés sur le plan de direction peuvent être supposés égaux à leur projection sur le plan de tir.

Élévation (α). — L'angle formé par l'axe de la pièce avec la ligne de site, projetée sur le plan de tir.

Plan de hausse. — Un plan perpendiculaire à l'axe de la pièce mené à une distance L du guidon. C'est dans ce plan que se trouve le cran de mire. La quantité L est appelée *la distance des points de mire.*

Dans l'obusier de 22[c], le mécanisme portant le cran de mire la maintient sur une surface cylindrique ayant son axe parallèle à l'axe des tourillons et passant par le sommet du guidon.

Hausse et dérive (H et S). — Les coordonnées en millimètres du cran de mire par rapport à deux axes situés dans le plan de hausse, et ayant pour origine la projection du guidon sur ce plan : l'un des axes est parallèle à l'axe des tourillons, en direction contraire à la dérivation, l'autre perpendiculaire et dirigé de bas en haut. La hausse se compte parallèlement à cet axe, la dérive parallèlement au premier.

Dans l'obusier de 22[c], le cran de mire est maintenu, comme nous l'avons dit plus haut, non pas dans un plan fixe, mais sur une surface cylindrique fixe, ayant son axe parallèle à l'axe des tourillons et passant par le sommet du guidon. Dans ce cas, en menant par le guidon une parallèle à l'axe de la pièce, son point de rencontre avec la surface cylindrique est l'origine des hausses et des dérives. La hausse est la distance en degrés du cran de mire à l'origine, mesurée sur la section du cylindre qui passe par cette origine; la hausse est donc égale à l'élévation : la dérive est la distance en millimètres du cran de mire à la section mentionnée.

Ligne de mire. — La droite qui joint le guidon au cran de mire et prolongée à l'infini. La hausse et la dérive, données dans les tables de tir, supposent une disposition du cran de mire telle que la ligne de mire passe par le but quand la bouche à feu est prête à faire feu, et que l'axe des tourillons est horizontal.

Angle de mire (m). — La projection sur le plan de tir de l'angle fait par la ligne de mire et l'axe de la pièce. Quand la pièce est prête à

tirer, la ligne de mire étant presque parallèle à la ligne de site, l'angle de mire peut être considéré comme égal à l'angle d'élévation.

Triangle de mire. — La projection sur le plan de tir du triangle déterminé par le guidon et par la hausse (quand celle-ci est droite).

Hausse naturelle (H_0). — La hausse correspondant à la position la plus basse qu'il est matériellement possible de donner à la planchette de mire. Dans les bouches à feu à chargement par la culasse, la hausse naturelle est toujours nulle.

Ligne de mire naturelle et angle de mire naturel (m_0). — La ligne de mire et l'angle de mire correspondant à la hausse naturelle et à une dérive nulle.

Angle d'élévation réduit. — L'angle d'élévation diminué de l'angle de mire naturel.

Hausse réduite. — La hausse diminuée de la hausse naturelle.

Variations. — Par variations en portée, en hauteur et en direction, pour un ou plusieurs millimètres de hausse et de dérive, on entend les augmentations ou diminutions en portée, et les déplacements verticaux et latéraux du point touché, quand en maintenant la ligne de mire en ligne droite avec le but, on augmente ou on diminue la hausse et la dérive d'un certain nombre de millimètres. Par analogie, il en est de même pour les variations de portée correspondant à un ou plusieurs dixièmes de degré en élévation, à un ou plusieurs décagrammes de charge.

Bandes. — Par *profondeur* de la bande, contenant la moitié des coups, on entend la distance entre les deux droites, placées sur l'horizon de la pièce, perpendiculaires au plan de direction, équidistantes du point de chute moyen et entre lesquelles tombent 50 p. 100 des coups tirés, quand le tir se prolonge indéfiniment dans les mêmes conditions. Par analogie, la *largeur* de la bande est la distance comprise entre deux droites parallèles au plan de direction et contenant 50 p. 100 des coups ; la *hauteur* de la bande, la distance comprise entre deux droites perpendiculaires au plan de direction, mais contenues dans un plan vertical, passant par le point de chute moyen.

Au lieu de profondeur, largeur, hauteur de la bande, on se sert des dénominations plus commodes : *bande longitudinale, verticale et latérale.* On les désigne par F', F et E.

§ 2.

Relations diverses.

Angle d'élévation et angle de projection. — Si ρ est l'angle de relèvement, et ε l'angle de site, on a évidemment $\alpha = \varphi - \rho - \varepsilon$. Dans les tables de tir, comme on suppose le but sur l'horizon de la pièce, on a $\alpha = \varphi - \rho$.

Hausse et élévation. — Supposons la bouche à feu dans la position nécessaire pour que la trajectoire passe par le but. La ligne de mire y passera également. Dans le triangle de mire, en appelant m l'angle de mire, opposé à la hausse, et L la distance du guidon au plan de hausse, on a

$$\frac{H}{L} = \operatorname{tg} m. \tag{1}$$

Mais à cause des faibles dimensions de la pièce par rapport à sa distance au but, la ligne de mire peut être considérée comme parallèle à la ligne de site, et l'on a $m = \alpha$, d'où

$$\frac{H}{L} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

Si l'on veut tenir compte de la convergence de la ligne de mire par rapport à la ligne de site, soit (fig. 13) d la distance NA, du guidon M à la

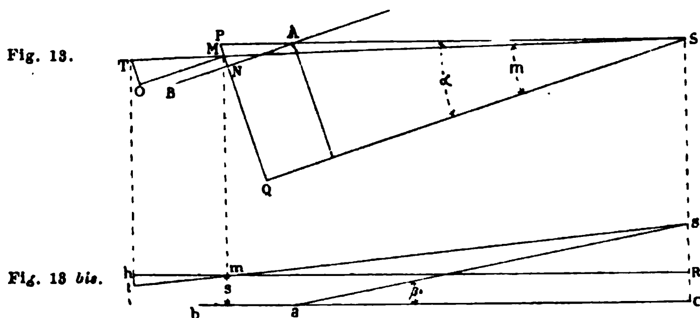


Fig. 13.
Fig. 13 bis.

tranche de bouche et $MN = r$ la distance du même guidon à l'axe, mesurée sur le plan perpendiculaire à l'axe des tourillons, plan que nous supposons

être celui de la figure. Soit S le point visé : Prolongeons MN des deux côtés, et soit Q son point de rencontre avec une parallèle à l'axe de la pièce, P son point de rencontre avec le prolongement de la ligne de site SA. Comme PSQ $= \alpha$ et MSQ $= m$, on a

$$\frac{PQ}{QS} = \operatorname{tg}\alpha \quad , \quad \frac{MQ}{QS} = \operatorname{tg} m = \frac{H}{L},$$

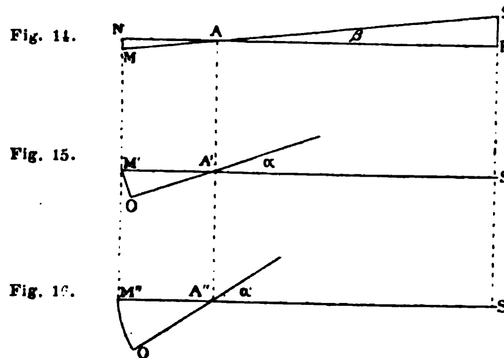
donc :

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} m = \frac{PQ - MQ}{QS} = \frac{PM}{QS} = \frac{d \operatorname{tg}\alpha - r}{QS}.$$

En appelant X la distance AS, on a $QS = X \cos\alpha + d$ et, par suite,

$$(3) \qquad \frac{H}{L} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{d \operatorname{tg}\alpha - r}{X \cos\alpha + d}.$$

Dérive et dérivation. — Le plan de la figure 14 passe par la ligne de mire MAS et est perpendiculaire au plan de tir qui coïncide avec le plan de la figure 15 ; A, A′ représentent le guidon,



M, M′ le cran de mire, NM la dérive, OM′ la hausse ; PS peut être considéré comme étant la dérivation, puisque cette longueur n'en diffère que de la distance du guidon au plan vertical passant par l'axe.

Or dans les triangles semblables PSA, NMA, on a,

$$\frac{PS}{PA} = \frac{NM}{NA},$$

mais,

$$MN = S \qquad NA = M'A' = \frac{OA'}{\cos\alpha} = \frac{L}{\cos\alpha},$$

il en résulte

$$\frac{PS}{PA} = \frac{S\cos\alpha}{L}.$$

Soit donc D la dérivation, X la distance PA qui diffère extrêmement peu de la distance du but, nous avons :

$$(4) \qquad D = X\frac{S}{L}\cos\alpha.$$

Dans le tir sous de petits angles, on peut remplacer $\cos\alpha$ par l'unité.

Connaissant la dérive ou la dérivation, l'angle de direction β est déterminé par

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{D}{X} = \frac{S}{L}\cos\alpha, \qquad \text{et réciproquement} \qquad \frac{S}{L} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}.$$

Dans l'obusier de 22[c] où le cran de mire ne se déplace pas sur un plan, mais sur une surface cylindrique OM″, dont l'axe passe par le guidon (A, A″) et est perpendiculaire au plan de tir, on a (fig. 15 et 16) :

$$NA = M''A'' = OA'' = L$$

et par conséquent, quel que soit α,

$$D = \frac{X}{L}S.$$

Les relations précédentes supposent la ligne de mire coïncidant avec la ligne de site.

Quand on veut tenir compte de la convergence de la ligne de mire avec la ligne de site, la formule qui lie S et β, analogue à l'équation (3), est :

$$(5)' \qquad \frac{S}{L} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha} - \frac{s + d\operatorname{tg}\beta\sec\alpha}{X\cos\alpha + d},$$

s étant la distance du guidon au plan de tir, mesurée dans le sens de la dérivation. En effet, soit (fig. 13[bis]) la projection horizontale de la figure 13. S′ le but, ba l'axe de la pièce, m le guidon, ht la dérive, S′C la dérivation $D = X\operatorname{tg}\beta$. Les triangles semblables donnent

$$\frac{ht}{S'R} = \frac{hm}{mR} = \frac{TM}{MS} = \frac{OM}{QS}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{ht}{OM} = \frac{S'R}{QS},$$

mais $ht = S$, $S'R = D - s$, $OM = L$, $QS = X \cos\alpha + d$, donc:

$$\frac{S}{L} = \frac{D - s}{X \cos\alpha + d} = \frac{X \operatorname{tg}\beta - s}{X \cos\alpha + d}.$$

Formule équivalente à la formule (5)'.
Pour l'obusier de 22[c] on remplacera L par $L \cos\alpha$.

Variations. — Les variations en portée (pour un ou plusieurs millimètres de hausse, dans les tables à charge fixe ; pour un ou plusieurs décagrammes de charge, dans les tables à charge variable avec la distance) sont simplement des nombres obtenus par interpolation, et on peut les déduire des nombres contenus dans la colonne marquée *hausses* ou *charges*. Si la charge est fixe, on divise 200 par la différence des hausses correspondant à deux distances, l'une supérieure de 100 m, l'autre inférieure de 100 m à celle à laquelle doit correspondre la variation : le quotient est évidemment la variation en portée pour 1 mm de hausse. Si la charge est variable, on divise 200 par la différence en décagrammes des charges correspondant à deux distances l'une supérieure de 100 m, l'autre inférieure de 100 m, à celle à laquelle doit correspondre la variation : le quotient est évidemment la variation en portée pour un décagramme de charge.

La variation en hauteur correspondant à 1 mm de hausse s'obtient en multipliant la variation en portée par la tangente de l'angle de chute ou bien de l'expression $\frac{X}{L} \cos 2\alpha$. On emploie de préférence la formule plus simple $\frac{X}{L}$, qui diffère peu de la précédente, quand l'angle α est petit (X est évalué en mètres et L en millimètres) (1).

(1) La déviation longitudinale correspondant à $\Delta\varphi$ est (voir section I, chapitre IX)

$$\Delta X = 2X \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega} = X \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{tg}\omega}(1 - \operatorname{tg}^2\varphi).$$

Multiplions par $\operatorname{tg}\omega$, nous avons la déviation verticale, c'est-à-dire $X\Delta\varphi(1 - \operatorname{tg}^2\varphi)$. Mais $\varphi = \alpha + \rho$, donc $\Delta\varphi = \Delta\alpha$, et $\operatorname{tg}^2\varphi$ diffère peu de $\operatorname{tg}^2\alpha$, la déviation verticale est par suite

$$X\Delta\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = X\Delta \operatorname{tg}\alpha \cos 2\alpha = X \frac{\Delta H}{L} \cos 2\alpha.$$

La variation verticale correspondant à un millimètre de hausse ($\Delta H = 1$) est donc $\frac{X}{L} \cos 2\alpha$.

La variation latérale pour un millimètre de dérive se calcule au moyen de la même expression $\frac{X}{L}$, ou de $\frac{X \cos \alpha}{L}$, quand α est grand. En effet, quand l'angle de direction varie de $\Delta\beta$, le point touché se déplace de $X\Delta\beta$, ou de $X\Delta \operatorname{tg} \beta$ (β étant très petit). Mais $\Delta \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta S}{L} \cos \alpha$ (page 154), donc, la variation latérale pour 1 mm de dérive ($\Delta S = 1$) sera $\frac{X}{L} \cos \alpha$.

Bandes. — Entre la bande verticale F et la bande longitudinale F′, on a la relation :

$$F = F' \operatorname{tg} \omega. \tag{6}$$

En effet, toutes les trajectoires qui traversent la bande F (fig. 17) traversent également la bande F′, et une trajectoire qui effleure la limite supérieure de F, effleure également la limite plus éloignée de F′, et forme avec $\frac{1}{2}$ F et $\frac{1}{2}$ F′ un triangle ABC, que l'on peut admettre comme étant rectiligne et rectangle et dont l'angle ω est opposé au côté $\frac{1}{2}$ F.

Fig. 17.

Si du sommet C on abaisse la perpendiculaire CP sur l'hypoténuse AB, on a :

$$\frac{1}{\overline{CP}^2} = \frac{1}{\overline{CA}^2} + \frac{1}{\overline{CB}^2}.$$

Le double de la longueur CP s'appelle la *bande normale*, on la représente par F″. On a donc :

$$\frac{1}{F''^2} = \frac{1}{F^2} + \frac{1}{F'^2} \tag{7}$$

ou bien

$$F' \sin \omega = F \cos \omega = F''. \tag{8}$$

Si l'on suppose que l'on hausse la trajectoire moyenne, le faisceau de trajectoires qui l'accompagne ne se dilate, ni ne se resserre, c'est-à-dire que la section normale ne varie qu'avec la distance horizontale du point où elle coupe la trajectoire moyenne, la bande normale et la bande latérale sont indépendantes de la hauteur de ce point.

CHAPITRE II.

GÉNÉRALITÉS. — ANGLE DE RELÈVEMENT. — VITESSES. RÉSISTANCE DE L'AIR

§ 1.

Les expériences de tir ont pour but la détermination des quantités que le calcul ne peut donner, ou la rectification de celles que ce dernier ne donne qu'approximativement. Elles consistent en général dans des mesures de vitesses et d'angles de relèvement, et en des tirs à la cible, quantités qui servent à déterminer la précision du tir et les données du pointage.

Le terrain sur lequel on opère doit avoir un champ suffisamment grand dans le sens du tir, il ne doit pas présenter d'angles de site trop considérables et les différences de niveau inévitables doivent être relevées avec soin. La meilleure saison pour faire des expériences est l'été. Les longs jours permettent d'exécuter sans interruption des expériences souvent nombreuses ; le temps sec est très convenable pour la régularité des vitesses initiales, et l'absence de vent pour celle des trajectoires.

La bouche à feu doit être visitée avec soin, s'approcher autant que possible du calibre normal, et se trouver en outre dans les limites des tolérances. Dans aucun cas, on ne doit employer celles qui présentent des défauts intérieurs. On doit en outre mesurer avec toute l'exactitude possible les dimensions des mécanismes du pointage ; c'est seulement par le relevé consciencieux de ces dernières, qu'il est possible de vérifier la justesse des données du pointage. La bouche à feu sera toujours placée sur une plate-forme, que l'on doit réfectionner, quand les roues ne sont plus de niveau.

La poudre doit être autant que possible dans son état normal.

En ouvrant les caisses, on mettra à part celles qui contiennent des poudres qui, par la couleur ou par la dimension des grains, indiquent une détérioration quelconque au point de vue de la conservation. Il est nécessaire de choisir pour les tirs d'expérience les poudres dont les marques inscrites à l'extérieur de la caisse se rapprochent davantage, soit par la densité gravimétrique, soit par la puissance balistique, des valeurs moyennes entre les limites extrêmes imposées pour la réception. Dans le cas où un lot de poudre ne suffirait plus pour continuer les expériences, et qu'on serait obligé d'employer un autre lot dont les marques de réception présenteraient des différences notables avec celles du lot réglementaire, le mieux serait de mélanger les deux lots, et de former ainsi un mélange autant que possible homogène.

Les projectiles doivent être choisis, autant que possible, parmi les meilleurs, différant le moins possible des dimensions normales, soit pour le diamètre, soit pour le poids et pour la position du centre de gravité, surtout lorsque les limites des tolérances peuvent donner dans le service des différences assez considérables.

Dans tous les cas, quand on tire des projectiles creux, ils doivent toujours être lestés avec du sable, ou toute autre matière, de façon à être ramenés au poids normal.

Le pointage doit être fait avec une grande exactitude et toujours avec les mêmes appareils. Toutes les fois que les dimensions de la ligne de mire et de la hausse le permettent, celle-ci doit être préférée au quart de cercle. Dans les cas où l'on est forcé d'employer ce dernier instrument, il faut s'assurer avant toute chose de son exactitude, et si la bouche à feu n'est pas munie d'une surface plane pour le recevoir, on doit marquer avec une pointe à tracer sur la surface extérieure de la pièce deux lignes à angle droit qui servent à placer chaque fois le quart de cercle dans une position identique.

On ne peut trop insister sur la nécessité de prendre toutes les précautions relatives au matériel et au pointage, quand les expériences ont pour objet la détermination des données de pointage. Toutes les recommandations précédentes peuvent paraître en contradiction avec le but des expériences quand il s'agit de la précision du tir; elles tendent, en effet, à donner une précision que la

bouche à feu n'atteint certainement pas dans le tir pratique, pour lequel ces précautions ne peuvent être observées et ne le sont du reste jamais.

Il est certain que si les bandes indiquées dans les tables de tir devaient représenter ce qui se passe en guerre, il faudrait négliger toutes les précautions favorables à la précision et même les prendre en sens contraire, en cherchant s'il est possible de reproduire les circonstances variées du combat, de tenir compte de la dégradation du matériel, des embarras et de l'émotion du pointeur. Toutes ces conditions ne paraissent guère possibles à réaliser, et dans le cas où elles le seraient, on ne pourrait rien conclure relativement à la précision, dont la limite inférieure, dépendant des circonstances qui peuvent se produire et ne pas se produire, ne peut par conséquent en aucune façon être déterminée. Dans l'impossibilité de déterminer la précision minimum qui n'existe pas, et par conséquent une précision moyenne, on cherche à déterminer expérimentalement la précision maximum. Le rapport des bandes tabulaires à celles que l'on obtient dans le tir pratique, donne la mesure de la qualité du matériel employé et du soin apporté dans le tir.

§ 2.

Mesure de l'angle de relèvement.

On emploie pour la mesure de l'angle. de relèvement les coups qui servent à déterminer la vitesse initiale ou également ceux du tir au but, pour lesquels l'angle de projection est suffisamment petit. Sur un carton rectangulaire, dont le côté horizontal est un peu plus petit et le côté vertical plus grand que le diamètre de la bouche à feu à la culasse, on trace deux axes, l'un vertical au milieu, l'autre horizontal, voisin du bord supérieur et suivant que le guidon est à gauche ou à droite, on marque sur l'axe horizontal, à partir du centre, un point P distant de ce dernier d'une longueur égale à la distance du guidon au plan de tir. Ce carton, maintenu dans un châssis, est placé en avant de la pièce, prête à tirer, à la distance de 20 à 60 m. Le châssis est disposé de façon que la ligne

de mire naturelle (supposée parallèle à l'axe de la pièce) passe par le point P. On tire et l'on mesure la distance a du centre du trou, fait par le projectile sur le carton, à l'axe horizontal (fig. 18).

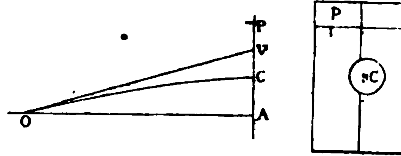


Fig. 18.

Soit OA l'axe de la pièce, C le centre du trou, OV la tangente initiale, VOA $= \rho$, on a très approximativement :

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{VA}{OA} = \frac{VC + CA}{OA} = \frac{VC + PA - PC}{OA}.$$

Appelons D la distance du centre du carton à la bouche, l'abaissement VC est très approximativement égal à celui qui a lieu dans le vide, c'est-à-dire à $\frac{gD^2}{2V^2}$.

Par conséquent, si r est la hauteur du guidon au-dessus de l'axe on a :

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \rho = \frac{gD}{2V^2} + \frac{r - a}{D}.$$

Quand la ligne de mire naturelle n'est pas parallèle à l'axe de la pièce on peut, lorsqu'il s'agit d'une expérience, hausser le guidon au moyen d'une petite pièce en bois d'une quantité égale à la hausse naturelle H_0 (page 151). Dans ce cas, il faut dans la formule précédente remplacer r par $H_0 + r$.

On peut éviter de hausser le guidon, si le carton est suffisamment grand pour contenir une seconde ligne horizontale située sous la première et distante d'elle de la quantité $(D + d) \frac{H_0}{L}$, L représentant la distance des points de mire et d la distance du guidon à la tranche de bouche (page 155). Sur cette ligne horizontale et sur la ligne verticale passant par P on marque le point P', et on place P' sur la ligne de mire naturelle. Dans ce cas, la formule (1)

s'emploie telle qu'elle est écrite, en notant que a représente toujours la distance du centre du trou à la ligne horizontale supérieure, comptée de haut en bas.

Pour obtenir une approximation suffisante, il est nécessaire de tirer au moins six coups utiles.

Dans les bouches à feu de petit, de moyen et de gros calibre, l'angle de relèvement reste dans les environs de $^1/_4$, $^1/_8$ et $^1/_{16}$ de degré.

Les expériences sur l'angle de relèvement permettent également de mesurer l'angle initial de dérivation par rapport au plan de tir. Si a' est la distance du centre du trou à l'axe vertical du carton, l'angle cherché ρ' est donné par la formule

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}\rho' = \frac{a'}{D}.$$

§ 3.

Mesure de la vitesse.

Pour obtenir la vitesse en un point de la trajectoire, on fait usage du chronographe Le Boulengé. On dispose deux cadres réticulés, l'un en deçà, l'autre au delà de ce point, et à égale distance de celui-ci. La distance entre les deux cadres est, en général, $^1/_{10}$ de la vitesse présumée. On tire, et le chronographe indique le temps employé par le projectile pour parcourir l'espace entre les deux cadres. En divisant cet espace par le temps, on obtient la vitesse moyenne horizontale $v\cos\theta$ du trajet, et on l'affecte au point moyen. Pour avoir une approximation suffisante, il faut au moins disposer de six coups utiles.

Cette expérience a généralement pour but de déterminer la vitesse initiale, et quelquefois le coefficient de forme i (Introduction pages 4 et 7). Dans le premier cas, la vitesse est mesurée en un seul point, à une petite distance de la bouche (de 30 à 100^m). En divisant la distance horizontale obtenue $v\cos\theta$ par le cosinus de l'angle de projection φ, on obtient la pseudo-vitesse,

$$\text{(3)} \qquad \frac{v\cos\theta}{\cos\varphi} = u.$$

Connaissant u et la distance x à la bouche, on a V d'après la formule

(4) $$D(V)=D(u)-\frac{x}{C'}.$$

La table balistique donne la vitesse cherchée. Il n'est pas nécessaire dans le cas présent d'avoir recours à une valeur très approchée de C', et l'on peut poser C' = C.

Mais si u est supérieur à 400^m et $\frac{x}{C} > 50$, on pose $C' = \frac{C}{\delta}$.

Quand le but des expériences est de déterminer i, il faut mesurer la vitesse horizontale en deux points d'une même trajectoire distants l'un de l'autre d'au moins 1 000 mètres pour un projectile de 10 centimètres et pour les projectiles d'un calibre différent, proportionnellement au calibre. Les deux vitesses horizontales obtenues sont divisées par $\cos\varphi$, et on obtient ainsi les pseudo-vitesses u_1 et u_2. La table balistique donne i au moyen de la formule

(5) $$i=\frac{C}{\delta}\frac{[D(u_2)-D(u_1)]}{x_2-x_1}$$

(x_2, x_1 correspondent à u_2 et u_1).

Il convient dans ce cas de mesurer δ, et d'exclure les coups qui n'ont donné la vitesse qu'à une seule distance.

Il faut également tenir compte de l'action du vent (§ 6).

§ 4.

Mesure de la résistance de l'air.

Pour mesurer la résistance de l'air, c'est-à-dire pour déterminer la fonction F (v), la méthode suivie jusqu'ici ne diffère pas à proprement parler de celle que nous avons indiquée pour déterminer le coefficient de forme i. L'expérience consiste à mesurer la vitesse horizontale en deux points d'un arc de trajectoire suffisamment tendue, comme l'exige la mesure de la vitesse ; on en déduit la résistance d'après la perte de vitesse.

Soit $\frac{p}{g}$ la masse du projectile $(v\cos\theta)_1$, $(v\cos\theta)_2$, les vitesses ho-

rizontales mesurées en deux points, distants de la pièce de x_1 et x_2, et soit finalement ρ la composante horizontale de la résistance à la distance x. Le principe des forces vives donne :

$$(6) \qquad \frac{p}{2g}[(v\cos\theta)_1^2 - (v\cos\theta)_2^2] = \int_{x_1}^{x_2} \rho\, dx = \rho_m(x_2 - x_1)$$

ρ_m étant une valeur moyenne entre celles que prend ρ dans l'intervalle $x_2 - x_1$. On a donc, en supprimant l'indice m :

$$(7) \qquad \rho = \frac{p}{2g}\frac{(v\cos\theta)_1^2 - (v\cos\theta)_2^2}{x_2 - x_1}.$$

Dans la pratique, cette valeur de ρ est considérée comme étant la résistance absolue correspondant à une vitesse absolue donnée par

$$(8) \qquad v = \frac{(v\cos\theta)_1 + (v\cos\theta)_2}{2}.$$

La résistance sur l'unité de masse (*retardation*) est :

$$\frac{g\rho}{p}$$

et comme elle est égale à

$$\frac{i\delta F(v)}{C},$$

on a :

$$(9) \qquad F(v) = \frac{Cg\rho}{\delta p} = \frac{g\rho}{1000\, a^2 \delta},$$

formule dans laquelle on a posé $i = 1$, ce qui correspond au projectile type.

Supposons maintenant qu'on ait tiré un grand nombre de coups, avec plusieurs charges, et des projectiles variés, mais de formes semblables. Ayant calculé les valeurs de ρ et de $F(v)$ correspondant aux valeurs de v (valeurs moyennes obtenues au moyen de couples de valeurs pour chaque coup), on peut construire une table portant dans la première ligne les vitesses et dans la seconde les valeurs de $F(v)$.

Il vaut mieux, dans le cas présent, prendre à la place de F (v) la quantité

$$\frac{F(v)}{v^2} = K,$$

qui est moins variable et qui serait constante dans le cas d'une résistance quadratique.

Ayant donc établi une table de v et de K, on trace sur une feuille de papier quadrillée deux axes. Sur l'un des axes, on porte à une échelle convenable les v et sur l'autre les valeurs de K. On obtient ainsi autant de points par lesquels on fait passer une courbe, qui représente la loi de la résistance de l'air, et qu'on peut transformer en loi numérique.

Cette méthode est celle qui est ordinairement employée par les expérimentateurs (Didion, Mayevski, Krupp, Hojel, etc.).

§ 5.

L'attribution de la valeur de ρ donnée par la formule (7) à une vitesse absolue, moyenne arithmétique entre les deux vitesses mesurées, peut donner lieu à des erreurs considérables, quand les vitesses diffèrent beaucoup entre elles.

Certains expérimentateurs (Hutton, Hélie, Bashforth) ont cherché à diminuer ces erreurs, en prenant comme inconnue non pas la valeur moyenne de ρ dans l'espace $x_2 - x_1$, mais la valeur moyenne du coefficient de résistance dans l'hypothèse que cette dernière entre les limites x_2 et x_1 varie proportionnellement au carré ou au cube de la vitesse ; mais aussi ces hypothèses s'écartent beaucoup de la réalité.

Quand on possède une table balistique, si l'on veut procéder à des expériences suivies pour obtenir les valeurs de F (v) plus approchées que celles qui ont servi de base pour établir la table, la méthode la plus exacte consiste à faire usage de celle-ci pour déterminer, non pas ρ, ni $\frac{\rho}{v^2}$, ni $\frac{\rho}{v^3}$, mais i, en considérant ce coefficient comme une variable dépendant de v, et d'en déterminer les valeurs au moyen de la formule (5).

Il est certain que, quelle que soit l'imperfection de la table balistique d'où l'on tire $D(u_1)$ et $D(u_2)$, la loi de résistance qui a servi pour cette table n'est pas arbitraire, mais basée sur des expériences antérieures, et qu'elle est, par conséquent, plus vraisemblable que n'importe quelle autre ; les valeurs de i peuvent bien varier avec la vitesse, mais moins rapidement que ρ ou $\frac{\rho}{v^n}$, quel que soit n. Il ressort de là que la valeur de i obtenue par un couple de valeurs de la vitesse, peut être regardée, avec assez de certitude, comme étant la valeur moyenne correspondant aux vitesses mesurées.

De la même façon que l'on construit le diagramme des valeurs de K, on peut établir celui des i : et finalement, pour obtenir les nouvelles valeurs de $F(v)$ correspondant aux nouvelles expériences, il ne reste plus qu'à multiplier les premières valeurs de $F(v)$ qui ont servi de point de départ, par les valeurs trouvées pour i.

§ 6.

Correction due au vent.

Les expériences pour déterminer le coefficient de forme, ou la fonction $F(v)$ doivent être exécutées dans un air parfaitement calme, au moins dans la direction du tir, à moins d'employer un bon anémomètre. Soit dans ce cas ω la valeur numérique de la vitesse du vent, estimée dans la direction du tir. Comme la résistance qu'éprouve le projectile dans l'air en mouvement est égale à celle que ce même projectile éprouverait dans un air calme, si, outre sa propre vitesse, il possédait aussi une vitesse égale à celle du vent dirigée en sens contraire ; la résistance ρ donnée par la formule (7) ne s'applique plus à la vitesse moyenne (8), mais à cette dernière augmentée ou diminuée de ω, suivant que le vent est contraire ou favorable au mouvement du projectile.

Quant au coefficient de forme, à la formule (5), on doit substituer la suivante :

$$(5)' \qquad i = \frac{C}{\delta(x_2 - x_1)} \{ [D(u_2 \pm \omega') - D(u_1 \pm \omega')] \mp \omega [T(u_2 \pm \omega') - T(u_1 \pm \omega')] \}$$

formule dans laquelle $\omega' = \frac{\omega}{\cos\varphi}$. On doit prendre les signes supérieurs ou inférieurs suivant que le vent est contraire ou favorable au mouvement du projectile.

La formule (5)' se déduit de la suivante :

$$\frac{\delta i(x_2 - x_1)}{C} = -\int_{u_1}^{u_2} \frac{u\,du}{F(u \pm \omega')}$$

qui dérive du principe de la composition de la vitesse du projectile avec celle du vent. En posant $u \pm \omega' = w$, on a :

$$\frac{\delta i(x_2 - x_1)}{C} = -\int \frac{w\,dw}{F(w)} \pm \omega \int \frac{dw}{F(w)}$$

et comme les intégrales s'étendent de $w = u_1 \pm \omega'$ à $w = u_2 \pm \omega'$, en se rappelant la signification de D (u) et de T (u) [page 48], on arrive à la formule (5)'.

CHAPITRE III

TIR A LA CIBLE

---

§ 1.

Tir sous de petits angles.

Le tir à la cible a généralement pour but la détermination des données de précision et la rectification des données de tir qui ont été trouvées par le calcul. Il peut également servir pour l'enseignement ou à titre d'exercice.

La cible peut être le terrain ou une toile. Cette dernière est généralement formée par un carré de 10 m de côté, placé verticalement et suspendu à une traverse fixée sur deux montants. La toile est quadrillée au moyen de lignes horizontales et verticales distantes l'une de l'autre de 1 m et d'autres lignes colorées distantes de 20 cm en 20 cm. Ces lignes servent à déterminer les coordonnées des points frappés. On prend pour origine le point placé à l'angle inférieur gauche du cadre ; on mesure les abscisses sur les lignes horizontales et les ordonnées sur les verticales.

Sur le terrain, on trace un sillon (*directrice*) partant du centre de la plate-forme, sur laquelle est placée la pièce, passant par le centre du cadre, et prolongé au delà. Sur la directrice on mesure soigneusement les distances de la bouche à feu au cadre. En deçà et au delà de ce dernier, sur une centaine de mètres environ, l'on plante des jalons de 10 m en 10 m numérotés, pour repérer les coordonnées des points touchés sur le terrain. Ce dernier devra à cet effet être convenablement aplani.

L'origine des coordonnées sur le sol est le pied du montant gauche du cadre ; les abscisses se comptent parallèlement à celui-ci et les ordonnées parallèlement à la directrice.

Au centre de la toile, on place un but circulaire bien visible de la batterie, c'est sur lui qu'on vise.

On n'emploie pas la cible en toile, quand l'angle de projection est supérieur à 20°, et pour les angles inférieurs quand on présume qu'elle ne peut recevoir les 2/3 des coups tirés. Dans ces cas, on place sur le sillon un simple but représenté par un drapeau ou un autre signal au sommet d'un montant dont le pied sert d'origine aux coordonnées.

Dans le pointage, on fait usage, en général, de la hausse, et on vise le but placé sur le cadre ou au sommet du montant. Mais si la difficulté de viser rend le pointage incertain et difficile, on vise le but seulement au premier coup, et, avant de tirer, on place en avant de la bouche à feu, à 200 m au moins de distance, un *faux but* bien fixe et bien visible; on détermine une hausse et une dérive fictives correspondant à ce dernier, qui servent à chaque coup à remettre la bouche à feu dans sa première position (¹).

On tire le premier coup avec une hausse et une dérive approximatives (*données d'épreuve*), tirées des formules balistiques (voir chap. V, sect. I), ou si le tir est un tir d'exercice, par les tables de tir existantes. On mesure après le coup les déviations et l'on corrige de façon à porter le coup suivant au centre de la toile, s'il en existe une, ou au pied du montant portant le but. On peut faire, si on le juge nécessaire, une seconde correction, si le second coup présente encore des variations inadmissibles. Ces premiers coups sont appelés *coups d'épreuve*. On fixe alors et on note la hausse et la dérive, que l'on appelle *données de série*. Sur la hausse de série, on ne fait pas en général d'autres corrections. Quant à la dérive, il y a lieu d'y apporter souvent quelques changements lorsque le vent augmente, ou change de direction, et que les dérivations latérales augmentent. Dans chaque cas, on note la correction qui correspond dans la cible à la correction faite. Il faut tenir compte de cette correction dans le calcul des coordonnées des points touchés, celles-ci devant être rapportées à la première hausse et à la première dérive de la série.

(¹) Voyez section IV le chapitre II : Pointage. Il n'est pas nécessaire de faire usage d'un dérivateur si le faux but est à une distance supérieure à 200 m.

Près de la cible se tient un officier, en communication téléphonique ou télégraphique avec la batterie ; il mesure ou surveille la mesure des coordonnées soit sur le cadre ou sur le terrain, et les note sur un carnet [1]. Il est utile que l'officier reproduise sur une feuille de papier quadrillé le fac-simile de la rose qui se forme sur le cadre ou sur le terrain. On note finalement quand on possède un chronomètre marquant au moins les 1/5 de seconde la durée du trajet, c'est-à-dire le temps compris entre le départ du coup, annoncé par la fumée ou par le téléphone, et l'arrivée du projectile.

Outre les résultats précédemment indiqués, il est nécessaire de déterminer pour chaque série l'état de l'atmosphère. Quand une série est tirée dans un laps de temps très restreint (2 ou 3 heures), il suffit de faire une observation au milieu de la séance. Quand la durée est plus longue, on fait deux observations, l'une en commençant, l'autre en finissant. Si la séance demande un jour complet, on fait deux observations le matin et deux le soir.

Les observations météorologiques doivent consister :

1° Dans la mesure de la hauteur barométrique ;

2° Dans celle de la température à l'ombre ;

3° Dans l'observation de la direction du vent, et de sa vitesse si la chose est possible.

L'état hygrométrique peut être déterminé au moyen du psychromètre d'August.

La direction du vent est déterminée par rapport à la direction du tir, en mesurant l'angle compris entre les deux directions et en le comptant à droite ou à gauche suivant le sens. L'intensité se mesure au moyen d'un anémomètre [2].

Les données météorologiques sont consignées dans le carnet qui contient les résultats du tir.

---

[1] Pour abréger autant que possible l'intervalle de temps entre les coups, les coordonnées sur le terrain peuvent être mesurées en employant le pas métrique, et en marquant chaque point d'arrivée au moyen d'un jalon portant le numéro d'ordre des coups respectifs. Quand on a cessé le feu, on peut alors prendre toutes les mesures nécessaires et plus exactement avec un mètre.

[2] La direction du vent est donnée par une simple banderole. La vitesse, quand on ne possède pas d'anémomètre, peut s'obtenir assez approximativement par la déviation d'un fil attaché à un point fixe et portant à son extrémité une petite balle très légère. On aura eu soin d'établir une table donnant la déviation en fonction de la vitesse, table obtenue par la comparaison de ce petit appareil avec un véritable anémomètre.

§ 2.

Centre de tir.

Les divers points touchés sur la toile ou sur le terrain constituent la rose verticale et la rose horizontale.

On appelle centre de la rose le point de rencontre de deux droites parallèles aux axes coordonnés, par rapport auxquelles les sommes des distances des points situés de part et d'autre des droites sont égales.

Ces deux droites se nomment axes de la rose. La trajectoire qui passe ou qui passerait par le centre de tir est appelée trajectoire moyenne.

Considérons la rose verticale (fig. 19) et soit MN l'axe horizontal dont nous voulons connaître l'ordonnée B au-dessus de l'origine. Soit y_s l'ordonnée d'un point P au-dessus de MN; la distance de P à MN est $y_s - B$. Pour un point Q placé au-dessous de MN, l'ordonnée est y_i et la distance de Q à MN est $B - y_i$. Or, la somme des distances des points au-dessus devant être égale à la somme des distances des points en dessous, on doit avoir :

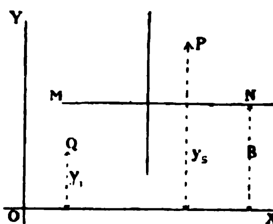


Fig. 19.

$$\Sigma(y_s - B) = \Sigma(B - y_i),$$

les signes Σ s'étendant respectivement à tous les points au-dessus et au-dessous de MN. On tire de cette équation

$$\Sigma(y_s - B) + \Sigma(y_i - B) = 0$$

ou

$$\Sigma(y - B) = 0\ ;$$

Σ s'étend à tous les coups tirés. Soit n leur nombre, nous avons :

$$\Sigma y - nB = 0 \qquad , \qquad B = \frac{\Sigma y}{n}.$$

La quantité B est l'ordonnée du centre sur le cadre.

Pour obtenir l'abscisse, que nous désignerons par A, on opérera de la même façon et l'on aura :

$$A = \frac{\Sigma x}{n}. \quad (1)$$

Pour la rose horizontale, nous aurons de même pour les coordonnées du centre de tir :

$$A' = \frac{\Sigma x'}{n} \quad , \quad B' = \frac{\Sigma y'}{n},$$

Quand le cadre vertical n'a pas des dimensions très grandes, il peut arriver qu'un certain nombre de coups ne puisse l'atteindre. Dans ce cas, on doit en tenir compte en s'aidant de la rose horizontale qui est toujours complète. Soit P un point quelconque de la rose verticale (fig. 20), et P' le point correspondant sur le terrain ;

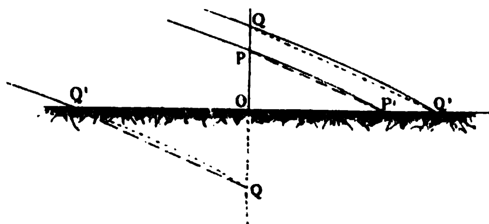


Fig. 20.

la droite PP' est une corde de la trajectoire. Soit maintenant Q' un point de la rose du terrain auquel ne correspond aucun point de l'autre rose, mais auquel correspondrait le point Q si le cadre était suffisamment grand. L'angle que fait la corde QQ' avec le terrain ne peut différer beaucoup de celui qu'elle fait avec PP', on a alors :

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{OP}{OP'}.$$

Donc, en représentant par y l'ordonnée OP, et par y' l'ordonnée OP' sur le terrain, on a :

$$OQ = OQ' \frac{y}{y'}.$$

Mais n'ayant aucune raison pour choisir dans la rose verticale

un point plutôt qu'un autre, il est plus exact de calculer OQ au moyen de la formule

$$(2) \qquad OQ = OQ' \frac{\Sigma y}{\Sigma y'}$$

ce qui revient à remplacer l'ordonnée OP par la moyenne de toutes les ordonnées analogues, et OP′ par la moyenne de toutes celles qui leur correspondent sur le terrain.

Quant à l'abscisse, celle du cadre peut être considérée comme étant la même que celle du terrain.

Lorsque plus d'un tiers des coups tirés a manqué le cadre, on ne tient compte que de la rose horizontale.

Écarts. — La distance d'un point de la rose verticale de l'axe horizontal, ou de l'axe vertical de la rose, est appelée *écart vertical* ou *écart latéral.* Les distances d'un point de la rose horizontale à l'axe transversal ou à l'axe longitudinal s'appellent *écart en portée* ou *écart latéral.*

L'*écart moyen vertical,* que nous désignerons par K, est la moyenne arithmétique des écarts verticaux ; par conséquent,

$$(3) \qquad K = \frac{\Sigma(y_s - B) + \Sigma(B - y_i)}{n}$$

et comme $\Sigma\,(y_s - B) = \Sigma\,(B - y_i)$,

$$K = \frac{2}{n}\Sigma(y_s - B) = \frac{2(\Sigma y_s - sB)}{n}$$

(s désigne le nombre des coups dont les ordonnées sont supérieures à B).

D'une façon analogue, nous obtenons l'*écart moyen en portée,* et l'*écart latéral moyen* sur le cadre et sur le terrain.

L'*écart quadratique moyen vertical* est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts verticaux. En le désignant par k on a :

$$k = \sqrt{\frac{\Sigma(y - B)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - 2B\Sigma y + nB^2}{n}}$$

ou

$$(4) \qquad k = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - B^2}.$$

On aura de la même façon les autres écarts quadratiques moyens. Entre les écarts moyens et les écarts moyens quadratiques qui se correspondent, lorsque le nombre de coups tirés est très grand, on a à peu près $\frac{k}{K} = 1,25$. Ordinairement on calcule seulement les écarts moyens, et en les multipliant par 1,69, on en déduit les bandes contenant la moitié des coups ([1]). On peut opérer plus exactement de la façon suivante. S'il s'agit par exemple de calculer la bande E, on écrit à la suite et par ordre de grandeur les écarts latéraux d_1, d_2, ..., d_n, sans avoir égard au signe. Si n est impair, E est représentée par le double de l'écart, qui occupe le centre de la série ; si n est pair, E est représentée par la somme des deux déviations qui occupent le milieu de la série.

§ 3.

Corrections.

Angle d'élévation. — Soit (fig. 21) A la bouche de la pièce, AB la direction de son axe pendant le tir, S le but, C et C′ les deux centres de tir, le tout projeté sur le plan de tir. Le centre des tirs C

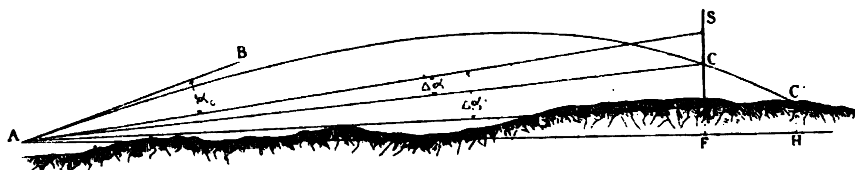


Fig. 21.

ne coïncidant pas avec S, l'angle d'élévation α_0 sous lequel on a tiré doit être corrigé de l'angle CAS $= \Delta\alpha$. Le triangle CAS étant à peu près rectangle en C, on a,

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{CS}{AC}.$$

Appelons B l'ordonnée du point C, B_0 celle de S, et D la

([1]) Voir section III, chapitre II.

distance horizontale du cadre à la bouche, en posant $AC = D$, on a :

$$(5) \qquad \operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{B_0 - B}{D} \qquad \text{ou} \qquad \Delta\alpha = \frac{B_0 - B}{D} \cdot \frac{180}{\pi} \quad \text{(en degrés)}$$

L'angle $\alpha_0 + \Delta\alpha$ est l'angle d'élévation correspondant à la distance D.

La correction de α_0 par rapport au centre C′ sur le terrain est représentée par $C'AS = \Delta\alpha' = SAF - C'AH$.

Comme il s'agit de petits angles, on peut également poser

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha' = \frac{SF}{D} - \frac{C'H}{D + FH}.$$

En appelant p et q les hauteurs, ou cotes, du pied du cadre et du centre C′ sur l'horizon de la pièce, et B′ l'ordonnée FH du centre C′, nous avons :

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha' = \frac{B_0 + p}{D} - \frac{q}{D + B'}$$

ou simplement

$$(6) \qquad \Delta\alpha' = \left[\frac{B_0 + p}{D} - \frac{q}{D + B'}\right] \frac{180}{\pi} \quad \text{(en degrés)}$$

L'angle $\alpha_0 + \Delta\alpha'$ est donc l'angle d'élévation correspondant à la distance $D + B'$.

Dérive. — Soit A_0 l'abscisse du but sur lequel on a visé avec la dérive de la série, c'est-à-dire avec S_0, A l'abscisse du centre de tir sur le cadre. La correction à effectuer pour un millimètre de dérive étant $\frac{D \cos \alpha}{L}$ (page 156), la variation de cette dernière pour $A_0 - A$ sera $\frac{L(A_0 - A)}{D \cos \alpha}$, par suite,

$$(7) \qquad S_0 + \frac{L(A_0 - A)}{D \cos \alpha}$$

est la dérive rectifiée pour la distance D. Si la correction doit être faite sur le centre de tir placé sur le terrain, on peut employer la même expression, en remplaçant A par A′ et D par $D + B'$.

Corrections dues au vent. — Si l'on a eu soin de mesurer la vitesse du vent, on peut corriger les abscisses des centres de tir. Soit W' la vitesse du vent mesurée perpendiculairement au plan de tir, T la durée de la trajectoire ; le déplacement latéral du point d'arrivée peut se calculer par la formule (page 116)

$$Z = W' \left(T - \frac{X}{V \cos\varphi} \right). \tag{8}$$

Cette quantité doit être ajoutée à l'abscisse du centre ou retranchée de cette abscisse, suivant que le vent souffle de droite à gauche ou de gauche à droite.

Les écarts verticaux et en portée se négligent en général. On peut toutefois les calculer au moyen des formules données dans le chapitre X, section I (page 116).

Angle d'arrivée.— Si on détermine (fig. 22) les centres C et C' des deux roses, on peut déterminer d'après leur position respective l'angle d'arrivée. En effet, imaginons un cercle passant par C et C' et par la bouche A.

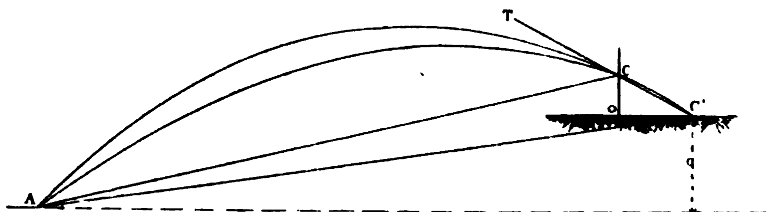


Fig. 22.

Comme l'arc de trajectoire CC' n'est pas très long, la tangente en C diffère très peu de la tangente au cercle tirée par le même point C. Soit CT cette tangente, joignons CC', AC et AC'. Or, d'après une propriété connue du cercle, TCA = CCA', par suite,

$$TCA = CC'O + OC'A,$$

et comme ces deux derniers angles sont très petits, on a :

$$\operatorname{tg} TCA = \operatorname{tg} CC'O + \operatorname{tg} OC'A.$$

En désignant finalement par B et B' les droites OC et OC', c'est-à-dire les ordonnées sur le cadre ou sur le terrain des deux centres, par q la

hauteur de C′ au-dessus de l'horizon de la pièce, et par D la distance du cadre, on a :

(9) $$\operatorname{tg} \mathrm{TCA} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{B}'} + \frac{q}{\mathrm{D} + \mathrm{B}'}$$

et l'angle TCA est l'angle d'arrivée à la distance D.

L'angle d'arrivée calculé de cette façon est moins exact que celui qui est calculé par la méthode indiquée plus loin (§ 4).

§ 4.

Réductions.

Les quantités obtenues dans le tir à la cible, c'est-à-dire les bandes, l'angle d'élévation, la dérive, l'angle d'arrivée, sont toutes rapportées à un centre de tir placé soit sur le cadre, soit sur le sol. Or, si le tir à la cible a pour objet la construction d'une table de tir, ces quantités doivent être rapportées à l'horizon de la pièce. En outre, les tables doivent être basées sur la densité moyenne de l'air, et peuvent même supposer une vitesse initiale un peu différente de celle que l'on a mesurée dans le tir à la cible.

Les quantités obtenues sont donc susceptibles de quelques réductions. Relativement aux bandes, à la dérive et à l'angle d'arrivée, la réduction peut être négligée, comme étant très petite, c'est-à-dire disproportionnée avec l'approximation assez grossière que l'expérience fournit dans la mesure de ces quantités. Mais la réduction est nécessaire pour l'angle d'élévation.

Réductions à l'horizon, à la densité moyenne et à la vitesse initiale adoptée.

Notations : $x\,(= \mathrm{D}$ ou $\mathrm{D} + \mathrm{B}')$ distance du centre des tirs.
$y\,(= \mathrm{B} + p$ ou $q)$ hauteur du centre des tirs.
ρ = angle de relèvement.
α = angle d'élévation corrigé, § 3.
φ_0 = angle de projection réduit à l'horizon.

On effectue la réduction à l'horizon en employant les formules (1) et (2) du problème X (page 73), en mettant $\alpha + \rho + \varepsilon$ à la place de φ. L'angle d'élévation réduit à l'horizon est $\varphi_0 - \rho$.

La réduction à la densité moyenne et à la vitesse initiale normale

se fait comme dans le problème IX (page 73). Dans le cas où l'on a pour but l'établissement des tables de tir, il convient de s'arrêter à la détermination de $i\beta$ (problème VIII, page 71).

Exemple : Canon de 16 G R. Données d'expériences :

$$x = 4950 \quad y = 58^{m} \quad \alpha = 21°9' \quad \rho = 9' \quad V_1 = 329 \quad \delta = 0,950$$

On demande $i\beta$ et l'angle de projection pour $X = 5\,000$, $\delta = 1$, $V = 330$.
D'après les formules (1) et (2) du problème X (page 73), on a :

$$\varepsilon = 40' \qquad \log \sin 2\varphi_0 = 9,82854 \qquad \varphi_0 = 21°11'.$$

En appliquant ensuite les formules des problèmes VIII et IX du chap. V, on trouve $i\beta = 0,945$, $\varphi = 21°,58'$, $\alpha = 21°,49'$.

Exemple : Canon de 95^{mm} français. Données d'expérience :

$$x = 2000 \quad y = 40 \quad \alpha = 3°55' \quad \rho = 17' \quad V_1 = 443 \quad \delta = 0,946.$$

Trouver $i\beta$ et l'angle de projection pour $X = 2\,050$ $\delta = 1$ $V = 447$
D'après les formules (1) et (2) du problème X (p. 73), on a :

$$\varepsilon = 1°9' \qquad \varphi_0 = 4°11'.$$

En opérant comme dans l'expérience précédente, on trouve $i\beta = 1,105$ $\alpha = 4°13'$.

CHAPITRE IV

TIR A LA CIBLE (Suite)

---

§ 1.

Tir courbe.

Dans le tir sous des angles supérieurs à 20° on suit en général les règles que nous avons indiquées précédemment, en tenant compte des différences suivantes :

1° La cible est toujours le terrain ;

2° Au lieu de la hausse, on emploie le quart de cercle, avec lequel on mesure l'angle de tir, c'est-à-dire l'angle fait par l'axe de la pièce avec l'horizon ;

3° Dans les tirs d'épreuve, pour amener le point de chute au pied du montant, les corrections se font sur le quart de cercle, si la charge est fixe, sur la charge, si l'angle est fixe ;

4° Si la charge est fixe, il n'y a pas lieu de se préoccuper de l'angle d'élévation ; mais on effectue les réductions de l'angle de tir à l'horizon, à la densité moyenne et à la vitesse moyenne, comme dans le paragraphe 4 du chapitre précédent, en ayant soin de remplacer, dans les formules que nous venons de rappeler, l'angle φ par l'angle adopté en négligeant l'angle ρ ;

5° Si l'angle est fixe, il n'y a pas lieu de faire de correction ou de réduction sur l'angle de tir, mais on doit faire les réductions sur la charge par rapport à l'angle de site et à la densité, en se basant pour la première réduction sur le principe (chap. VII) d'après lequel les abaissements sont proportionnels aux charges, et pour la seconde sur le problème V de la page 110. D'après cela, l'augmentation totale de la charge μ est donnée par l'expression

$$\Delta\mu = \mu\left[(f_1 - 1)(1 - \delta) - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varphi}\right]$$

ε représentant l'angle de site, δ la densité observée, f_1 le facteur de tir correspondant (Table VII) à $f = \frac{2\,V^2 \sin(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi}{gx\cos\varepsilon}$, x la distance du centre de la rose et V la vitesse initiale correspondant à μ.

§ 2.

Réglage de la fusée pour le tir à shrapnel.

Supposons que l'on ait à sa disposition une table de tir du shrapnel considéré comme un boulet.

La cible sur laquelle on vise avec la hausse et la dérive, de la table, peut être réduite à un simple but de pointage, mais on lui adjoint, dans le cas présent, trois panneaux distants de 20 m en 20 m l'un de l'autre, hauts de 3 m, larges de 30 m, qui représentent des pelotons d'infanterie ou de cavalerie. Au moyen de quelques coups d'épreuve, on détermine le réglage de la fusée, de façon à porter le point d'éclatement de 40 à 80 m en avant du premier panneau ; ayant fixé ce réglage (réglage de série), on épuise avec lui tous les coups de la série, en mesurant à chaque coup l'espace qui sépare le point d'éclatement du but. Cet espace s'appelle intervalle d'éclatement. L'intervalle d'éclatement se mesure au moyen de la chambre obscure dont nous parlerons plus loin.

Il importe que le réglage de série soit fait de telle façon qu'aucun shrapnel ne touche terre avant d'éclater. Il convient donc de régler la hausse sur le second panneau plutôt que sur le premier.

L'intervalle moyen d'éclatement s'obtient en additionnant tous les intervalles, c'est-à-dire les distances d'éclatement du premier panneau, et en les divisant par le nombre des coups. La déviation longitudinale moyenne des points d'éclatement, que nous désignerons par H, s'obtient comme la déviation moyenne longitudinale des points d'arrivée ; elle est représentée par la formule

$$H = \frac{\Sigma i_s - sI}{\frac{1}{2}n}$$

dans laquelle I est l'intervalle moyen d'éclatement, s le nombre

des intervalles plus grands que I, Σi, la somme de ces intervalles et n le nombre de coups.

Distance moyenne d'éclatement (correspondant à la graduation employée). — C'est la distance moyenne des éclatements à la bouche à feu. Si D est la distance du but, d'où sont comptés les intervalles, la distance moyenne est D — I.

Chambre obscure. — La chambre noire qui, dans les expériences, sert à relever les coordonnées des points d'éclatement, est constituée de la manière suivante (fig. 23) :

(*a*) *Une boîte* formée essentiellement de quatre parois, soit deux côtés, un fond, un dessus percé d'une ouverture et un rideau. Le fond porte une planchette posée sur des tasseaux pouvant recevoir, par le moyen d'une

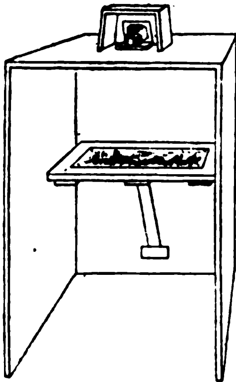


Fig. 23.

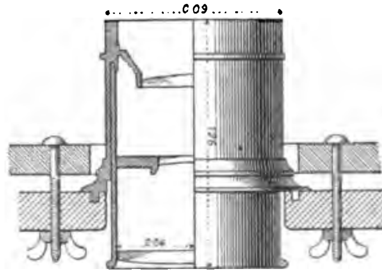


Fig. 24.

barre de support et d'une crémaillère, toutes les inclinaisons, parmi lesquelles il faudra choisir celle qui donne au foyer l'image réfléchie dans la chambre noire.

(*b*) *Un objectif photographique* (fig. 24) à trois lentilles, qu'on assure à la paroi supérieure au moyen d'un coussinet et de trois vis à écrous.

(*c*) *Un réflecteur à charnières* placé sur un support en bois, troué de façon à entourer avec assez de jeu la boîte métallique et l'objectif. Grâce à la tige fixée par une extrémité à la base et s'appuyant par l'autre sur une série de trous pratiqués dans le cadre du réflecteur, celui-ci pourra recevoir différentes inclinaisons par rapport à la base.

(*d*) *Un couvercle en bois*, en forme de lucarne, noirci à l'intérieur, sert à garantir l'objectif et le miroir des rayons qui ne sont pas compris dans le

champ utile d'observation. La chambre noire, le côté ouvert du côté de la ligne de tir, s'installe à droite ou à gauche de la ligne de tir, à une distance variant entre 200 et 250 m et sur une perpendiculaire élevée à 50 m en avant de la première file de panneaux.

On incline le réflecteur de manière à avoir sur une feuille de papier quadrillé, qu'on a préalablement étendue sur la planchette de l'appareil, l'image de l'espace de terrain comprise entre la première file de panneaux et un guidon placé à 100 m en avant de cette même file sur la ligne de tir.

On assure ensuite l'obscurité complète de la chambre noire au moyen du rideau, et également en garnissant avec quelques mottes de terre et de gazon le pourtour de la base ; on soulève ou l'on abaisse convenablement la planchette pour mettre l'image au point, on y assujettit la feuille de papier, en ayant soin de faire coïncider exactement une des lignes centrales de la feuille en question avec la direction du tir, enfin on y marque les images du guidon et de la première file de panneaux. La distance entre ces images représente 100 m ; l'échelle est donc déterminée.

Lorsque le shrapnel éclate dans le champ utile, la fumée produite par l'explosion vient se peindre sur le papier ; l'image y demeure quelques instants ; l'observateur marque alors, avec un crayon, le point d'explosion, et par la graduation du papier il peut déduire les coordonnées.

Pour évaluer tous les coups, il est bon d'avoir sur le papier l'image non seulement de l'espace compris entre le guidon et la première file de cibles, mais des trois files, avec une partie de l'espace compris entre le guidon et la batterie.

On peut retenir en principe que si la chambre noire est placée à 200 m de la direction, le champ utile est de 130 m environ, et qu'en la plaçant à 250 m, le champ utile s'étend à 170 m, à condition, bien entendu, que l'objectif ait la forme et les dimensions indiquées dans la figure 24.

CHAPITRE V

CONSTRUCTION DES TABLES DE TIR
MÉTHODES RATIONNELLES

§ 1.

Il existe plusieurs méthodes pour construire les tables de tir, les artilleurs n'étant pas du même avis relativemont à celle qu'il faut employer. Les plus arriérés préfèrent encore s'adresser aux vieilles méthodes, absolument empiriques : tirer un très grand nombre de coups, dans des conditions tout à fait quelconques de temps, de pression atmosphérique et de matériel, pour se rapprocher, comme ils disent, des circonstances moyennes du tir ; mesurer directement, comme l'on peut, les élévations, les dérives, les angles de chute, les temps, les bandes, à beaucoup de distances ; réunir le tout au moyen de diagrammes, sans se préoccuper des relations existantes entre les différentes quantités. D'autres artilleurs sont partisans de méthodes moins empiriques ; tirer bien un grand nombre de coups, mais dans les mêmes conditions, ou rendues égales, de matériel, de vitesse, de densité de l'air, déduire des expériences ce qu'elles peuvent donner de mieux, c'est-à-dire les angles de projection, et ce qui est indispensable, les dérives, les bandes longitudinales et latérales, représenter graphiquement ou au moyen d'équations empiriques tous les résultats obtenus et en déduire, au moyen des relations balistiques, ce que l'expérience ne peut donner qu'imparfaitement. Il existe enfin une troisième méthode qui consiste à s'appuyer autant que possible sur les formules de la balistique rationnelle, tout au moins pour ce qui regarde les principaux éléments, angles de projection, angles de chute, vitesses et temps ; et pour la détermination des autres quan-

tités, mettre à contribution les formules empiriques déjà établies sur la base de bonnes expériences.

Nous sommes pour la dernière méthode. En effet, quand les lois du mouvement des projectiles dans l'air étaient peu connues, l'établissement des tables de tir basées uniquement sur les expériences au moyen d'un grand nombre de coups tirés à plusieurs distances pouvait être suffisamment justifié. Mais, maintenant que la balistique rationnelle, même en n'empruntant rien, ou très peu, à l'expérience, pourrait fournir des tables de tir dont l'approximation serait déjà bien suffisante dans la plupart des cas, l'emploi de la méthode purement empirique serait non seulement archaïque, mais serait un gaspillage de temps, de munitions et de travail, gaspillage non seulement inutile, mais nuisible, puisqu'au moment du tir on aurait moins de chance de toucher le but, en se servant de ces tables soi-disant pratiques, que des tables établies sans avoir tiré un seul coup. Il est cependant utile et même nécessaire de tirer un certain nombre de coups; utile, pour contrôler et rectifier les données de pointage fournies par les formules balistiques; nécessaire, pour déterminer certaines quantités qui varient d'une bouche à feu à l'autre, comme la vitesse, l'angle de relèvement, et ce qui a trait aux dérives et surtout à la précision. Mais ces coups doivent être tirés dans les meilleures conditions, avec le plus grand soin, sans interruption et dans le moins de temps possible, par conséquent, peu nombreux. Un tir prolongé demande plusieurs jours, et les variations de vitesse, d'atmosphère, de lumière, d'un jour à l'autre, détruisent tous les avantages que dans d'autres recherches on peut attendre de la multiplicité des épreuves.

D'autre part, on ne détruit pas avec un livre de vieilles habitudes; nous exposerons donc, après les méthodes rationnelles, quelques procédés empiriques qui se rapprochent le plus des premières. Ces méthodes sont moins exactes, exigent plus de temps, plus de munitions et de fatigue, mais sont à la portée du plus grand nombre.

§ 2.

Charges fixes.

Charge de combat. — Calculs préliminaires. — Commencer par effectuer certains calculs préliminaires, c'est-à-dire déterminer : 1° la vitesse initiale ; 2° la distance maximum de la table ; 3° les données de tir correspondant aux 3/10, 6/10, 9/10 de cette même distance.

La vitesse initiale correspondant à la charge de combat est presque toujours connue d'après les tirs que l'on fait pour éprouver la résistance de la bouche à feu récemment construite. Si l'on connaît seulement la vitesse initiale V_1 correspondant à une charge μ_1 et que la charge à employer soit μ, la vitesse initiale peut être donnée par la formule

$$V = V_1 \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{0,6} \tag{1}$$

Si la bouche à feu n'a jamais été éprouvée, on peut déterminer la vitesse initiale en prenant pour terme de comparaison une bouche à feu déjà en service et en différant peu. Soit, pour cette dernière : V_1 la vitesse, μ_1 la charge, p_1 le poids du projectile, l_1 la longueur d'âme parcourue par le projectile, u_1 la capacité de la chambre, a_1 le diamètre du projectile, V, μ, p, l, u, a les quantités correspondantes pour la nouvelle bouche à feu, une formule du colonel Erb, de l'artillerie française, donne :

$$V = V_1 \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{0,6} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{0,43} \left(\frac{l}{l_1}\right)^{0,22} \left(\frac{u_1}{u}\right)^{0,225} \left(\frac{a}{a_1}\right)^{0,1} \tag{2}$$ [1]

La distance maximum, qu'il ne faut pas confondre avec la distance maximum utile de tir qui varie avec le but, dépend de l'angle maximum permis par la construction et la résistance de l'affût. Celui-ci diffère peu en général de 20°, mais peut être très supérieur. Soit Φ cet angle, on calcule la portée au moyen de

$$X = x_0 + \frac{x_1}{2}$$

comme dans le problème V (p. 70), en posant $C' = C$. On prend

[1] Nous croyons utile de faire connaître ici d'autres formules également employées pour les vitesses. Elles font l'objet de la note page 186. (*Note du traducteur.*)

les 3/10, 6/10, 9/10 de cette portée, on les arrondit en les ramenant à des multiples exacts d'hectomètres, ou on les modifie légèrement s'il est nécessaire suivant les exigences du terrain sur lequel on tire [1]. Soit X_1 X_2 X_3 les distances ainsi réduites. Au

[1] D'après une théorie nouvelle sur les distances du tir d'expérience, le capitaine Vallier, de l'artillerie française, en suivant les théories de Tchebicheff, propose de tirer aux distances 0,067 X, 0,500 X, 0,933 X, X désignant la distance maximum. *Sur la compensation et la conduite des expériences.* (*Mémorial d'artillerie de marine*, 1889.)

NOTE SUR LES VITESSES INITIALES

D'autres formules sont également employées pour déterminer les vitesses initiales ou les relations entre les vitesses et les charges. Les deux premières sont dues à M. Sarrau, ingénieur en chef des poudres et salpêtres ; elles sont représentées par les expressions

$$V = A\alpha(\mu u)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{\Delta}{pc}\right)^{\frac{1}{4}} \left[1 - B\beta \frac{(pu)^{\frac{1}{2}}}{c}\right]$$

$$V = M\left(\alpha\beta^{-\frac{3}{8}}\right) \frac{\mu^{\frac{3}{8}} \Delta^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{8}} u^{\frac{3}{16}}}{p^{\frac{7}{16}}}$$

Dans ces formules A, B, M sont des constantes, α, β des coefficients numériques dépendant de la nature de la poudre, u la longueur du parcours des projectiles, μ le poids de la charge, Δ la densité de chargement, p le poids du projectile, c le calibre de la bouche à feu, V la vitesse initiale. Les unités sont le décimètre et le kilogr.

La première s'emploie pour les valeurs de $B\beta \frac{(pu)^{\frac{1}{2}}}{c}$ inférieures à 0,273, et la seconde lorsque la valeur de ce terme est supérieure à 0,273.

Pour une même pièce le rapport des vitesses est donc, dans le cas où les charges diffèrent seules,

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\mu^{\frac{3}{8}} \Delta^{\frac{1}{4}}}{\mu_1^{\frac{3}{8}} \Delta_1^{\frac{1}{4}}}$$

mais si l'on appelle c' le volume de la chambre à poudre, on a : $\mu = c'\Delta$, d'où $\Delta = \frac{\mu}{c'}$; donc en remplaçant, dans l'expression précédente, Δ par cette valeur, il vient :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\mu^{\frac{5}{8}}}{\mu_1^{\frac{5}{8}}} = \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{0,625}$$

L'exposant des valeurs de μ est donc 0,625 au lieu de 0,600.

La troisième formule est celle de la Commission de Gâvre ; elle a pour expression

$$V = \frac{M}{a^q} \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} \mu^m \left(\frac{c}{c'} - 1\right)^{\frac{1}{4}}$$

Dans cette formule M est un coefficient numérique dépendant de la nature de la poudre, a est le calibre en décimètres, p le poids du projectile en kilogr., μ la charge en kilogr., c le volume de l'âme et c' celui de la chambre à poudre, q un exposant

moyen des formules de la page 68 (problème I), on calcule les trois angles de projection φ_1 φ_2 φ_3 correspondants, en posant $\delta i\beta = 1$. On retranche l'angle de relèvement que l'on peut estimer à 1/4, 1/8 ou 1/16 de degré, suivant que l'on opère avec une pièce

---

dépendant du calibre, et *m* un autre exposant dépendant de la poudre. Pour une pièce tirant des charges différentes, le rapport des vitesses est donc :

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^m .$$

Les valeurs de *m*, pour les diverses poudres employées en France, avant les poudres prismatiques, sont les suivantes :

ESPÈCES DE POUDRE.				VALEURS DE *m*.
$W_{\frac{13}{16}}$	$W_{\frac{16}{20}}$	A_3S	$A_{\frac{15}{20}}$	0,62
$W_{\frac{20}{25}}$	$W_{\frac{25}{30}}$	$A_{\frac{28}{34}}$		0,60
$W_{\frac{30}{38}}$	$A_{\frac{30}{40}}$			0,55

W désigne les poudres de Wetteren et A les poudres françaises.

Relativement aux poudres prismatiques employées actuellement et qui sont de trois sortes, désignées sous la forme PB_3 PB_2 PB_1, les valeurs les plus probables de *m* sont

PB_3	0,555
PB_2	0,505
PB_1	0,625

D'une façon générale, si l'on fait la moyenne des diverses valeurs obtenues pour *m*, on trouve 0,591 valeur très voisine de 0,6. On peut donc pour de faibles variations de charge prendre 0,6 comme exposant de la charge. Nous donnons dans le tableau suivant les valeurs de $\mu^{0,6}$ pour des charges variant de 100 gr. à 28 kilogr.

Tableau des valeurs de $\mu^{0.6}$.

(Extrait de l'*Aide-mémoire de l'artillerie de terre.*)

p.	Log $p^{0.6}$	$p^{0.6}$	*p*.	Log $p^{0.6}$	$p^{0.6}$	*p*.	Log $p^{0.6}$	$p^{0.6}$
100	1,200	15,85	1 600	1,9225	83,65	10 000	2,4000	251,19
150	1,3056	20,21	1 800	1,9542	89,78	10 500	2,4127	258,65
200	1,3806	24,02	2 000	1,9806	95,63	11 000	2,4248	265,97
250	1,4388	27,46	2 200	2,0055	101,26	11 500	2,4364	273,16
300	1,4863	30,64	2 400	2,0281	106,69	12 000	2,4475	280,22
350	1,5264	33,61	2 500	2,0388	109,33	12 500	2,4581	287,18
400	1,5612	36,41	2 600	2,0490	111,94	13 000	2,4684	294,01
450	1,5919	39,08	2 800	2,0683	117,03	13 500	2,4782	300,75
500	1,6194	41,63	3 000	2,0863	121,97	14 000	2,4877	307,39
550	1,6442	44,08	3 200	2,1031	126,79	14 500	2,4963	313,92
600	1,6669	46,41	3 500	2,1264	133,78	15 000	2,5056	320,37
650	1,6878	48,72	3 800	2,1479	140,56	16 000	2,5225	333,02
700	1,7071	50,91	4 000	2,1612	144,96	17 000	2,5383	345,86
750	1,7250	53,09	4 500	2,1919	155,57	18 000	2,5532	357,41
800	1,7414	55,19	5 000	2,2194	165,72	19 000	2,5673	369,19
850	1,7577	57,23	5 500	2,2412	175,48	20 000	2,5806	380,73
900	1,7725	59,23	6 000	2,2669	184,88	21 000	2,5933	392,04
950	1,7866	61,18	6 500	2,2877	193,98	22 000	2,6065	403,14
1 000	1,8000	63,10	7 000	2,3071	202,80	23 000	2,6170	411,04
1 100	1,8248	66,81	7 500	2,3250	211,87	24 000	2,6281	424,75
1 200	1,8475	70,39	8 000	2,3418	219,71	25 000	2,6388	435,27
1 300	1,8684	73,85	8 500	2,3577	227,85	26 000	2,6490	445,63
1 400	1,8877	77,21	9 000	2,3725	235,80	27 000	2,6588	455,85
1 500	1,9057	80,47	9 500	2,3866	243,57	28 000	2,6883	465,91

Avant de terminer nous ferons remarquer l'analogie qui existe entre la formule

de petit, de moyen ou de gros calibre, et l'on obtient les élévations $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, ainsi que les hausses par la formule

$$H = L\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{3}$$

On peut employer pour les dérives la formule

$$S = Lh\frac{V^2 \sin^2\varphi}{X\cos\alpha} \tag{4}$$

en mettant pour h la valeur donnée par l'équation (2) [p. 124].

H et S sont les hausses et les dérives d'épreuve [1].

---

monôme de Sarrau et la formule du colonel Erb. En employant pour cette dernière les mêmes notations que pour celles de Sarrau, on peut l'écrire

$$V = K\frac{\mu^{\frac{3}{5}} c^{\frac{1}{10}} u^{\frac{11}{50}}}{p^{\frac{43}{100}} v^{\frac{9}{40}}}$$

K étant un coefficient dépendant de la nature de la poudre et v la capacité de la chambre. La formule de Sarrau mise sous la même forme en posant $\Delta = \frac{\mu}{v}$ donne

$$V = K_1\frac{\mu^{\frac{5}{8}} c^{\frac{1}{8}} u^{\frac{3}{16}}}{p^{\frac{7}{16}} v^{\frac{1}{4}}}.$$

En réduisant les exposants en fractions décimales, on trouve

EXPOSANTS de	FORMULE de Erb.	FORMULE de Sarrau.
μ	0,600	0,625
c	0,100	0,125
u	0,220	0,187
p	0,430	0,437
v	0,225	0,250

(*Note du Traducteur.*)

---

[1] Les formules employées en France sont les suivantes : En appelant θ l'inclinaison du canal de hausse sur le plan de tir, et Δ la dérivation, on a

$$H = \frac{L\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\theta} \qquad \text{Si } \theta = 0 \qquad H = L\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

$$S = \frac{L}{\cos\alpha}\,\mathrm{tg}\,m - H\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad \sin m = \frac{\Delta}{X}$$

Comme en général $\frac{\Delta}{X}$ est très petit, on peut remplacer la tangente par le sinus et l'on a alors

$$S = \frac{L\Delta}{X\cos\alpha} - H\,\mathrm{tg}\,\theta, \text{ et si } \theta = 0 \qquad S = \frac{L\Delta}{X\cos\alpha}$$

et l'on retombe sur la formule (4). (*Note du Traducteur.*)

Exécution des expériences. — Il suffit de tirer 40 à 50 coups distribués en séries correspondant aux distances X_1 X_2 X_3: le nombre des coups se répartit de la façon suivante : 2/10 pour X_1, 3/10 pour X_2, 4/10 pour X_3 ; le 1/10 restant est destiné aux coups d'épreuve. Dans chaque série on suit les règles expliquées au chapitre III. A la dernière distance, et même à la seconde, il est presque toujours inutile de tirer sur un but vertical, car il est à supposer qu'il ne recevrait pas les 2/3 des coups tirés.

On commence par tirer à la distance la plus faible, en mesurant en même temps la vitesse initiale et l'angle de relèvement ; on passe ensuite à la distance moyenne et enfin à la plus grande. Il est nécessaire d'épuiser le nombre de coups à tirer en un seul jour et, dans le cas où cela n'est pas possible, il faut mesurer la vitesse initiale chaque jour immédiatement avant ou après le tir, en tirant dans une butte en terre si l'angle de projection est supérieur à 10°, et, dans ce cas, on peut compter sur six coups au moins en plus sur le nombre indiqué plus haut.

Développement de la table. — Ayant complété toutes les expériences et effectué les calculs indiqués au chapitre III, on connaît par rapport aux trois distances X_1 X'_2 X'_3 (ces deux dernières différant en général de X_2 et de X_3 par suite des corrections) les quantités suivantes :

Les coefficients	$i\beta_1$	$i\beta_2$	$i\beta_3$
Les dérives.	S_1	S_2	S_3
Les bandes latérales	E_1	E_2	E_3
Les bandes longitudinales.	F_1'	F_2'	F_3'

La première distance à laquelle on a établi un cadre ne peut servir à déterminer directement la bande longitudinale, à cause de la tension de la trajectoire, mais on peut obtenir celle-ci en multipliant la baude verticale par cotg ω, quand on a déterminé ω.

Les trois valeurs de $i\beta$ ne sont pas identiques, mais ne diffèrent pas cependant beaucoup l'une de l'autre. En général, il suffit de prendre leur moyenne arithmétique $i\beta_m$. On peut en tout cas les coordonner aux distances X au moyen d'une droite diagramme. On peut alors procéder au développement des valeurs de φ, ω, T, U pour toutes les distances de la table, en employant les formules

de la page 68 (problème I), dans lesquelles on remplace V par la moyenne des vitesses initiales mesurées (si les expériences ont duré plus d'un jour) et C′ (suivant le cas) par

$$C' = \frac{C}{i\beta_m} \qquad C' = \frac{C}{i\beta_X}$$

puisque les tables de tir sont rapportées à la densité moyenne ($\delta = 1$). Il serait fort pénible de déterminer directement toutes ces quantités d'après la table balistique. Il suffit d'en calculer un certain nombre, par exemple pour des distances de 500 m en 500 m et de déterminer les autres par interpolation graphique. Par exemple, relativement aux hausses, après avoir calculé celles qui correspondent à des intervalles de 500 m en 500 m, on trace sur une feuille de papier quadrillé deux axes coordonnés orthogonaux ; sur l'axe horizontal, on porte des longueurs proportionnelles aux distances (1 cm par hectomètre), et sur les verticales correspondantes les hausses, à une certaine échelle, 1 ou 1/2. On fait alors passer une courbe par tous les points, et cette courbe donne les hausses pour toutes distances.

On opère de la même façon pour α, ω, U et T.

Quant aux dérives, on peut employer la formule empirique

$$S = \frac{L}{X \cos\alpha} h V^2 \sin^2\varphi.$$

En remplaçant S, X, V, α et φ par les valeurs moyennes trouvées dans chaque série, on détermine autant de valeurs de h ; on en prend la moyenne arithmétique, qui sert pour le calcul des dérives correspondant à des intervalles de 500 m en 500 m. Une interpolation graphique donne les autres valeurs [1].

Quant aux bandes, on fait usage des formules empiriques suivantes (p. 128) :

$$(5) \quad \begin{cases} \textit{Largeur de bande} \ldots\ldots & E = h' V^2 \sin\varphi \\ \textit{Profondeur de bande} \ldots & F' = \sqrt{h'^2 V^4 \cos^2 2\varphi + h''^2 V^2 \sin^2 2\varphi}. \end{cases}$$

On détermine les valeurs moyennes de h' et de h'' par le même procédé que h. On calcule alors E, F′, $F = F' \operatorname{tg}\omega$ de 500 m en

[1] Il convient de mettre de côté les valeurs affectées par l'influence du vent, si l'on n'a pas effectué les corrections y relatives.

500 m, et on interpole graphiquement pour les autres valeurs des mêmes variables.

Petites charges. — Quand, pour une bouche à feu, on veut établir plusieurs tables de tir correspondant à des charges décroissantes, il n'est pas nécessaire d'expérimenter chaque charge. Pour la charge minimum d'expérience, on peut employer pour les canons ou pour les obusiers celle qui donne la vitesse initiale de 150 m, avec laquelle l'angle de projection peut atteindre au moins 45°, sans trop de fatigue pour l'affût. On opère d'abord avec cette charge et avec une ou deux des autres charges intermédiaires entre cette charge et celle de combat, une pour les obusiers et deux pour les canons.

La vitesse minimum V_0 étant déterminée, la charge correspondante μ_0 est donnée par la formule

$$(6) \qquad \mu_0 = \mu_f \left(\frac{V_0}{V_f}\right)^{\frac{8}{3}}$$

μ_f étant la charge de combat et V_f la vitesse initiale correspondante.

Ayant ensuite fixé la ou les charges intermédiaires, les vitesses initiales approximatives correspondantes peuvent se déduire de la formule précédente. Ces vitesses, y compris V_0, servent pour effectuer les calculs préliminaires tout à fait identiques à ceux qui ont été indiqués pour la charge de combat. La distance maximum pour chaque charge est celle qui correspond à l'angle maximum permis par l'organisation de l'affût et par sa résistance. On fait le même nombre d'expériences, en tirant le même nombre de coups également distribués. Si, pour chaque charge expérimentée, la distance maximum reste inférieure à 2 000 m, il est inutile de tirer à trois distances différentes ; on se sert alors dans ce cas de la méthode abrégée (§ 3).

Après avoir terminé les expériences et effectué les calculs relatifs à la rose, on établit pour chaque charge expérimentée, y compris celle de combat, le diagramme des valeurs de $i\beta$, et l'on interpole les diagrammes de façon à avoir un diagramme pour chacune des charges qui doivent figurer dans les tables de tir [1]. Il arrive

---

[1] Ces diagrammes sont très simples et se réduisent la plupart du temps au tracé d'une droite. Relativement à l'interpolation des diagrammes et en particulier des diagrammes linéaires, voir le chapitre VI, § 2.

souvent que pour chaque charge expérimentée on peut employer une seule valeur moyenne $i\beta_m$ pour toutes les distances, et alors les trois ou quatre valeurs moyennes et les charges sont reliées par un diagramme qui donne les valeurs moyennes $i\beta_m$ qu'il faut adopter pour toutes les autres charges. On peut alors procéder à la détermination de φ, ω, T, U, α, H, pour toutes les distances et toutes les charges, en remarquant que les vitesses initiales correspondant aux charges non expérimentées peuvent se déduire au moyen d'un diagramme linéaire que l'on construit en prenant pour abscisses les logarithmes des charges et pour ordonnées les logarithmes des vitesses initiales correspondantes; ou bien pour abscisses les charges, et pour ordonnées les carrés des vitesses ([1]).

Quant aux dérives, on peut employer la formule (4). Ayant déterminé, comme pour la charge μ_f, les valeurs moyennes de h correspondant aux charges d'expérience, on les reliera par un diagramme. Il suffit ordinairement de prendre pour toutes les charges une valeur unique, la moyenne des valeurs de h.

Les mêmes méthodes sont applicables aux bandes.

Mortiers. — Les mortiers (et quelquefois les obusiers) sont destinés à tirer avec des charges inférieures à celle qui donne la vitesse de 150 m. Pour ces charges, il n'est pas nécessaire de faire de tirs à la cible. On détermine à la butte la vitesse V' qui correspond à ces charges et on calcule, en se basant sur le problème IV de la page 88, la portée X' correspondant à chaque portée X que donne la table de tir déjà établie pour la charge μ_0, et cela pour quatre ou cinq angles de tir. Connaissant V', φ', X', le problème I de la page 86 donne tous les autres éléments principaux. Il ne reste plus à faire qu'une interpolation graphique.

Relativement aux dérivations et aux bandes, il suffit de prendre pour valeurs de h, h', h'' celles qui correspondent à la charge μ_0.

Angles supérieurs à 45°. — Quand l'angle de projection est supé-

---

([1]) Il est inutile de faire remarquer que les vitesses initiales sont celles que donne l'expérience. Les diagrammes linéaires dont nous parlons correspondent aux formules empiriques $V = a\mu^b$ et $V^2 = a\mu + \beta$. Cette dernière formule a été proposée par le capitaine Parodi. En ce qui regarde les échelles à employer, on peut prendre 1 mm par 0,001 de la mantisse de log V ou de log μ, ou comme représentant une unité de la valeur de $\left(\frac{V}{10}\right)^2$.

rieur à 45°, les formules de la balistique théorique sont moins exactes que pour les angles moindres que 45°. Il est alors nécessaire de faire des expériences spéciales. On peut effectuer deux séries de tir à la cible ; une des séries doit être faite en employant l'angle de 45° et avec la charge maximum compatible avec cet angle ; l'autre série sera tirée avec l'angle maximum Φ et avec la charge maximum μ_{Φ} compatible avec Φ (20 coups par charge, 14 à la cible et 6 à la butte).

Ayant effectué la réduction indiquée au § 4 de la page 177, soit μ' une charge comprise entre μ_{45} et μ_{Φ} ou inférieure à chacune, à laquelle correspond la vitesse V', on détermine les portées X' correspondant à la vitesse V' et aux angles 45°, 50°, 55°, 60°, 65°, 70°... Φ (problème IV, page 88), en employant les données d'expérience obtenues avec la charge μ_{45} pour les quatre premiers angles, et des données que l'on obtient avec chaque charge μ_{Φ} pour les angles successifs. Il suffit, pour le reste, de procéder comme il a été dit au sujet des mortiers.

Lorsque l'angle Φ n'est pas supérieur à 60°, les deux séries peuvent être ramenées à un seul angle moyen pris entre 45° et Φ.

Tables complètes et tables spéciales. — En s'appuyant sur les expériences et sur les calculs indiqués précédemment, on peut établir un système complet de tables pour toute l'échelle des angles et des charges possibles. De ces tables complètes, on peut déduire des tables à angle de projection fixe, des tables à angle de chute fixe, et, en général, toutes les formes de table que l'on peut supposer être propres à chaque genre de tir.

§ 3.

Méthode abrégée. — Charge de combat. — Tirer 30 coups, dont 22 à la cible aux 3/5 de la distance maximum, et 8 à la butte, sous un angle de projection très faible, pour mesurer l'angle de relèvement et la vitesse initiale. Ces huit coups doivent être tirés avant ou après les 22, ou mieux 4 avant et 4 après, sans interruption, par un jour calme ; noter les circonstances atmosphériques au commencement et à la fin du tir. Calculs identiques à ceux que nous avons indiqués.

Faibles charges. — 30 coups à la charge moyenne et autant à la charge μ_0 donnant 150 m de vitesse, distribués comme dans le cas de la charge de combat.

Calculs identiques aux précédents.

Les tables obtenues par cette méthode abrégée ne valent guère moins que celles obtenues par l'autre, pourvu que les 30 coups relatifs à une même charge soient tirés le même jour, dans une même séance, par un temps calme, et que toutes les opérations soient faites consciencieusement et habilement.

CHAPITRE VI

CONSTRUCTION DES TABLES DE TIR

---

§ 1.

Méthodes empiriques.

La meilleure méthode empirique pour construire une table de tir à charge fixe est la suivante :

Pour déterminer les éléments principaux, on part, non pas des valeurs de $i\beta$, mais des distances X et des angles φ fournis par l'expérience, dont les valeurs sont ramenées à l'horizon, à la densité moyenne $\delta = 1$, et à la vitesse initiale adoptée, comme il a été indiqué au chapitre III, page 177.

Équations. — L'équation la plus simple qui relie les angles φ aux portées X est :

$$(1) \qquad \sin 2\varphi_x = kX + aX^2 + bX^3$$

équation dans laquelle on a $k = \frac{g}{V^2}$, et

$$a = \frac{\Sigma X^2 \sin 2\varphi \, \Sigma X^6}{D \Sigma X^5} - \frac{\Sigma X^3 \sin 2\varphi}{D} + \frac{k \Sigma X^4}{D} - \frac{k \Sigma X^3 \Sigma X^6}{D \Sigma X^5}$$

$$b = \frac{\Sigma X^3 \sin 2\varphi \, \Sigma X^4}{D \Sigma X^5} - \frac{\Sigma X^2 \sin 2\varphi}{D} + \frac{k \Sigma X^3}{D} - \frac{k \Sigma X^4 \Sigma X^4}{D \Sigma X^5}$$

$$D = \frac{\Sigma X^6 \Sigma X^4}{\Sigma X^5} - \Sigma X^5 \text{ (1)}$$

Les quantités X et φ placées sous le signe Σ sont les distances et les angles de projection fournis par l'expérience.

---

(1) Les valeurs de a et b sont déterminées par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire par les conditions que la somme des carrés des différences entre les valeurs de $\sin 2\varphi$ données par l'expérience et par la formule (1) soit minimum (Section III, chapitre II).

Pour les angles de chute, les vitesses restantes et les temps, on emploie les formules suivantes :

(2) $$\operatorname{tg} \omega_X = \frac{kX + 2aX^2 + 3bX^3}{2 \cos^2 \varphi_X}.$$

(approximativement).

(2)′ $$\sin 2\omega_X = kX + 2aX^2 + 3bX^3$$

(3) $$\frac{g}{u_X^2} = k + 3aX + 6bX^2$$

(4) $$T_X = \frac{1}{\cos \varphi_X} \Sigma \frac{\Delta x}{u_X}$$ (1)

Ayant d'après l'équation (3) la valeur de $\frac{g}{u^2_X}$, on en déduit immédiatement u_X au moyen de la table XI, et l'on a v_x par la formule

$$v_X = u_X \frac{\cos \varphi_X}{\cos \omega_X}.$$

Dans la plupart des cas, on peut prendre $v_X = u_X$.

Dans l'équation (4), on peut faire $\Delta x = 100$, et prendre les valeurs de $\frac{1}{u_X}$ de 100 en 100m, jusqu'à la distance X, à laquelle correspond φ_X. Les termes de la somme sont en nombre égal à celui des hectomètres contenus dans X, ou en général en nombre égal à celui des unités contenues dans la fraction $\frac{X}{\Delta x}$. La table XII donne les valeurs de $\frac{100}{u}$ correspondant à u.

Pour les dérives et les bandes, si l'on ne veut pas faire usage des équations empiriques employées dans le chapitre précédent, on a recours aux méthodes graphiques, que l'on peut employer sans les conseiller toutefois, surtout pour la détermination des éléments principaux.

---

(1) Les équations (2), (3) et (4) dérivent de l'équation (c) de la page 77, qui pour l'équation (1) devient :

$$y = \frac{x}{2 \cos^2 \varphi} (\sin 2\varphi - kx - ax^2 - bx^3)$$

En prenant la dérivée $\frac{dy}{dx}$, et en posant ensuite $\frac{dy}{dx} = - \operatorname{tg} \omega_x \quad \sin 2\varphi = \sin 2\varphi_x$, on obtient l'équation (2).

L'équation (3) provient de $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \operatorname{tg} \theta}{dx} = - \frac{g}{v^2 \cos^2 \theta} = - \frac{g}{u^2 \cos^2 \varphi}$ (équation 5, page 26.)

L'équation (4) provient de $dt = \frac{dx}{v \cos \theta} = \frac{dx}{u \cos \varphi}$.

Diagrammes. — Employer des feuilles de papier quadrillé au millimètre et une règle plate flexible, que l'on applique par son petit côté sur le papier, et que l'on courbe de façon à la faire passer par tous les points déterminés, ou le plus près possible, soit en dessus, soit en dessous.

Échelles à conseiller :

Distances : 1 *cm* par hectomètre ;

Angles : 10 *mm* par degré ;

Hausses et dérives : 1 *mm* par 1 *mm* ;

Durées : 10 *mm* par seconde ;

Vitesses : 1 *mm* par mètre ;

Bandes : 5 *mm* par mètre ;

Charges : 1 *mm* par 10 gr., 20 gr., 100 gr., suivant le poids de la charge maximum ;

$i\beta$ et i : 1 *mm* pour 0,01.

Angles de projection. — Prendre pour abscisses les distances X et pour ordonnées les valeurs de φ en degrés. La courbe obtenue tourne sa convexité vers l'axe des X, n'a pas de points d'inflexion, passe par l'origine et rencontre l'axe des distances sous un angle dont la tangente est $\frac{g}{2V^2}\frac{180}{\pi}$ (¹). Cette tangente peut se construire au moyen d'un triangle ayant pour côté horizontal l'abscisse $\frac{\pi V^2}{5g}$ (en mètres) et une ordonnée égale à 18°, le mètre et le degré étant pris à l'échelle.

Angles de chute. — Prendre sur le diagramme l'angle φ correspondant à la distance X, et l'angle $\varphi + \Delta\varphi$ correspondant à une distance un peu supérieure $X + \Delta X$ (par exemple $\Delta X = 100$). L'angle de chute à la distance X est alors donné par l'équation :

$$\operatorname{tg}\omega = X\frac{\Delta\varphi}{\Delta X}\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi}.$$

On effectue le calcul de l'angle ω pour un certain nombre de distances, et l'on construit le diagramme des angles ω, calcul analogue à celui des φ. La courbe représentative n'a pas d'inflexion, passe par l'origine et rencontre l'axe des X sous le même angle que la courbe des φ.

Durée. — Prendre pour abscisses les distances, pour ordonnées les moyennes des durées observées. La courbe représentative est convexe vers l'axe des x, passe par l'origine et rencontre l'axe des x sous un angle dont la tangente est $\frac{1}{V}$. On peut tracer la tangente initiale au moyen d'un triangle

(¹) En effet $\frac{d\varphi_x}{dX}$ pour $X = 0$ devient $\frac{k}{2} = \frac{g}{2V^2}$.

rectangle ayant pour côté horizontal 10 V. (mètres) et pour côté vertical 10″, le mètre et la seconde étant pris à l'échelle.

Vitesses. — Prendre du diagramme précédent la durée T correspondant à la distance X et la durée T + ΔT correspondant à une distance X + ΔX peu supérieure à X (par exemple ΔX = 100), la vitesse restante est :

$$v = \frac{\frac{\Delta X}{\Delta T}\cos\varphi}{\cos\omega - \frac{\Delta X}{\Delta T}\frac{T}{X}\frac{\operatorname{tg}2\varphi\sin\omega}{2}}$$

Pour une distance très voisine de l'origine, on peut prendre $v = \frac{\Delta X}{\Delta T}$. On calcule quelques vitesses correspondant à quelques distances, et l'on construit le diagramme ; sa courbure est tournée vers l'axe des X, et il coupe l'axe des v à la hauteur V. Ce diagramme donne les vitesses restantes avec bien peu d'approximation.

Dérives. — Prendre les distances pour abscisses, et les dérives pour ordonnées, en ne tenant compte que de celles qui ont été corrigées de l'influence du vent.

Bandes. — Prendre pour abscisses les distances, pour ordonnées les bandes longitudinales et latérales, sans prolonger la courbe jusqu'à l'origine. Les bandes verticales se déduisent des bandes longitudinales en multipliant ces dernières par tg ω.

§ 2.

Charges réduites. — Quand on veut établir des tables de tir à charges constantes inférieures à la charge maximum, la meilleure méthode empirique est la suivante :

1° Établir sur une même feuille les diagrammes des angles de projection pour chaque charge expérimentée ;

2° Du faisceau ainsi obtenu, en déduire, par voie d'interpolation, un faisceau de diagrammes correspondant à toutes les charges pour lesquelles on doit établir des tables de tir ;

3° Prendre dans chaque diagramme du dernier faisceau un certain nombre d'angles de projection correspondant à autant de distances (par exemple 500, 1000, 1500 m, etc.) et s'en servir, en posant $\frac{g}{V^2} = k$ pour le calcul des coefficients a et b des équations analogues à

$$\sin 2\varphi_X = kX + aX^2 + bX^3.$$

Une équation pour chaque charge.

4° Déduire des équations pour chaque distance les angles de projection et de chute, les vitesses et les temps, en suivant ce qui a été dit au paragraphe 1er ;

5° Pour les dérives et les bandes, employer des diagrammes ; faire les faisceaux comme pour les angles de projection et ensuite interpoler.

Dans le cas des tables à angle fixe et à charges variables avec les distances se présente naturellement la méthode des diagrammes pour déterminer les charges à chaque distance, les durées, les dérives, les bandes, mais elle ne donne pas les éléments non observés, tels que les angles et les vitesses de chute, ou les donne au moyen des équations qui rentrent dans la méthode rationnelle.

Interpolation des diagrammes. — Quand on a réuni un ensemble de diagrammes de même espèce, pour interpoler d'autres diagrammes, il ne faut pas les tracer sans précaution, spécialement dans le cas qui concerne les angles de projection, qui exige une grande exactitude. Relativement à ces derniers, nous indiquerons la méthode suivante qui, du reste, peut s'appliquer à n'importe quel autre genre de diagrammes.

Ayant tracé un certain nombre de diagrammes (5 par exemple) entre les distances et les angles de projection correspondant à autant de charges expérimentées $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4\ \mu_5$, on transforme d'abord ce faisceau en un autre représentant la relation entre les distances et les charges pour *angles fixes*. Pour obtenir ce résultat, on commence d'abord par couper le premier faisceau au moyen d'un certain nombre de parallèles à l'axe des distances qu'on mène aux hauteurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ... etc. La parallèle à la hauteur φ_1 rencontre les cinq diagrammes aux distances $X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5$; et ces distances représentent celles pour lesquelles, en tirant sous l'angle fixe φ_1, il eût été nécessaire d'employer les charges $\mu_1\ \mu_2 \ldots\ \mu_5$. En traçant par conséquent sur une seconde feuille deux axes, et en portant sur l'un les abscisses $X_1\ X_2 \ldots\ X_5$, sur l'autre $\mu_1\ \mu_2 \ldots\ \mu_5$, la ligne obtenue est le diagramme des charges par rapport aux distances, pour l'angle fixe φ_1.

On opère de même pour autant d'angles qu'on veut. Après cela, si l'on opère d'une façon inverse, on transforme de nouveau le faisceau à angles fixes en un faisceau à charges fixes, et en prenant pour charges fixes du dernier faisceau celles qui se rapportent à la table de tir, l'interpolation cherchée est obtenue.

Ces opérations sont accompagnées de retouches successives aux courbes, de façon à obtenir une régularité non seulement pour chaque diagramme, mais aussi dans leur succession.

Diagrammes linéaires. — En suivant la méthode d'expérience indiquée au chapitre V, on obtient trois diagrammes entre les $i\beta$ et les X correspondant aux trois charges μ_f, μ_1, μ_0. Ces diagrammes peuvent être rectilignes, et ils coupent presque à angle droit l'axe des ordonnées. Pour avoir les diagrammes rectilignes correspondant aux charges intermédiaires, on peut

opérer comme il suit. Soit OA_0, OA_1, OA_f les hauteurs (fig. 25), où les trois diagrammes rencontrent l'axe OY des ordonnées, et soient $O'B_0$, $O'B_1$,

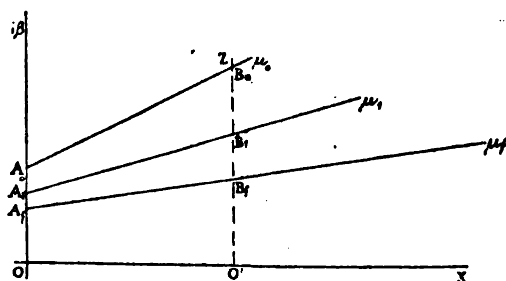


Fig. 25.

$O'B_f$ les hauteurs auxquelles ces mêmes diagrammes rencontrent une droite parallèle O'Z au même axe. On relie d'abord (fig. 26) par un diagramme quelconque les quantités μ_0, μ_1, μ_f, avec OA_0, OA_1, OA_f, puis $O'B_0$, O'_1B,

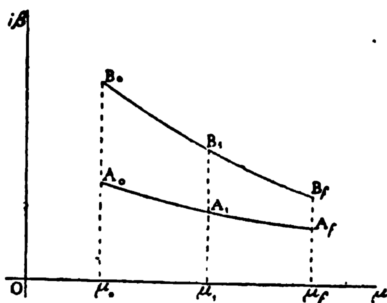


Fig. 26.

$O'B_f$ par un autre diagramme. Ces deux diagrammes, que l'on peut tracer à main levée, donnent les deux hauteurs auxquelles la droite diagramme des $i\beta$, correspondant à chaque charge μ, coupe les droites OY et O'Z. Il n'est pas nécessaire de faire de retouches.

CHAPITRE VII

SOLUTION DES PROBLÈMES PAR L'EMPLOI DES TABLES DE TIR. — ZONE DANGEREUSE ET ERREUR BATTUE

§ 1.

Charges fixes.

Les quantités indiquées dans les tables de tir sont rapportées à l'horizon de la pièce. Pour obtenir, avec une table de tir à charge fixe, l'ordonnée, l'inclinaison, la vitesse restante, le temps, les bandes verticale et longitudinale correspondant à une distance x pour une trajectoire quelconque obtenue par un angle de projection φ et la vitesse initiale indiquée dans la table, on peut se servir des formules suivantes :

Notations :

φ_x angle de projection.	Correspondant à la distance x de la table de tir.
ω_x angle de chute.	
U_x vitesse de chute.	
T_x durée du trajet.	
H_x hausse.	
F_x bande verticale.	
F_x' bande longitudinale.	

Formules

(*Plus exactes*).	(*Moins exactes*).
$y = \frac{x}{2\cos^2\varphi}(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_x)$	$y = \frac{x}{L}(H - H_x)$
$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} - \operatorname{tg}\omega_x \frac{\cos^2\varphi_x}{\cos^2\varphi}$	$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} - \operatorname{tg}\omega_x$
$= \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_x - 2\operatorname{tg}\omega_x \cos^2\varphi_x}{2\cos^2\varphi}$	$\theta = \varphi - \varphi_x - \omega_x$
$v = U_x \frac{\cos\omega_x}{\cos\theta}\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_x}$	$v = U_x$

$t = T_x \dfrac{\cos\varphi_x}{\cos\varphi}$	$t = T_x$
$F = F_x \dfrac{\cos\omega}{\cos\theta}$	$F = F_x$
$F' = F_x' \dfrac{\sin\omega}{\sin\theta}$	$F' = F_x' \left(1 + \dfrac{y}{x \operatorname{tg}\omega_x}\right)$

Les équations (plus exactes) qui précèdent relatives à y, θ, v, t, proviennent des équations (3) de la page (80) en supposant C′ indépendant de l'angle de projection. Celles qui sont relatives aux bandes F, F′ sont déduites de celles que nous avons données à la fin de la page (156) ; les équations moins exactes dérivent des équations plus exactes, en négligeant l'angle de relèvement et le carré ou les puissances supérieures de tous les angles. De la valeur de θ (formule moins exacte) on déduit que l'abscisse du sommet x_0 correspond au point pour lequel dans la table la somme des angles de projection et de chute est égale à l'angle de projection donné. Mais l'abscisse du sommet et l'ordonnée se calculent plus exactement au moyen des formules :

$$x_0 = \frac{X}{2}(1+\eta), \quad y = \frac{X}{8}(\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\varphi)(1+\eta^2), \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\varphi}.$$

Quand une table de tir donne pour chaque distance X seulement l'angle de projection φ et l'angle de chute ω, les autres quantités s'en déduisent assez exactement au moyen des formules suivantes (¹) :

$$2\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi = a \qquad 2\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\omega = b$$

$$\frac{g}{V^2\cos^2\varphi} = \frac{2b}{X} \qquad \frac{g}{V^2\cos^2\omega} = \frac{2a}{X}$$

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2X}{g}}\,\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2X}{g}}\,\frac{a^2+ab+b^2}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{bx^2}{X} - \frac{(a-b)x^3}{3X^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{2bx}{X} - \frac{(a-b)x^2}{X^2}$$

$$\frac{g}{v^2\cos^2\theta} = \frac{2b}{X} + \frac{2(a-b)x}{X^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{X}{3a-3b}\left[\left(\frac{2b}{X} + \frac{2(a-b)x}{X^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2b}{X}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

(¹) Voir *Giornale d'Artiglieria e Genio*, 1881, p. II, Balistica elementare.

§ 2.

Angles fixes.

Pour calculer avec une table de tir à angle fixe les éléments d'une trajectoire, correspondant à une vitesse initiale V, on peut employer les formules suivantes :

$$y = x \operatorname{tg}\varphi \left(1 - \frac{V_x^2}{V^2}\right) \qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi \left[1 - \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\omega_x}{\operatorname{tg}\varphi}\right) \frac{V_x^2}{V^2}\right]$$

$$v = U_x \frac{V}{V_x} \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \qquad t = T_x \frac{V_x}{V}$$

dans lesquelles V_x est la vitesse initiale correspondant à la distance x de la table. Ces formules sont déduites des formules (3) de la page 80, en supposant la résistance quadratique, c'est-à-dire G, G_1, G_2, G_3 indépendants de la vitesse initiale ([1]). Si, dans la table de tir, les vitesses initiales ne sont pas données, mais seulement les charges μ_x, on peut employer les mêmes formules en posant $\frac{V}{V_x} = \left(\frac{\mu}{\mu_x}\right)^{0,6}$, μ étant la charge donnée.

En éliminant la vitesse entre les deux premières équations, ont obtient :

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\omega_x \left[\frac{y}{x}(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\omega_x) - 1\right]$$

On en déduit que la hauteur du tir est :

$$Y = \frac{x_0}{\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\omega_{x_0}}$$

x_0 étant l'abscisse du sommet, peu supérieure, en général, à la moitié de la portée correspondant dans la table à la vitesse initiale V ou à la charge μ. Toutefois, l'abscisse et l'ordonnée du sommet sont données plus exactement par les formules précédentes.

([1]) La première de ces formules, et, si nos souvenirs ne nous trompent pas, même les trois autres nous ont été communiquées, il y a longtemps, par le major d'artillerie austro-hongrois Nikolaus Ritter von Wuich, professeur à l'École supérieure d'artillerie de Vienne et auteur d'ouvrages estimés sur la balistique, parmi lesquels un ouvrage en trois volumes : *Lehrbuch der äusseren Ballistic*, Vienne, 1882-1886.

Relations entre les charges et les abaissements. — L'équation en y peut s'écrire

$$\frac{x \operatorname{tg} \varphi}{x \operatorname{tg} \varphi - y} = \frac{V^2}{V_x^2} = \left(\frac{\mu}{\mu_x}\right)^{\frac{6}{5}},$$

par suite, les abaissements sont inversement proportionnels aux carrés des vitesses ou à la puissance $\frac{6}{5}$ des charges.

On déduit de cette formule, en posant $\mu = \mu_x + \Delta\mu$:

$$\frac{\mu_x + \Delta\mu}{\mu_x} = \left(1 - \frac{y}{x \operatorname{tg} \varphi}\right)^{-\frac{5}{6}} = 1 + \frac{5y}{6x \operatorname{tg} \varphi} + \dots$$

Donc, quand on donne la charge μ_x nécessaire pour toucher un point à la distance x et sur l'horizon de la pièce, l'augmentation de charge nécessaire pour toucher un point placé à la même distance et à une hauteur y assez petite est donnée par l'équation

$$\Delta\mu = \frac{5y}{6x \operatorname{tg} \varphi} \mu_x = \frac{5 \operatorname{tg} \varepsilon}{6 \operatorname{tg} \varphi} \mu_x$$

ε étant l'angle de site.

Inversement, si l'on connaît, comme cela a lieu dans les tirs d'expérience, la charge μ correspondant à une distance x et à une hauteur y, et que l'on cherche la charge μ_x correspondant à la même distance et sur l'horizon de la pièce, la diminution de charge sera donnée par la formule précédente, en remplaçant μ_x par μ.

En opérant sur de faibles diminutions, on peut mettre l'unité à la place de $\frac{5}{6}$; ce qui revient au principe pratique suivant : *les abaissements sont inversement proportionnels aux charges.*

§ 3.

Zone dangereuse. — La zone dangereuse est l'étendue de terrain dans lequel un but vertical se trouve toujours battu par une trajectoire donnée.

Cette définition donnée, la zone dangereuse dépend évidemment de la nature du terrain. Elle se détermine facilement lorsque ce dernier est horizontal.

Soit (fig. 27) OMCN la trajectoire donnée, et TT′ le terrain supposé horizontal, soit h la distance de celui-ci à l'horizon de la pièce, A = MP = NQ la hauteur du but. La zone dangereuse est

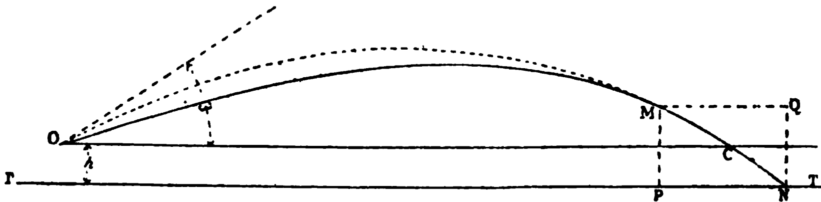


Fig. 27.

PN, égale à la différence des abscisses des points M et N. Le premier a pour ordonnée $A - h$, et le second $-h$. Pour déterminer les abscisses de M et N, on assimile l'arc MN à un arc de parabole ayant son origine en O, l'axe vertical, et tangent à la vraie trajectoire en C.

Si ω est l'angle de chute, l'équation de cette parabole est :

$$(1) \qquad y = \frac{x \operatorname{tg}\omega (X - x)}{X};$$

mettant $A - h$ à la place de y, l'abscisse du point M est donnée par l'équation

$$(2) \qquad x'' = \frac{X}{2} + \sqrt{\frac{X^2}{4} - \frac{(A-h)X}{\operatorname{tg}\omega}}$$

mettant $-h$ à la place de y, l'abscisse de N est :

$$(3) \qquad x' = \frac{X}{2} + \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{hX}{\operatorname{tg}\omega}}.$$

Par conséquent :

$$(4) \quad S = PQ = x' - x'' = \frac{X}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{4h}{X \operatorname{tg}\omega}} - \sqrt{1 - \frac{4(A-h)}{X \operatorname{tg}\omega}}\right]$$
$$= \frac{A}{\operatorname{tg}\omega}\left[1 + \frac{A - 2h}{X \operatorname{tg}\omega} + \cdots\cdots\right]$$

Si $\frac{1}{4} X \operatorname{tg}\omega$ était inférieur à $A - h$, la zone dangereuse serait x', car dans ce cas le sommet du but serait plus haut que le sommet de la trajectoire.

La zone dangereuse croît quand h diminue, c'est-à-dire avec l'élévation du terrain. En effet, dérivons S par rapport à h, il vient :

$$(5) \qquad \frac{dS}{dh} = \frac{1}{\operatorname{tg}\omega}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4h}{X\operatorname{tg}\omega}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4(A-h)}{X\operatorname{tg}\omega}}}\right]$$

quantité négative.

Quelle doit être la hauteur h *pour que la portion de zone dangereuse au delà de* C *soit égale à la portion de zone dangereuse en deçà?*

On doit avoir

$$x' - X = X - x''$$

En effectuant les calculs, on trouve :

$$(6) \qquad h = \frac{A}{2}\left(1 + \frac{A}{2X\operatorname{tg}\omega}\right) \quad , \quad S = \frac{A}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Quand le sommet et le pied du but sont l'un au-dessus et l'autre au-dessous de l'horizon de la pièce, l'expression (4) se prête bien au calcul de l'espace battu. Mais, si les extrémités du but sont toutes les deux au-dessous ou au-dessus de l'horizon de la pièce, il faut transformer l'expression (4) en une autre, dans laquelle au lieu de X figure x', distance à laquelle le but est frappé au pied, et au lieu de ω figure l'inclinaison θ' de la trajectoire à cette même distance x'. En effectuant les calculs, on trouve :

$$(7) \qquad S' = \frac{x'}{2\operatorname{tg}\theta' - 2\operatorname{tg}\varepsilon}\left[\operatorname{tg}\theta' - \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta' - \frac{4A}{x'}(\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\varepsilon)}\right]$$
$$= \frac{A}{\operatorname{tg}\theta'}\left[1 - \frac{A}{x'}\frac{\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}^2\theta'} - \dots\dots\right]$$

$\operatorname{tg}\varepsilon$ étant égal à $\frac{h}{x'}$. Cette expression s'applique quand le terrain est au-dessous de l'horizon de la pièce. Quand il est au-dessus, il faut remplacer ε par $-\varepsilon$, et comme, à égalité de distance, l'inclinaison θ' pour un point au-dessus de l'horizon de la pièce est plus petite que pour un point au-dessous, on voit facilement que S' est plus grand quand le terrain est au-dessus de la pièce que quand il

est au-dessous. Se basant sur ce fait, quelques artilleurs ont cru pouvoir conclure qu'il était plus convenable de tirer de bas en haut que de haut en bas ; mais il y a équivoque dérivant de l'impropriété du nom *zone dangereuse,* qu'on donne à une quantité qui est bien différente de l'erreur tolérable dans l'évaluation de la distance.

§ 4.

Erreur battue. — Nous appellerons erreur battue la tolérance dans l'appréciation de la distance d'un but, c'est-à-dire la somme des erreurs maximum, en plus ou en moins, que l'on peut commettre dans l'appréciation de la distance d'un but, sans que le but cesse d'être battu.

Soit OX (fig. 28) l'horizon de la pièce et MN un but de hauteur A placé à la distance OC = X de la bouche à feu. Si la distance

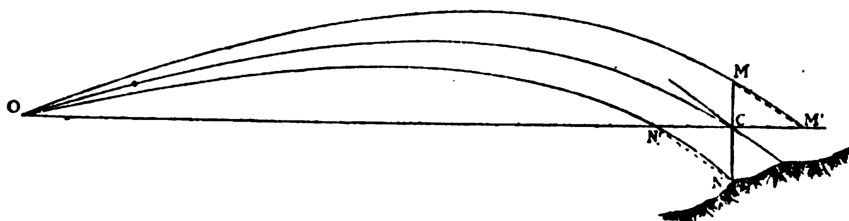


Fig. 28.

OC est appréciée exactement, la trajectoire passe par le point visé C, si au contraire la distance appréciée est plus grande ou plus petite que la véritable distance, la trajectoire passe au-dessus ou au-dessous de ce point. Toutes les trajectoires comprises entre celles qui passent par le sommet et le pied du but battent le but, et comme elles rencontrent l'horizon de la pièce aux points M' et N', l'erreur maximum qu'on peut tolérer dans l'appréciation de la distance, dans le cas de la figure, est CM' en plus et CN' en moins. L'erreur battue est donc CM' + CN' = M'N'.

Nous avons d'autre part

$$CM' = \frac{CM}{\operatorname{tg} CM'M} \quad , \quad CN' = \frac{CN}{\operatorname{tg} CN'N}.$$

Menons la tangente en C, elle est approximativement parallèle aux deux cordes MM′ et NN′, et l'on peut écrire

$$CM'M = CN'N = \omega$$

en appelant ω l'angle de chute à la distance X. L'erreur battue est donc

$$M'N' = \frac{CM + CN}{tg\omega} = \frac{A}{tg\omega}.$$

Si le point visé n'est pas sur l'horizon de la pièce (fig. 29), l'er-

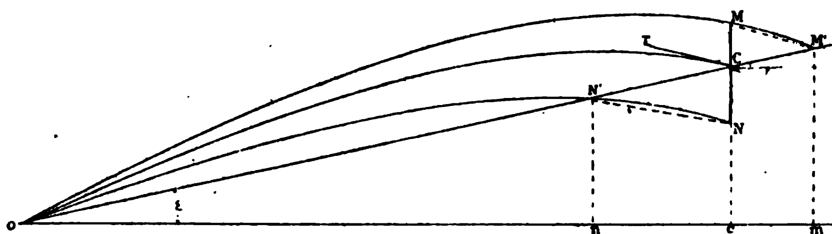


Fig. 29.

reur battue est *mn*; en effet, la distance étant toujours comptée sur l'horizon de la pièce, les erreurs de distance sont également comptées horizontalement. Si ε est l'angle de site, on a

$$mn = M'N' \cos\varepsilon.$$

En remarquant que les cordes MM′, NN′ sont à peu près parallèles à la tangente en C, les triangles CMM′, CNN′ sont semblables, on a donc :

$$\frac{CN'}{CN} = \frac{CM'}{CM} = \frac{\sin CMM'}{\sin CM'M}$$

Mais CMM′ est le complément de l'angle que MM′, ou sa parallèle TC, fait avec l'horizon. En appelant θ cet angle, on a :

$$\frac{CN'}{CN} = \frac{CM'}{CM} = \frac{\cos\theta}{\sin(\theta + \varepsilon)},$$

Par suite

$$CN' + CM' = (CM + CN)\frac{\cos\theta}{\sin(\theta + \varepsilon)} = \frac{A}{[tg\theta + tg\varepsilon]\cos\varepsilon}$$

et, d'après le théorème III de la page 74, nous avons également

$$mn = \frac{A}{\operatorname{tg}\omega}.$$

L'erreur battue a donc toujours pour expression $\frac{A}{\operatorname{tg}\omega}$; elle est indépendante de l'angle de site, du point visé, ainsi que de la forme du terrain sur lequel repose le but. Elle dépend uniquement de la distance horizontale. On peut remarquer que l'erreur battue est entièrement en plus si on vise le pied du but, et en moins si on vise le sommet.



Fig. 30.

Si, au lieu d'un but de faible épaisseur, on considère (fig. 30) un but profond tel que MNPQ, de hauteur A et de profondeur p, placé sur un terrain horizontal à une hauteur h au-dessus de l'horizon de la pièce, il est évident qu'on peut le remplacer par un but sans profondeur de hauteur $MN + NN' = A + p \operatorname{tg} NPN'$; or, comme l'inclinaison de la corde PN' peut être regardée comme étant égale à l'inclinaison θ' de la trajectoire au point visé C, on a $\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varepsilon$, et la hauteur du but de faible épaisseur, équivalant au but profond, est $A + p(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varepsilon)$; par suite, l'erreur battue est :

$$p + \frac{A - p \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Si le but, au lieu d'être sur un terrain situé au-dessus de l'horizon de la pièce, était sur un terrain placé au-dessous, le signe de ε changerait seul. D'où il résulte qu'il est plus avantageux de tirer de haut en bas que de bas en haut, puisque, dans le premier cas, l'erreur battue, c'est-à-dire la tolérance sur l'évaluation de la distance, est plus grande que dans le second.

L'*erreur battue* a donc une importance pratique considérable, tandis que celle que l'on attribue à la *zone dangereuse* n'est pas justifiée, et peut, comme on l'a vu, donner lieu à des équivoques que le bon sens condamne. La zone dangereuse n'est en réalité qu'une curiosité géométrique.

SECTION III

EFFETS DU TIR

Les effets du tir dépendent de trois facteurs : *frapper, frapper profondément, frapper rapidement.* Le premier facteur dépend à son tour de la grandeur du but et de la précision de l'arme dont on dispose. Aucun engin et, par suite, aucune arme ne possède une exactitude absolue, mais les erreurs qui résultent de son emploi sont comprises entre certaines limites et sont soumises à certaines lois de probabilités. Ces limites et ces lois donnent lieu à des règles très sûres, non seulement pour comparer la précision des diverses armes, mais pour régler et corriger le tir, pour déterminer la limite maximum des coups qui peuvent atteindre un but, pour établir la distance au delà de laquelle il est inutile de tirer, enfin pour le meilleur emploi de l'arme. L'ensemble des recherches relatives à ces questions constitue la théorie qu'on appelle *probabilité du tir.*

Le second facteur dépend de la force vive au choc et de la nature du but. Relativement à celui-ci, nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit à la section I. Quant au troisième facteur, c'est-à-dire à la *rapidité du tir,* il n'exige aucune théorie.

La section III est consacrée exclusivement à la *probabilité du tir.*

CHAPITRE I

PRINCIPES DU CALCUL DES PROBABILITÉS

§ 1.

Définitions et théorèmes.

Entre la certitude et l'impossibilité qu'un fait se produise se place la probabilité. La probabilité mathématique est le quotient du nombre des combinaisons qui renferment un événement par le nombre de toutes les combinaisons possibles. Ainsi, la probabilité que d'une urne contenant m boules blanches et n noires, on tire une boule blanche, est $\frac{m}{m+n}$, m étant le nombre des combi-qui renferment l'événement et $m+n$ le nombre des combinaisons possibles.

La probabilité est donc un nombre compris entre 0 et 1. Zéro représente l'impossibilité et 1 la certitude.

Nous résumons ci-après les principaux théorèmes sur le calcul des probabilités, en renvoyant pour les démonstrations aux traités spéciaux.

Probabilité composée. — Quand un événement (ss') se compose de la coexistence de deux autres s, s' complètement indépendants l'un de l'autre, *la probabilité de l'événement composé est le produit des probabilités des deux événements simples.* Ainsi la probabilité qu'en jetant deux dés ils présentent deux faces déterminées est :

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Ce théorème peut se représenter symboliquement par la formule

$$p(ss') = p(s) \times p(s'). \tag{1}$$

Quand l'existence d'un événement composant modifie la probabilité de l'autre événement composant, la probabilité de l'événement composé est égale à la *probabilité absolue de l'un des événements multipliée par la probabilité modifiée de l'autre.* Ainsi la probabilité que de l'urne précédente il sorte deux boules blanches est :

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{m-1}{m+n-1} = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Probabilité totale. — La probabilité d'un événement s qui ne peut être attribué qu'à une cause ou à une hypothèse de la série $C_1\, C_2 \ldots$ est égale à la somme des probabilités correspondant aux combinaisons de l'événement avec chacune de ces causes. Ce théorème s'énonce aussi de la façon suivante : *La probabilité totale est la somme des probabilités partielles.*

Cette proposition se représente symboliquement par l'équation

$$(2) \qquad p(s) = p(sC_1) + p(sC_2) + \cdots\cdots$$

Exemple. — Cinq canons en batterie sont prêts à tirer : deux ont la probabilité $\frac{1}{3}$ de tirer court, et les trois autres ont la probabilité $\frac{1}{3}$ de tirer long. Ne sachant quel canon doit tirer le premier, quelle probabilité y a-t-il que le premier coup soit court ?

La probabilité de tirer un canon de la première espèce est $\frac{2}{5}$, et que le tir soit court $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$. La probabilité de tirer un canon de la seconde espèce est $\frac{3}{5}$ et que le tir soit court $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$. La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{2}{15} + \frac{6}{15} = \frac{8}{15}.$$

Théorème de Bayes. — *Quand un événement* s *a eu lieu, événement qui ne peut être attribué qu'à une cause ou à une hypothèse parmi celles de la série C_1, C_2, $C_3 \ldots$, la probabilité qu'il soit produit par C_r est égale à la probabilité partielle de la combinaison de l'événement* s *avec C_r divisée par la probabilité totale de l'événement.*

Ce théorème peut se représenter par la formule

$$(3) \qquad p(C_r) = \frac{p(sC_r)}{p(sC_1) + p(sC_2) + \cdots\cdots}$$

Exemple. — Supposons les mêmes données que dans le problème précédent. Si on a un coup court et qu'on ignore le canon qui a tiré, quelle est la probabilité que ce soit un canon quelconque de la première espèce ?

La probabilité partielle (c'est-à-dire que tire un canon de la première espèce et tire court) est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$, la probabilité totale d'un coup court est, comme nous avons vu : $\frac{8}{15}$, la probabilité cherchée est donc :

$$\frac{2}{15} : \frac{8}{15} = \frac{1}{4}.$$

Événements répétés. — Soit p *la probabilité d'un événement pour une épreuve, la probabilité* P *d'obtenir* n *fois ce même événement en* s *épreuves est*

$$(4) \qquad P = \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{1.2\ldots n} p^n (1-p)^{s-n} = \frac{s!}{n!(s-n)!} p^n (1-p)^{s-n}$$

Exemples. — 1° Soit $\frac{6}{10}$ la probabilité d'avoir un coup court en une épreuve, et l'on tire 10 coups. La probabilité d'avoir 6 coups courts est :

$$\frac{10.9\ldots5}{1.2\ldots6} \left(\frac{6}{10}\right)^6 \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 0,2508.$$

La probabilité d'en avoir 5 ou 7 est respectivement :

0,2007 ou 0,2150

Donc la probabilité d'avoir des coups courts au moins 5, et pas plus de 7, est :

$$0,2007 + 0,2508 + 0,2150 = 0,6665.$$

2° Soit encore $\frac{6}{10}$ la probabilité d'avoir un coup court en une épreuve, et l'on tire 20 coups. La probabilité d'en avoir 10, 11, 12, 13, 14 courts est

0,1171 0,1597 0,1797 0,1659 0,1244.

La somme étant 0,7468, la probabilité d'avoir au moins 10 coups courts, et pas plus de 14, est donc :

0,7468.

Observations. — Quel que soit le nombre des coups, le nombre des coups courts qui a la probabilité maximum de se produire est $\frac{6}{10}$ du nombre

total, c'est-à-dire est proportionnel à la probabilité d'avoir un tir court dans un seul coup.

En augmentant le nombre des coups, la probabilité d'en avoir des courts un nombre précisément égal aux $\frac{6}{10}$ du total diminue (de 0,2508 à 0,1797); mais la probabilité d'avoir un nombre de coups courts compris entre $\frac{5}{10}$ et $\frac{7}{10}$ du total croît (de 0,6665 à 0,7168). Si le nombre total des coups montait jusqu'à 100, la probabilité d'en avoir des courts au moins $\frac{5}{10}$ et pas plus de $\frac{7}{10}$ arriverait à être égale à 0,95, ce qui serait presque la certitude.

D'après ces observations, il est facile de comprendre les théorèmes suivants dus à Bernouilli.

1° Dans une série de* s *épreuves, qui peuvent donner lieu à un événement S dont la probabilité simple est* p *(connue), la probabilité que l'événement S se produise un nombre de fois compris entre* $(p+\alpha)s$ *et* $(p-\alpha)s$*, s'approche de plus en plus de la certitude à mesure que croît* s*, quelque petit que soit* α*. Cette probabilité a pour expression, quand* s *est très grand :

$$(5) \qquad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda} e^{-t^2}\,dt \quad , \quad \left(\lambda = \frac{\alpha\sqrt{s}}{\sqrt{2p(1-p)}}\right)$$

2° Dans une série de* s *épreuves qui peuvent donner lieu à un événement S, dont la probabilité simple est* p *(inconnue), si on suppose que l'événement S ait eu lieu* n *fois, la probabilité que* p *soit comprise entre* $\left(\frac{n}{s}+\alpha\right)$ *et* $\left(\frac{n}{s}-\alpha\right)$ *augmente indéfiniment avec le nombre* s *des épreuves, quel que soit* α*.

Probabilités expérimentales. — Le dernier théorème donne la manière de déterminer expérimentalement la probabilité simple d'un événement quand celle-ci ne peut être déterminée *à priori* en considérant les combinaisons qui renferment l'événement, comme dans le cas de l'urne contenant un nombre connu de boules blanches et de boules noires. Il suffit en effet de faire un grand nombre d'épreuves et de compter le nombre de fois que le fait cherché se produit : le rapport de ce nombre au nombre total d'épreuves est d'autant plus près de la probabilité cherchée que ce dernier nombre est plus grand.

Imaginons une urne contenant un très grand nombre de boules dont un grand nombre (nous ignorons ce nombre) porte le chiffre 1,

beaucoup le chiffre 2, beaucoup le chiffre 3 et ainsi de suite; on veut connaître dans quelle proportion les boules 1, 2, 3... entrent dans le nombre total des boules.

Nous ferons un grand nombre de tirages; en remettant après chaque tirage la boule extraite, nous obtiendrons n_1 boules avec le n° 1, n_2 avec le n° 2, n_3 avec le n° 3; on en déduit que les rapports

$$\frac{n_1}{n_1+n_2+n_3+\cdots} \quad \frac{n_2}{n_1+n_2+n_3+\cdots} \quad \frac{n_3}{n_1+n_2+n_3+\cdots}$$

représentent à peu près la probabilité d'extraire dans une épreuve une boule n° 1, n° 2 ou n° 3, et par conséquent les rapports des nombres des boules ainsi numérotées au nombre total des boules.

Ces rapports connus, on peut résoudre relativement à l'extraction des boules n'importe quel problème de probabilité.

§ 2.

Probabilités des erreurs.

Quand on a procédé, au moyen d'un très grand nombre d'épreuves, à la mesure d'une quantité dont la valeur est inconnue, on adopte comme *valeur* de cette quantité la moyenne arithmétique des valeurs obtenues dans les diverses épreuves, et l'on appelle *erreur* d'une épreuve la différence absolue entre la valeur de cette quantité et celle obtenue par l'épreuve dont il s'agit.

L'*erreur moyenne* est la moyenne arithmétique des erreurs.

L'*erreur quadratique moyenne* est la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des erreurs.

L'*erreur probable* est celle qui est supérieure à la moitié des erreurs et inférieure à l'autre moitié.

Quand un nombre d'épreuves croît indéfiniment, le rapport de l'erreur quadratique moyenne h à l'erreur moyenne H converge (§ 3) vers

$$\frac{h}{\mathrm{H}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,25\ldots \tag{6}$$

et le rapport entre l'erreur probable ε_m et l'erreur moyenne converge vers

$$(7) \qquad \frac{\varepsilon_m}{H} = 0,477\sqrt{\pi} = 0,845$$

La probabilité qu'il se produise une erreur donnée en une épreuve à faire est considérée égale au nombre de fois que s'est vérifiée cette erreur, divisé par le nombre des épreuves (§ 1, *Probabilités expérimentales*). Mais d'après la théorie des erreurs, une telle probabilité peut se déduire de la connaissance de la seule erreur moyenne H (§ 3). Ainsi, la probabilité d'avoir une erreur absolue comprise entre 0 et ε se représente par l'équation

$$(8) \qquad p_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{H\sqrt{\pi}}} e^{-t^2}\, dt.$$

En posant $p_\varepsilon = 0,5$, on a pour ε l'erreur probable donnée par l'équation (7).

L'équation (8) peut s'écrire encore :

$$(9) \qquad p_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{0,477\,\varepsilon}{\varepsilon_m}} e^{-t^2}\, dt.$$

En donnant à $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}$ différentes valeurs, on a pour p_ε autant de valeurs correspondantes. On obtient ainsi la table XIII, où $P = 100p_\varepsilon$ s'appelle *pour-cent* et $f = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}$ ou $\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon_m}$ s'appelle *facteur de probabilité.*

La probabilité qu'en faisant m épreuves, la moyenne arithmétique des mesures faites renferme une erreur comprise entre $-\varepsilon$ et ε, s'obtient au moyen de la formule (9) en posant $\varepsilon\sqrt{m}$ à la place de ε et au moyen de la table en remplaçant f par $f\sqrt{m}$.

Quand plusieurs causes, indépendantes l'une de l'autre, produisent des erreurs et que les erreurs partielles probables, résultant de l'action isolée de chacune des causes sont $e_1\ e_2\ e_3$... l'erreur probable ε_m due à leur action simultanée est :

$$(10) \qquad e_m = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \cdots}$$

Quand on fait m épreuves, la probabilité que la somme algébri-

que des erreurs soit inférieure à ε s'obtient par la formule (9) en posant $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ au lieu de ε.

Quand on fait deux épreuves, la probabilité que la différence des erreurs soit inférieure à ε s'obtient au moyen de la formule (9) en y remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Règle des moindres carrés. — Quand une quantité variable y dépend d'une variable par l'intermédiaire d'une équation de la forme

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots\cdots + hx^m$$

dans laquelle les coefficients $a, b, c\ldots h$ sont inconnus, mais que, d'autre part, l'expérience ait fait connaître les valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots.$ y_n, correspondant aux valeurs $x_1\ x_2\ x_3\ldots\ x_n$, où $n > m + 1$, les valeurs les plus probables des coefficients sont données par la condition :

$$\Sigma(a + bx_1 + cx_1^2 + \cdots\cdots + hx_1^m - y_1)^2 = \text{minimum.}$$

Le signe Σ indique la somme de tous les carrés (au nombre de n) analogues au carré qui est indiqué. On déduit de l'équation précédente

$$an + b\Sigma x_1 + c\Sigma x_1^2 + \cdots\cdots + h\Sigma x_1^m - \Sigma y_1 = 0$$

$$a\Sigma x_1 + b\Sigma x_1^2 + c\Sigma x_1^3 + \cdots\cdots + h\Sigma x_1^{m+1} - \Sigma x_1 y_1 = 0$$

. . . .

$$a\Sigma x_1^m + b\Sigma x_1^{m+1} + c\Sigma x_1^{m+2} + \cdots\cdots + h\Sigma x_1^{2m} - \Sigma x_1^m y_1 = 0.$$

Équations d'où l'on tire $a, b, c\ldots$

§ 3.

Bien que tous les traités de calcul des probabilités donnent les démonstrations de tous les théorèmes qui précèdent, il nous paraît utile de faire voir comment on peut arriver à la formule (8) qui est fondamentale. La nature géométrique des déviations vient donner à leur théorie une clarté qu'il serait difficile de trouver dans la théorie des erreurs en général.

Imaginons une cible sans limite, sur laquelle ait été relevé un très grand nombre de coups tirés par une même bouche à feu pointée et chargée dans les mêmes conditions. Les points marqués sur la rose sont toujours irrégulièrement placés, mais tendent à se disposer dans un certain ordre à mesure que le nombre des coups augmente. En multipliant ceux-ci au delà de toute limite, la rose deviendrait régulière et complète, symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires l'un à l'autre.

L'intersection de ces deux axes est le centre de tir.

Supposons que nous ayons obtenu cette rose, et considérons seulement les déviations latérales, c'est-à-dire les distances de chaque point à l'un des axes de symétrie que nous supposerons vertical, et menons une série d'autres verticales voisines les unes des autres (fig. 31). La bande limitée par deux verticales successives que nous supposons illimitées contiendra un certain nombre de coups, nombre qui, naturellement, sera d'autant plus petit que la distance au centre sera plus grande, distance qui représente la déviation latérale. Si on coupe chaque bande de manière à former un petit rectangle dont la base, de grandeur constante, soit sur l'axe horizontal et la hauteur soit proportionnelle au nombre des points contenus dans la bande entière, on obtient une série de rectangles dont les extrémités supérieures se trouvent à diverses hauteurs, mais se rapprochent de plus en plus d'une courbe continue à mesure que la largeur des rectangles diminue. Cette courbe, appelée *courbe des erreurs*, a son sommet au-dessus du centre, et s'abaisse graduellement, symétriquement de part et d'autre. Elle coupe l'axe horizontal en deux points, dont la distance au centre représente la déviation maximum.

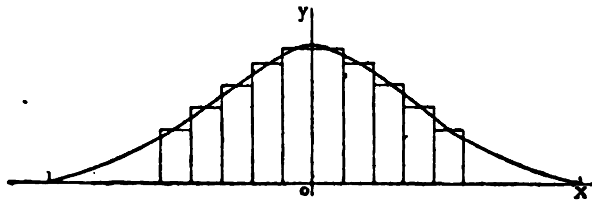


Fig. 31.

L'aire de chaque rectangle peut être regardée comme représentant le nombre des coups qui ont dévié d'une quantité égale à la distance du petit rectangle à l'axe vertical, il en résulte que la somme totale de ces rectangles, c'est-à-dire la surface comprise entre la courbe et l'horizontale, représente le nombre total des coups, ou de toutes les déviations latérales possibles.

Supposons que l'on connaisse la courbe des erreurs, soit y l'ordonnée de la courbe ou la hauteur d'un rectangle correspondant à une erreur x, le nombre des erreurs égal à x sera $y\,dx$, et le nombre total des erreurs

$$(11) \qquad 2\int_0^{E} y\,dx = A,$$

E représentant la déviation maximum latérale. Par conséquent, la probabilité de commettre une erreur $=x$, ou mieux comprise entre x et $x+dx$, est :

$$(12) \qquad \frac{y\,dx}{A},$$

et la probabilité de commettre une erreur numérique inférieure à ε, c'est-à-dire comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, est par définition :

$$(13) \qquad p_\varepsilon = \frac{2\int_0^{\varepsilon} y\,dx}{A}.$$

L'*erreur moyenne* est la somme de toutes les erreurs considérées comme positives divisée par le nombre des erreurs. Donc, si on a n_1 erreurs égales à x_1, n_2 égales à x_2, etc., l'erreur moyenne est :

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots\ldots}{n_1 + n_2 + \ldots\ldots}.$$

D'autre part, le nombre des erreurs numériques égales à x est $2y\,dx$; on a donc, en appelant H la déviation moyenne,

$$H = \frac{2\int_0^{E} xy\,dx}{A}.$$

L'*erreur quadratique moyenne* est la racine carrée de la moyenne des carrés des erreurs. En la désignant par h, nous avons

$$h^2 = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots\dots}{n_1 + n_2 + \dots\dots}$$

ou

$$h^2 = \frac{2 \int_0^E x^2 y\, dx}{A}.$$

On peut remarquer que $\int_0^E xy dx$ représente la somme des moments des rectangles relatifs à l'axe de symétrie, par suite H est la distance du centre de gravité de la moitié de l'aire A à ce même axe.

On voit également que $2 \int_0^E x^2 y dx$ représente le moment d'inertie de la surface A, relatif à l'axe de symétrie, par conséquent h représente le rayon de gyration relatif au même axe.

Dans les applications, on adopte l'expression de Laplace

$$(14) \qquad y = e^{-a^2 x^2},$$

qui repose sur l'hypothèse que le nombre des causes de déviations est très grand, ou sur l'hypothèse que la valeur la plus probable d'une quantité mesurée est la moyenne arithmétique des nombres donnant la mesure de cette quantité [1].

Cette équation satisfait aux caractères déjà connus de la courbe d'erreurs ; en effet, l'ordonnée est maximum quand l'erreur est nulle, elle diminue indéfiniment et symétriquement quand x ou $-x$ augmente.

Il est vrai que la valeur de y ne s'annule que pour $x = \infty$, et que par suite l'erreur maximum E devient infinie ; mais en pratique ce fait n'a aucune importance, puisque l'on peut toujours imaginer que a a une valeur suffisamment grande pour que l'ordonnée y correspondant à $x = E$ diffère de 0 d'une quantité inappréciable.

---

[1] Pour déduire de la dernière de ces hypothèses la formule de Laplace, il suffit de raisonner comme on l'a fait dans le chapitre III.

En admettant l'équation (14), on obtient par de simples opérations de calcul les formules suivantes :

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
A = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad H = \dfrac{1}{a\sqrt{\pi}}, \quad h = \dfrac{1}{a\sqrt{2}}. \\[2ex]
a = \dfrac{1}{H\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{h\sqrt{2}}, \quad \dfrac{h}{H} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}. \\[2ex]
p_\iota = \dfrac{2}{h\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^\iota e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx = \dfrac{2}{H\pi} \displaystyle\int_0^\iota e^{-\frac{x^2}{H^2\pi}} dx
\end{array}
\right.
$$

et en posant $\dfrac{x}{H\sqrt{\pi}} = t$:

$$
(16)\qquad p_\iota = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{H\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt.
$$

NOTE
SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Par M. LAURENT

Il nous a semblé utile de donner, au sujet de l'application de la méthode des moindres carrés, quelques indications relatives à son application. Nous pensons donc rendre service au lecteur en indiquant ici une formule générale due à M. P. Tchebycheff, membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg, formule relatée dans le *Traité de Balistique* du général Mayevski. Paris, 1872.

Supposons qu'il s'agisse de déterminer les coefficients les plus probables $a, b, c.....$ d'une expression de la forme

$$
(1)\qquad U = a + bx + cx^2 + ...
$$

connaissant avec une égale précision les valeurs de $u = u_1$ $u = u_2.....$ correspondant aux valeurs équidistantes de x, c'est-à-dire $x = h = 2h = ... nh$. La formule qui représente la fonction U est donnée par la série suivante :

$$
\begin{aligned}
U = \frac{\Sigma u_i}{n} &+ \frac{3\Sigma\frac{i(n-i)}{1.1}\Delta u_i}{n(n^2-1^2)h^2}\cdot h(2x-nh-h) \\
&+ \frac{5\Sigma\frac{i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1.2.1.2}\Delta^2 u_i}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)h^4}[3h^2(2x-nh-h)^2-(n^2-1)h^4] \\
&+ \frac{7\Sigma\frac{i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3.1.2.3}\Delta^3 u_i}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)h^6}[15h^3(2x-nh-h)^3-3(3n^2-7)(2x-nh-h)h^5] \\
&+ \frac{9\Sigma\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)}{1.2.3.4.1.2.3.4}\Delta^4 u_i}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)h^8}[105h^4(2x-nh-h)^4-30(3n^2-13)(2x-nh-h)^2h^6 \\
&\qquad +9(n^2-1)(n^2-9)h^8] \\
&+ \frac{11\Sigma\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)(n-i-4)}{1.2.3.4.5.1.2.3.4.5}\Delta^5 u_i}{n(n^2-1)^2(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)(n^2-5^2)h^{10}}[945h^5(2x-nh-h)^5-1050(n^2-7)(2x-nh-h)^3h^7 \\
&\qquad +15(15n^4-230n^2+407)(2x-nh-h)h^9] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Pour appliquer cette formule, il suffit de remarquer :

1° Que les signes Σ s'étendent aux valeurs de i depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$;

2° Que les différences Δu représentent les différences des divers ordres d'après les notations ordinaires, par exemple $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$.

$$\Delta^2_{u_i} = \Delta_{u_{i+1}} - \Delta_{u_i} \quad \Delta^3_i = \Delta^2_{u_{i+1}} - \Delta^2_{u_i}$$

3° Que les sommes $\frac{\Sigma i(n-i)}{1.1}$, $\frac{\Sigma i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1.2.1.2}$ etc., sont respectivement égales à

$$\frac{1}{1}\frac{n-1}{1}+\frac{2}{1}\frac{n-2}{1}+\frac{3}{1}\frac{n-3}{1}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1.2}{1.2}\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}+\cdots\cdots$$

et que, par conséquent, les fractions $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \cdots \frac{1.2}{1.2}, \frac{2.3}{1.2}, \frac{3.4}{1.2}$ et les quantités $\frac{n-1}{1}, \frac{n-2}{1}, \frac{n-3}{3}$ représentent, les premières les nombres de la seconde, troisième, etc., colonne verticale de haut en bas du triangle de Pascal, et les secondes les nombres, de la seconde, troisième, etc., colonne verticale du même triangle de bas en haut.

En général, on est plutôt conduit dans les problèmes balistiques à représenter des expressions de la forme

$$U = F(x)[a + bx + cx^2 + \cdots\cdots]$$

dans laquelle F (x) est une fonction de la variable indépendante x C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque l'on met l'équation des portées sous la forme

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi &= ax + bx^2 + cx^3 + \cdots\cdots \\ &= x(a + bx + cx^2 + \cdots\cdots)\end{aligned}$$

Dans ce cas, si l'on suppose que l'on ait à sa disposition un certain nombre d'observations d'égale précision $u = u_1\, u_2\, u_3$, etc., correspondant à diverses valeurs de $x = x_1\, x_2\, x_3$, etc., il est facile de calculer les termes de l'expression U, au moyen de la série

$$U = F(x)[K_0 \Psi_0(x) + K_1 \Psi_1(x) + K_2 \Psi_2(x) + \cdots\cdots]$$

et de déterminer les sommes des carrés des erreurs commises en s'arrêtant à un terme quelconque de la série, en se basant sur l'erreur quadratique.

Les formules données par M. Tchebicheff sont les suivantes (elles s'appliquent depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$, et λ désigne l'indice du terme auquel on s'arrête dans la série).

Erreur quadratique $\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma \Delta^2_\lambda}$.

Formules donnant le terme $F(x)K_0\Psi_0(x)$

$$(0,0)=\Sigma[F(x_i)]^2$$

$$K_0=\frac{\Sigma F(x_i)u_i}{(0,0)} \qquad \Sigma\Delta_0^2=\Sigma u_i^2-(0,0)K_0^2 \qquad \Psi_0(x)=1.$$

Formules donnant le terme $F(x)K_1\Psi(x)$

$$(0,1)=\Sigma[F(x_i)]^2x_i \quad , \quad (0,2)=\Sigma[F(x_i)]^2x_i^2,$$

$$a_1=(0,0) \quad , \quad b_1=\frac{(0,1)}{(0,0)} \quad , \quad (1,1)=(0,2)-b_1(0,1),$$

$$K_1=\frac{\Sigma F(x_i)x_iu_i-(0,1)K_0}{1,1}$$

$$\Psi_1(x)=x-b_1,$$

$$\Sigma\Delta_1^2=\Sigma\Delta_0^2-(1,1)K_1^2.$$

Formules donnant le terme $F(x)K_2\Psi_2(x)$

$$(0,3)=\Sigma[F(x_i)^2]x_i^3 \quad , \quad (0,4)=\Sigma[F(x_i)]^2x_i^4,$$

$$(1,2)=(0,3)-b_1(0,2) \quad , \quad (1,3)=(0,4)-b_1(0,3),$$

$$a_2=\frac{(1,1)'}{(0,0)} \quad , \quad b_2=\frac{(1,2)}{(1,1)}-\frac{(0,1)}{(0,0)} \quad , \quad (2,2)=(1,3)-b_2(1,2)-a_2(0,2),$$

$$K_2=\frac{\Sigma F(x_i)x_i^2u_i-(0,2)K_0-(1,2)K_1}{2,2}$$

$$\Psi_2(x)=(x-b_2)\Psi_1(x)-a_2\Psi_0(x)$$

$$\Sigma\Delta_2^2=\Sigma_1^2-(2,2)K_2^2$$

Formules donnant le terme $F(x)K_\lambda\Psi_\lambda(x)$

$$(0,2\lambda-1)=\Sigma[F(x_i)^2x_i^{2\lambda-1}$$

$$(1,2\lambda-2)=(0,2\lambda-1)-b_1(0,2\lambda-2)$$

$$(2,2\lambda-3)=(1,2\lambda-2)-b_2(1,2\lambda-3)-a_2(0,2\lambda-3)$$

$$(3,2\lambda-4)=(2,2\lambda-3)-b_3(0,2\lambda-4)-a_3(1,2\lambda-4)$$

$$(\lambda-1,\lambda)=(\lambda-2,\lambda+1)-b_{\lambda-1}(\lambda-2,\lambda)-a_{\lambda-1}(\lambda-3,\lambda)$$

$$a_\lambda=\frac{(\lambda-1,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)}$$

$$b_\lambda=\frac{(\lambda-1,\lambda)}{(\lambda-1,\lambda-1)}-\frac{(\lambda-2,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)}$$

$$(0,2\lambda\quad)=\Sigma[F(x_i)]^2x_i^{2\lambda}$$

$$(1,2\lambda-1)=(0,2\lambda\quad)-b_1(0,2\lambda-1)$$

$$(2,2\lambda-2)=(1,2\lambda-1)-b_2(1,2\lambda-2)-a_2(0,2\lambda-2)$$

$$(3,2\lambda-3)=(2,2\lambda-2)-b_3(2,2\lambda-3)-a_3(1,2\lambda-3)$$

$$(\lambda-1,\lambda+1)=(\lambda-2,\lambda+2)-b_{\lambda-1}(\lambda-2,\lambda+1)-a_{\lambda-1}(\lambda-3,\lambda+3)$$

$$(\lambda,\lambda)=(\lambda-1,\lambda+1)\,b_\lambda(\lambda-1,\lambda)\;a_\lambda(\lambda-2,\lambda)$$

$$K_\lambda=\frac{\Sigma F(x_i)x_i^\lambda i-(0,\lambda)K_0-(1,\lambda)K_1-(2,\lambda)K_2-\ldots-(\lambda-1,\lambda)K_{\lambda-1}}{\lambda_i\lambda}$$

$$\Psi\lambda(x)=(x-b_\lambda)\Psi_{\lambda-1}(x)-a_\lambda\Psi_{\lambda-2}(x)$$

$$\Sigma\Delta_\lambda^2=\Sigma\Delta_{\lambda-1}^2-(\lambda,\lambda)K_\lambda^2$$

Nous avons appliqué les formules précédentes à la recherche de l'équation des portées du canon de 80^{mm} de campagne jusqu'à 4,100 m, nous avons pris les portées et les angles de projection dans la table de tir, sans tenir compte de l'angle de relèvement. Les données sont les suivantes :

PORTÉES.	ANGLES DE TIR.
500	20′
900	1°
1300	1°45′
1700	2°35′
2100	3°30′
2500	4°30′
2900	5°35′
3300	6°50′
3700	8°10′
4100	9°35′

Nous poserons donc :

$$\sin 2\varphi = U = x(a + bx + cx^2 + \ldots..)$$

Dans le cas présent,

$$F(x) = x.$$

Nous déterminerons les coefficients *a b c* sans limiter leur nombre en nous arrêtant au tir pour lequel nous obtenons une erreur quadratique négligeable ou suffisamment petite. Nous dresserons donc pour le calcul les tableaux suivants :

$x_1 = 500$	$\varphi_1 = 20'$	$u_1 = \sin 2\varphi =$	0,0116353
$x_2 = 900$	1°	$u_2 =$	0,0348990
$x_3 = 1300$	1°45′	$u_3 =$	0,061049
$x_4 = 1700$	2°35′	$u_4 =$	0,09005
$x_5 = 2100$	3°30′	$u_5 =$	0,12187
$x_6 = 2500$	4°30′	$u_6 =$	0,15643
$x_7 = 2900$	5°35′	$u_7 =$	0,19366
$x_8 = 3300$	6°50′	$u_8 =$	0,23627
$x_9 = 3700$	8°10′	$u_9 =$	0,28128
$x_{10} = 4100$	9°35′	$u_{10} =$	0,32882

Nous formerons d'abord les quantités $[F(x_i)]^2 = x_i^2$ et $F(x_i)u_i = x_i u_i$

$[F(x_i)]^2 = x_i^2$	$F(x_i)u_i = x_i u_i$
$x_1^2 = 250^4$	$x_1 u_1 = 5,8176$
$x_2^2 = 810^4$	$x^2 u^2 = 31,4091$
$x_3^2 = 1690^4$	$x_3 u_3 = 79,3637$
$x_4^2 = 2890^4$	$x_4 u_4 = 153,0850$
$x_5^2 = 4410^4$	$x_5 u_5 = 255,9270$
$x_6^2 = 6250^4$	$x_6 u_6 = 391,0750$
$x_7^2 = 8410^4$	$x_7 u_7 = 561,6140$
$x_8^2 = 10890^4$	$x_8 u_8 = 779,6910$
$x_9^2 = 13690^4$	$x_9 u_9 = 1040,7360$
$x_{10}^2 = 16810^4$	$x_{10} u_{10} = 1346,1120$
$(0,0) = \Sigma F(x_i)^2 = 6610^5$	$\Sigma F(x_i) u_i = 4644,8304$

Nous tirons de là

$$K_0 = \frac{\Sigma F(x_i) u_i}{(0,0)} = 0,00007027$$

et comme

$$\Psi_0(x) = 1$$
$$F(x) K_0 \Psi_0(x) = 0,00007027\, x$$

Pour trouver la somme des carrés des erreurs, on fait la somme des u_i^2. On obtient alors le tableau suivant :

$$\begin{array}{r}
u_1^2 = 0,00013538 \\
u_2^2 = 0,00121794 \\
u_3^2 = 0,00372698 \\
u_4^2 = 0,00810900 \\
u_5^2 = 0,01485229 \\
u_6^2 = 0,02447034 \\
u_7^2 = 0,03750419 \\
u_8^2 = 0,05582350 \\
u_9^2 = 0,07911844 \\
u_{10}^2 = 0,10779402 \\
\hline
\Sigma u_i^2 = 0,33275308
\end{array}$$

On a

$$K_0^2 = 0,000000004937873$$
$$(0,0)\, K_{02} = 0,32639340$$

et

$$\Sigma \Delta_0^2 = \Sigma u_i^2 - (0,0) K_0^2 = 0,00635868$$

L'erreur quadratique moyenne avec laquelle le terme trouvé représente les valeurs de $u = \sin 2\varphi$ est :

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma \Delta_0^2} = \sqrt{\frac{0,00635868}{10}} = 0,025216$$

Cette erreur étant trop considérable, cherchons le second terme $F(x)$ $K_1\, \psi_1(x)$.

Pour cela, effectuons les produits $F(x_i)^2 x_i = x_i^3$ et $F(x_1)^2 x_i^2 = x^4$; on a alors :

$$\begin{array}{r}
x_1^3 = 1250^6 \\
x_2^3 = 7290^6 \\
x_3^3 = 21970^6 \\
x_4^3 = 49130^6 \\
x_5^3 = 92610^6 \\
x_6^3 = 156250^6 \\
x_7^3 = 243890^6 \\
x_8^3 = 359370^6 \\
x_9^3 = 506530^6 \\
x_{10}^3 = 689210^6 \\
\hline
(0,1) = \Sigma[F(x_i)^2] x_i = 212750^7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
x_1^4 = 6250^8 \\
x_2^4 = 65610^8 \\
x_3^4 = 285610^8 \\
x_4^4 = 835210^8 \\
x_5^4 = 1944810^8 \\
x_6^4 = 3906250^8 \\
x_7^4 = 7072810^8 \\
x_8^4 = 11859210^8 \\
x_9^4 = 18741610^8 \\
x_{10}^4 = 28257610^8 \\
\hline
(0,2) = \Sigma[F(x_i)] x_i^2 = 72974980^8
\end{array}$$

$$a_1 = (0,0) - 6610^{s} \qquad b_1 = \left(\frac{0,1}{0,0}\right) = 3218,61$$

$$b_1(0,1) = 6847590^{9}$$

$$(1,1) = (0,2) - (0,1)b_1 = 4499080^{s}$$

$$F(x_i)x_i u_1 = x_2{}^2 u_i$$

$$\begin{aligned}
x_1{}^2 u_1 &= 2908,25 \\
x_2{}^2 u_2 &= 28268,190 \\
x_3{}^2 u_3 &= 103172,810 \\
x_4{}^2 u_4 &= 260244,500 \\
x_5{}^2 u_5 &= 537446,700 \\
x_6{}^2 u_6 &= 977687,500 \\
x_7{}^2 u_7 &= 1628680,600 \\
x_8{}^2 u_8 &= 2572980,300 \\
x_9{}^2 u_9 &= 3850723,200 \\
x_{10}{}^2 u_{10} &= 5519059,200 \\
\hline
\Sigma F(x_1)x_1 u_i &= 15481171,825 \\
-(0,1)K_0 &= 14949000,000 \\
\hline
\Sigma F(x_i)x_i u_i &= 532171,825
\end{aligned}$$

On a alors

$$K_1 = \frac{\Sigma F(x_i)x_i u_i - (0,1)K_0}{(1,1)} = 0,07118275$$

Par suite,

$$\Psi_1(x) = x - b_1 = x - 3218,61$$

$$F(x)K_1\Psi_1(x) = 0,0^4380712x + 0,0^7118275x^2$$

Pour obtenir $\Sigma\Delta_1{}^2$, on prend :

$$\begin{aligned}
\Sigma\Delta_0{}^2 &= 0,00635868 \\
-(1,1)K_1{}^2 &= 0,00633830 \\
\hline
\Sigma\Delta_1{}^2 = \Sigma\Delta_0{}^2 - (1,1)K_1{}^2 &= 0,00002038
\end{aligned}$$

valeur qui donne pour erreur quadratique moyenne $\varepsilon_2 = 0,0014276$ parfaitement acceptable.

On aura donc pour valeur cherchée de U

$$\begin{aligned}
\sin 2\varphi = U &= 0,0^4 7027x \\
&\quad - 0,0^4380712x + 0,0^7118275x^2 \\
&= 0,0^4321988x + 0,0^7118275x^2
\end{aligned}$$

En appliquant la formule précédente, et en y faisant successivement $x = 500$, 900, 1,300..., on obtient pour φ les valeurs suivantes :

X.	φ calculé.	φ donné par la table.	Différence.
500	28′	20′	+ 8′
900	1°6′	1°	+ 6′
1300	1°46′	1°45′	+ 1′
1700	2°33′	2°35′	— 2′
2100	3°26′	3°30′	— 4′
2500	4°26′	4°30′	— 4′
2900	5°33′	5°35′	— 2′
3300	6°48′	6°50′	— 2′
3700	8°8′	8°10′	— 2′
4100	9°39′	9°35′	+ 4′

On voit donc que les différences sont peu sensibles. Si l'on avait désiré une approximation plus grande, on aurait pu continuer le calcul en introduisant un terme en x^3. Nous n'avons pas cru devoir pousser plus loin l'approximation, notre but n'étant que d'indiquer la marche à suivre dans des cas semblables.

Nous renverrons le lecteur, pour les applications de la méthode des moindres carrés à l'article du capitaine Valier paru dans le *Mémorial d'artillerie de marine 1889*, sur la compensation et la conduite des expériences.

(*Note du traducteur.*)

CHAPITRE II

PROBABILITÉ DU TIR

§ 1.

Quand on a obtenu une rose de tir, le centre de tir, ou le point du plan de la rose ayant les coordonnées moyennes, est considéré comme étant le point du plan que rencontrerait un projectile de poids et de dimensions moyennes, tiré sous un angle de projection moyen, avec une vitesse initiale (de translation et de rotation) moyenne, dans une atmosphère moyenne. Toutes ces valeurs moyennes sont les moyennes arithmétiques relatives aux épreuves exécutées. Si celles-ci sont nombreuses, les moyennes peuvent être considérées comme étant les valeurs définitives.

Quel que soit le plan de la rose de tir, les déviations latérales sont regardées comme étant indépendantes de celles que l'on a mesurées dans le sens perpendiculaire (1).

Les unes et les autres constituent les *erreurs* de tir.

En se reportant à la définition de la *bande* contenant la moitié des coups (p. 151) et de l'*erreur probable* (p. 216), il est évident que l'une est double de l'autre. Si donc on a trouvé par expérience la déviation latérale moyenne H, la largeur E de la bande contenant la moitié des coups est (page 217) :

$$E = 2\,\varepsilon_m = 1,69\ H.$$

Des relations analogues ont lieu entre la bande et la déviation moyenne dans l'autre sens.

(1) Voir chapitre III.

Soit a la largeur d'une bande (on suppose les deux droites qui la limitent verticales, infinies et équidistantes du centre), soit E la largeur de celle contenant la moitié des coups, le nombre des coups qui, sur 100 coups tirés, tomberaient dans cette bande, est égal au nombre des coups ayant une déviation inférieure à $\frac{a}{2}$; et on l'obtient par conséquent au moyen de la table XIII dans la colonne *pour-cent* correspondant au facteur f déterminé par $f=\frac{a}{E}$. Inversement, si l'on cherche la largeur de la bande qui contient un pour-cent donné P, on cherche le facteur f correspondant dans la table, et l'on a $a=Ef(P)$ [1].

Quelle que soit la position d'un but, la partie exposée peut toujours être regardée comme dépendant d'une surface plane horizontale ou d'une surface verticale perpendiculaire au plan de direction. Quel que soit, en outre, le contour de cette surface, elle peut toujours être divisée en rectangles ayant l'un des côtés perpendiculaires au plan de direction. Les buts que nous considérerons seront toujours supposés réduits à l'un de ces rectangles.

On dit que le tir est *centré* quand le centre du rectangle coïncide avec le centre des tirs, et on considère comme centré en hauteur, ou en portée, le tir qui donne un nombre de coups bas ou courts égal au nombre de coups hauts ou longs. On appelle tir centré en direction celui dans lequel le nombre de coups à droite est égal au nombre de coups à gauche.

L'artillerie doit tendre en général à obtenir un tir centré, parce qu'il donne le maximum de coups dans la cible : dans certains cas, toutefois, on est forcé de régler son tir autrement : un tir *réglé* n'est donc pas toujours *centré*.

---

(1) Le pour-cent correspondant au facteur f s'écrit $P(f)$, et le facteur correspondant au pour-cent P s'écrit $f(P)$.
Par exemple : $30 = P(0,57)$ et $0,57 = f(30)$.

§ 2.

Tir centré.

Le pour-cent des coups qui, au tir centré, battent un but, se calcule par la formule

$$\frac{1}{100}\,P\left(\frac{h}{F}\right)P\left(\frac{b}{E}\right)$$

en appelant b la largeur, h la hauteur ou la profondeur du but. En effet, pour mettre un coup dans le rectangle bh, il faut le mettre à la fois dans la bande de largeur b et dans la bande de hauteur ou de profondeur h. En appliquant le théorème de la probabilité composée, on a la formule donnée.

Quand l'une des dimensions du cadre est égale ou supérieure au quadruple de la dimension correspondante de la bande contenant la moitié des coups, le but peut être considéré comme une bande indéfinie. Ordinairement la dimension que l'on peut considérer comme indéfinie est la largeur.

Le but renfermera tous les coups et pourra être considéré comme indéfini dans tous les sens, si ses dimensions sont quadruples de celles des bandes qui contiennent la moitié des coups.

Exemples : *1° Canon de 9 AR.* — Tir centré à 1500 *m*. Combien de coups frapperont une pièce de campagne? Le rectangle circonscrit à la pièce ayant environ 1,60 *m* de haut et 2 *m* de long, on a $h = 1{,}60$, $b = 2$.

La table de tir donne $F = 0{,}78$, $E = 0{,}98$, le pour-cent cherché est donc :

$$\frac{1}{100}\,P\left(\frac{1{,}60}{0{,}78}\right)P\left(\frac{2{,}00}{0{,}98}\right) = \frac{1}{100}\,P(2{,}05)\,P(2{,}03) = \frac{83 \times 83}{100} = 69 \text{ environ,}$$

c'est-à-dire 7 sur 10.

2° Canon de 7^c BR. — Tir centré à 1500 *m*. Combien de coups sur 100 atteindront un peloton d'infanterie? La hauteur est $\frac{h}{1{,}80\,m}$ et la largeur plus que quadruple de $E = 1{,}5$. Comme $F = 2{,}1$, le pour-cent cherché est :

$$P\left(\frac{1{,}80}{2{,}10}\right) = P(0{,}86) = 44$$

Quand un but présente en même temps une largeur, une hauteur et une profondeur, comme une troupe en colonne (fig. 32), il peut être assimilé à un rectangle AB limité en profondeur par deux lignes correspondant aux deux trajectoires extrêmes, qui atteignent le but.

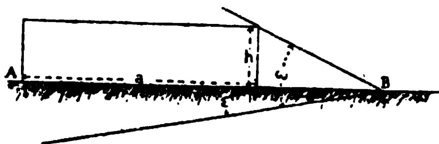


Fig. 32.

Appelant donc θ' l'inclinaison de la trajectoire, h la hauteur du but, a sa profondeur, la profondeur du rectangle est :

$$a + \frac{h}{\operatorname{tg}\theta'}$$

et le pour-cent correspondant

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{\mathrm{F}'} + \frac{h}{\mathrm{F}'\operatorname{tg}\theta'}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{a}{\mathrm{F}'} + \frac{h}{\mathrm{F}}\right) \qquad \text{(page 156)}$$

Si la largeur est supérieure à 4E, tel sera le pour-cent des coups que dans un tir centré recevra la colonne. Si la largeur est inférieure à 4E et égale à b, le pour-cent sera donné par le produit de l'expression précédente par $\frac{1}{100}\ \mathrm{P}\left(\frac{b}{\mathrm{F}}\right)$.

Exemple. — *Canon de* 7^c^ *BR.* — Tir centré à 2500 *m*. Combien de coups sur 100 atteignent un bataillon en colonne par compagnie ? Ici la hauteur est 1,80 *m* et la profondeur 25 *m*, la largeur étant supérieure au quadruple de E. En posant $\mathrm{F} = 6,9$, $\mathrm{F}' = 35$, le pour-cent cherché est :

$$\mathrm{P}\left(\frac{25}{35} + \frac{1,80}{6,9}\right) = \mathrm{P}(0,97) = 49\ \%$$

Étant donné le pour-cent que l'on veut obtenir, si l'on demandait la hauteur, ou la largeur, ou la profondeur de la bande capable de contenir ce pour-cent au tir centré, on résoudrait ce problème avec une égale facilité, mais il serait indéterminé, si, au lieu de la bande, on cherchait le rectangle. On pourrait alors choisir à volonté l'une des dimensions.

Exemple. — Une embrasure d'un fort peut être battue par un tir de plein fouet à 2500 *m* de distance. Cette embrasure exige une ouverture extérieure large de 2,50 *m*. Quelle doit être la hauteur de cette ouverture pour qu'avec un canon aussi précis que notre 9 AR, l'embrasure ne puisse pas être atteinte par plus de 25 p. 100 des coups?

La table de tir donne $E = 2,75$, $F = 2,35$.

En appelant h la hauteur cherchée, on a :

$$\frac{1}{100} P\left(\frac{h}{2,35}\right) \times P\left(\frac{2,50}{2,75}\right) = 25 ;$$

et comme

$$P\left(\frac{2,50}{2,75}\right) = P(0,91) = 46 ,$$

ilen résulte

$$P\left(\frac{h}{2,35}\right) = \frac{2500}{46} = 54 ;$$

par conséquent :

$$\frac{h}{2,35} = f(54) = 1,09, \quad h = 1,09 \times 2,35 = 2,56.$$

La hauteur ne devra donc pas dépasser 2,56 *m*.

Distance de tir maximum utile. — Cette distance dépend du but; on admet que c'est la distance à laquelle le but peut recevoir le 1/4 des coups tirés.

Soit h la hauteur du but (ou sa profondeur), b sa largeur, la distance cherchée est celle pour laquelle F et E satisfont à la relation

$$\frac{1}{100} P\left(\frac{h}{F}\right) P\left(\frac{b}{E}\right) = 25.$$

Cette équation ne peut être résolue que par des essais.

On a immédiatement deux limites de la distance demandée, en cherchant dans les tables de tir les deux distances pour lesquelles $F = h$ et $E = b$. Dans le cas où le but est vertical, la distance cherchée est à peu près la moyenne des deux.

Exemples : *1° Canon de 9 AR.* — Quelle est la distance maximum utile contre une embrasure, dont l'ouverture est haute de 1,60 *m* et large de 2,50 *m*?

D'après la table de tir, on a pour la distance de 2100 *m* : $F=1,56$ et pour 2400 *m*, $E=2,50$. La moyenne est 2250 *m*. Pour cette distance, on a

$$\frac{1}{100}P\left(\frac{1,60}{1,82}\right)P\left(\frac{2,50}{2,20}\right)=\frac{1}{100}P(0,84)\,P(1,14)=\frac{43\times 56}{100}=24,08.$$

La distance maximum de tir est donc environ 2200 *m*.

2° *Même question pour le canon de 16 GR* (tir de plein fouet).

D'après les tables de tir, on trouve que les distances pour lesquelles on a

$$F=1,60 \qquad \text{et} \qquad E=2,50$$

sont 1125 et 1300 ; la moyenne est environ 1200 *m*. En vérifiant, nous avons :

$$\frac{1}{100}P\left(\frac{1,60}{1,80}\right)P\left(\frac{2,50}{2,30}\right)=\frac{1}{100}P(0,89)\,P(1,09)=\frac{45\times 54}{100}=24,30.$$

La distance maximum utile est donc, dans le cas présent, un peu inférieur à 1200 *m*.

3° *Canon de 9 AR*. — On veut enfiler un tronçon de route ayant 6 *m* de large et 30 *m* de long. Quelle est la distance utile maximum ? Les deux limites sont 4000 et 3500 *m*. Vérifions pour une distance de 3750 *m*. D'après la table de tir, on a pour cette distance

$$F=27,5 \qquad E=7,05.$$

Par suite,

$$\frac{1}{100}P\left(\frac{30}{27,5}\right)P\left(\frac{6}{7,05}\right)=\frac{1}{100}P(1,09)\,P(0,85)=\frac{54\times 43}{100}=23,22.$$

Pour 3700 *m*, $F=27$, $E=6,8$; donc

$$\frac{1}{100}P\left(\frac{30}{27}\right)P\left(\frac{6}{6,8}\right)=\frac{1}{100}P(1,11)\,P(0,88)=\frac{55\times 45}{100}=24,75.$$

La distance cherchée est donc environ 3700 *m*.

4° *Même question pour le canon de 16 GR* (tir de plein fouet). — Les deux limites sont 1800 et 2500 *m*. Pour 2100 *m* on a $F=33$, $E=4,7$. Par suite :

$$\frac{1}{100}P\left(\frac{30}{33}\right)P\left(\frac{6}{4,7}\right)=\frac{46\times 61}{100}=28,26.$$

La distance maximum utile est donc environ 2200 *m*.

Quand la largeur du but peut être considérée comme indéfinie, la distance maximum utile est celle pour laquelle la bande contenant la moitié des coups a une hauteur ou une profondeur environ double de la hauteur ou de la profondeur du but.

§ 3.

Tir non centré.

Soit une bande limitée par les droites M, N (fig. 33). Le centre de tir est entre les deux droites, à la distance h_1 de la première et h_2 de la seconde.

Menons deux autres droites, *m* et *n*, formant respectivement avec

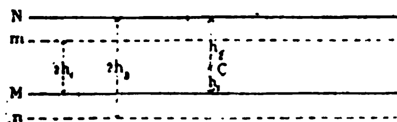


Fig. 33.

M et N deux bandes M*m*, N*n* relativement à chacune desquelles le tir est centré.

Le *pour-cent* qui tombe dans la bande M*m* étant $P\left(\frac{2h_1}{F}\right)$, celui qui tombe dans la moitié inférieure de cette bande est donc $\frac{1}{2}P\left(\frac{2h_1}{F}\right)$.

Le *pour-cent* qui tombe dans la bande N*n* étant $P\left(\frac{2h_2}{F}\right)$, celui qui tombe dans la moitié supérieure est donc $\frac{1}{2}P\left(\frac{2h_2}{F}\right)$.

Le *pour-cent* qui tombe dans la bande MN est donc :

$$\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2h_1}{F}\right)+P\left(\frac{2h_2}{F}\right)\right]$$

Si le centre se trouve sur la droite M, le *pour-cent* se réduit à

$$\frac{1}{2}P\left(\frac{2h_2}{F}\right).$$

Si le centre se trouve enfin au-dessous de M, par un raisonnement analogue, on trouve

$$\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2h_2}{F}\right)-P\left(\frac{2h_1}{F}\right)\right].$$

Cette formule rentre dans la précédente, en considérant h_1 comme positif quand le centre tombe dans la bande, et négatif au-dessous.

Exemple. — Deux embrasures situées à la même hauteur ont l'ouverture extérieure de largeur b et de hauteur h. La distance d'un centre à l'autre est l. On demande le pour-cent des coups qui entrent dans les embrasures, quand le tir est réglé sur le centre de l'espace qui les sépare.

Le pour-cent cherché est :

$$\frac{1}{100}P\left(\frac{h}{F}\right)\left[P\left(\frac{l+b}{E}\right)-P\left(\frac{l-b}{E}\right)\right].$$

Si le but se trouve dans les conditions énoncées à la page 234, sa profondeur (en supposant l'angle de site nul) étant

$$a+\frac{h}{\operatorname{tg}\omega},$$

et a' la distance du centre de la rose au delà de la première limite du but, le pour-cent des coups battant le but est :

$$\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2a'}{F'}\right)+P\left(\frac{2a+2h\operatorname{cotg}\omega-2a'}{F'}\right)\right]$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2a'}{F'}\right)+P\left(\frac{2a-2a'}{F'}+\frac{2h}{F}\right)\right].$$

Exemple : *Canon de 7 BR.* — Tir à 2500 m. Combien de coups sur 100 peuvent atteindre un bataillon en colonne, en supposant le centre de la rose à 10 m au delà de la première ligne?

On a dans ce cas $a'=10$, $F'=15$, $F=2,76$, $a=25$, $h=1,80$. Le pour-cent cherché est donc :

$$\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{20}{15}\right)+P\left(\frac{30}{15}+\frac{3,60}{2,76}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}[P(1,33)+P(3,30)]=\frac{1}{2}(63+97)=80\,\%.$$

§ 4.

Coups courts.

Le nombre des coups qui tombent en avant d'un but horizontal dépend de la distance du centre de tir à la limite qui sépare les coups justes des coups courts.

Soit O (fig. 34) le centre des tirs, que nous supposons tomber au delà de la limite M, à la distance $OP = x$. Tirons au delà de O, et à la distance x de ce point, une droite m parallèle à M. Le

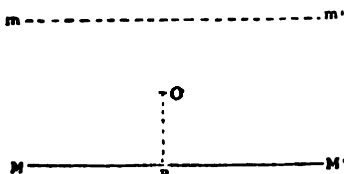


Fig. 34.

pour-cent des coups qui tombent dans la bande Mm est $P\left(\frac{2x}{F}\right)$, et le pour-cent qui tombe en dehors est par conséquent :

$$100 - P\left(\frac{2x}{F}\right).$$

Le pour-cent court que nous appellerons C sera donc :

$$C = 50 - \frac{1}{2} P\left(\frac{2x}{F}\right).$$

Si le centre tombait en deçà de M, on aurait par une construction analogue l'expression

$$C = 50 + \frac{1}{2} P\left(\frac{2x}{F}\right),$$

expression qui rentre dans la précédente en regardant x comme négatif, quand le centre tombe en deçà de la limite du but.

Il est évident que sur un but vertical, le calcul des coups bas s'obtiendrait de la même façon. Il en serait de même des coups longs ou hauts, et des coups à droite ou à gauche, en ayant soin de mettre pour x la distance du centre à la limite du but, qui sépare les coups justes de ceux que l'on se propose de calculer et de

la compter comme négative si le centre tombe dans la partie des coups qui ne sont pas justes.

Dans le dernier exemple de la page 237, le centre de tir tombait à 10 *m* au delà de la première limite du but. Combien de coups tombent au delà ? On a

$$50 - \frac{1}{2} P\left(\frac{20}{15}\right) = 50 - \frac{1}{2} P(1,33) = 50 - \frac{1}{2} 63 = 18,5.$$

Connaissant le pour-cent court, déterminer le centre de la rose. — De la formule

$$C = 50 - \frac{1}{2} P\left(\frac{2x}{F}\right),$$

on tire

$$P\left(\frac{2x}{F}\right) = 100 - 2C;$$

le facteur correspondant au pour-cent 100 — 2C sera donc $\frac{2x}{F}$, c'est-à-dire

$$\frac{2x}{F} = f(100 - 2C),$$

et par suite

$$x = \frac{F}{2} f(100 - 2C).$$

Cette formule montre que pour avoir court le quart des coups ($C = 25$), le centre de tir doit tomber au delà de la première limite du but d'une quantité égale à la moitié de la bande des tables. Si $C = 50$, $x = 0$. Si $C = 75$, $f(100 - 2C)$, et par conséquent x devient une quantité négative, ce qui indique que le centre de tir tombe en deçà de la limite avant.

Il est donc clair que si l'on veut obtenir courts les trois quarts des coups, il faut mettre le centre de tir en deçà du but d'une quantité égale à la moitié de la bande.

Dans un certain but, quand le tir est bien réglé, le pour-cent des coups doit être C. On trouve après avoir tiré un certain nombre de coups qu'il est C'. Quelle est la correction à faire?

Si le tir eût été déjà réglé, c'est-à-dire si le pour-cent eût été C,

le centre de la rose aurait dû être distant de la limite avant du but de

$$\frac{F}{2}f(100-2C).$$

Le pour-cent étant en réalité C′, la distance du centre à cette même limite est :

$$\frac{F}{2}f(100-2C'):$$

la correction à faire est donc

$$x=\frac{F}{2}[f(100-2C)-f(100-2C')].$$

La quantité x peut être positive ou négative. Dans le premier cas, on doit allonger le tir, dans le second le raccourcir.

Quel est le pour-cent court qui peut donner lieu à une correction c?

Dans l'équation précédente, si on fait $x=\pm c$ suivant que l'on suppose la correction à faire en plus ou en moins, on trouve

$$f(100-2C')=f(100-2C)\mp\frac{2c}{F},$$

$$100-2C'=P\left[f(100-2C)\mp\frac{2c}{F}\right],$$

$$C'=50-\frac{1}{2}P\left[f(100-2C)\mp\frac{2c}{F}\right].$$

§ 5.

Dispersion des shrapnels.

La dispersion longitudinale des éclatements des shrapnels donne lieu à des problèmes analogues à ceux que l'on rencontre dans la dispersion des points de chute des projectiles. Ils se résolvent de la même façon.

Soit G la profondeur de la bande contenant la moitié des éclatements ; le pour-cent des éclatements qui peut se produire dans une bande de profondeur h est :

$$P\left(\frac{h}{G}\right).$$

Ce nombre suppose que le centre des éclatements coïncide avec le centre de la bande; si les deux centres ne coïncident pas, le pour-cent se calcule au moyen des règles du tir non centré.

En admettant que le centre des éclatements tombe à la distance I du front du but, combien de shrapnels éclateront en avant, et combien au delà?

Soient m (fig. 35) le front du but et O le centre. En déterminant la bande Mm dont le centre coïncide avec O et dont la largeur est 2I, en Mm il en éclatera $P\left(\frac{2I}{G}\right)$, et par conséquent entre m et O

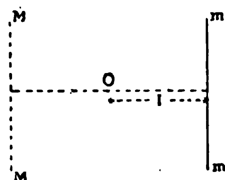


Fig. 35.

il en éclatera $\frac{1}{2}P\left(\frac{2I}{G}\right)$. D'autre part, au delà de O nous avons 50 éclatements, donc, en deçà du but, il y en aura

$$50+\frac{1}{2}P\left(\frac{2I}{G}\right),$$

et au delà

$$50-\frac{1}{2}P\left(\frac{2I}{G}\right).$$

EXEMPLES : 1° *Canon de 7 BR.* — Distance : 1 200 m. Tir au shrapnel contre une ligne d'infanterie. Combien de shrapnels sur 100 éclateront en avant du but, le tir ayant été rectifié ?

Dans la table de tir, on trouve pour 1 500, $I=50\,m$, et dans les observations qui font suite à la table, on trouve $G=30\,m$; le pour-cent cherché est donc :

$$50+\frac{1}{2}P\left(\frac{100}{30}\right)=50+\frac{1}{2}P(3,33)=50+48=98\,\%.$$

2° *Canon de 9 ARC.* — Distance : 1800 m. Tir au shrapnel contre de l'artillerie découverte. Combien de shrapnels sur 100 éclateront au delà de la ligne des pièces, en supposant l'intervalle normal réduit à 25 m?

Dans ce cas, $I=25$ et $G=45\,m$. Le pour-cent est donc :

$$50-\frac{1}{2}P\left(\frac{50}{45}\right)=50-\frac{1}{2}P(1,11)=50-27=23\,\%.$$

Le nombre des shrapnels qui touchent terre avant d'éclater peut fournir des indications utiles sur le centre des éclatements.

Éclatements à terre. — Soit OSC (fig. 36) la trajectoire moyenne dont le point de chute est C à la distance X, et le centre d'éclatement S à la distance X — I. Soient F la profondeur de la bande contenant la moitié des points de chute et G la profondeur de la zone

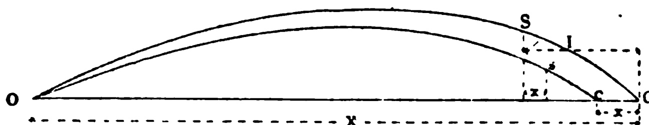


Fig. 36.

contenant la moitié des éclatements. On demande le pour-cent des éclatements au-dessous de l'horizon de la pièce.

Soient, pour un coup quelconque, x la déviation longitudinale d'un point de chute, comptée de C vers l'origine, et x' la déviation longitudinale d'un éclatement comptée de S vers C. La distance du point de chute à l'origine est $X - x$, et la distance du point d'éclatement de l'origine est $X - I + x'$. Pour que l'éclatement ait lieu au-dessus de l'horizon de la pièce, on doit avoir :

$$X - I + x' < X - x,$$

ce qui revient à $x + x' < I$. Donc la probabilité que l'éclatement n'ait pas lieu au-dessous de l'horizon de la pièce est égale à la probabilité que la somme algébrique $x + x'$ soit inférieure à I. Or, la probabilité que la somme algébrique de deux erreurs (dues à des causes indépendantes) soit inférieure à une certaine quantité est égale à la probabilité qu'il se produise une erreur inférieure à la même quantité, sous l'action d'une seule cause caractérisée par une erreur moyenne égale à la racine carrée de la somme des carrés des erreurs moyennes partielles dues à chaque cause.

Par suite, la probabilité que l'erreur $x + x'$ soit inférieure à I est :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{200} P\left(\frac{2I}{\sqrt{F^2 + G^2}}\right).$$

En effet, $\frac{1}{2}$ est la probabilité que $x + x'$ soit une quantité quel-

conque négative, et $\frac{1}{200} P \left[\frac{2I}{\sqrt{F^2 + G^2}}\right]$ est la probabilité que $x + x'$ soit positif et compris entre 0 et I. Le pour-cent des coups tombant au-dessous de l'horizon de la pièce est donc

$$t = 50 - \frac{1}{2} P \left(\frac{2I}{\sqrt{F^2 + G^2}}\right).$$

Problème. — Si le pour-cent à terre est t, quel est l'intervalle moyen d'éclatement? Il est :

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{F^2 + G^2} f(100 - 2t).$$

§ 6.

De l'opportunité de certaines corrections.

Dans certains tirs d'exercice, on corrige les données du pointage, quand l'un des quatre cas suivants se présente. On demande la probabilité que les données donnant lieu à chacun d'eux soient erronées.

1er Cas. — *On trouve une déviation plus grande que le double de la bande contenant 50 p. 100 des coups.*

Soit F la bande. Si les données du tir étaient exactes, la probabilité d'avoir une déviation > 2 F dans un sens déterminé serait :

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{100} P \left(\frac{4F}{F}\right)\right] < 0{,}005.$$

Inversement, étant donnée cette déviation, la probabilité que le centre de tir tombe relativement au point visé dans une direction opposée à la déviation observée, serait < 0,005.

2e Cas. — *On trouve deux déviations dans le même sens, chacune plus grande que F.*

Si les données du tir étaient exactes, la probabilité d'avoir une déviation > F dans un sens déterminé serait :

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{100} P \left(\frac{2F}{F}\right)\right] = 0{,}09,$$

et la probabilité d'en avoir deux serait $0,09 \times 0,09$. Inversement, le second cas étant donné, la probabilité que le centre de tir tombe dans une direction opposée aux deux déviations observées serait 0,0081.

3e Cas. — *On trouve trois déviations dans le même sens, dont l'une est plus grande que F.*

Si les données du tir étaient exactes, la probabilité d'avoir trois coups dans le même sens serait $\frac{1}{8}$; de cette valeur il faut donc retrancher la probabilité d'avoir trois déviations toutes inférieures à F (seule combinaison à exclure), c'est-à-dire

$$\frac{1}{8}\left[\frac{1}{100}\,P\left(\frac{2F}{F}\right)\right]^3 = 0,070.$$

Par conséquent, le troisième cas étant donné, la probabilité que le centre de tir tombe dans une direction opposée aux trois déviations observées est $\frac{1}{8} - 0,070 = 0,055$.

4e Cas. — *On trouve quatre déviations dans le même sens.* — Si les données du tir étaient exactes, la probabilité du cas présent serait $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625$. Donc, étant donné le cas, la probabilité que le centre de tir tombe dans une direction opposée aux quatre déviations est 0,0625.

Les bandes tabulaires sont, en réalité, plus petites que celles que l'on obtient dans les tirs d'instruction, à cause des soins particuliers que l'on apporte aux tirs d'expérience.

Si l'on suppose que les bandes dans le tir d'instruction sont doubles de celles données par les tables, la probabilité que le centre de tir tombe dans la direction opposée à la déviation observée serait :

Dans le 1er cas : $\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{100}\,P\left(\frac{4F}{2F}\right)\right] = 0,0875$

— 2e cas . . . . $= 0,0625$

— 3e cas . . . . $= 0,109$

— 4e cas . . . . $= 0,0625$

Si les bandes effectives étaient triples de celles qui sont données dans les tables, la probabilité énoncée précédemment serait :

Dans le 1er cas : $\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{100}\mathrm{P}\left(\frac{4\mathrm{F}}{3\mathrm{F}}\right)\right] = 0,185$

— 2e cas . . . . $< 0,1055$

— 3e cas . . . . $< 0,120$

— 4e cas . . . . $= 0,0625$

Il résulte de ce qui précède qu'il convient de corriger le tir quand un des cas précédents se présente.

CHAPITRE III

Surface de probabilité.

---

§ 1.

Imaginons un plan quelconque (que nous supposerons, pour fixer les idées, être le plan d'horizon de la pièce) sur lequel une bouche à feu a tiré un très grand nombre de coups, dans les mêmes conditions. Divisons ce plan par deux séries de parallèles perpendiculaires l'une à l'autre, divisant tout le plan en rectangles. Dans chacun de ces rectangles, se trouve un certain nombre de projectiles. Sur chacun des rectangles, construisons un parallélipipède de hauteur telle que son volume soit numériquement égal au nombre des projectiles tombés sur la base. Les sommets des parallélipipèdes convergent vers une surface continue, à mesure que l'on diminue les dimensions des rectangles.

Cette surface offre l'image de la rose. Le sommet couvre le centre de tir et correspond au petit rectangle qui contient le plus grand nombre de projectiles. A partir du sommet, les hauteurs diminuent tout autour d'abord lentement, puis plus rapidement, d'une façon variable suivant les directions. La probabilité d'atteindre diminue de même graduellement et d'une façon variable à mesure qu'augmente la distance au centre de tir. Les points situés à la même hauteur déterminent les courbes d'égale probabilité. Aux lignes de pente maximum, d'égale pente, en un mot à toutes les modalités de la surface correspondent des phénomènes observables de probabilité.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface et supposons les deux premiers axes parallèles aux lignes qui déterminent les directions des côtés des rectangles. Le nombre

des projectiles tombés dans le rectangle $dxdy$ adjacent au point xy est $zdxdy$, le nombre total de ces mêmes projectiles est $N = \int\int zdxdy$, et la probabilité de toucher un rectangle infiniment petit est :

$$(1) \qquad \frac{z\,dx\,dy}{N}$$

Pour obtenir l'ordonnée z correspondant à chaque point du plan, il faudrait connaître la rose complète, c'est-à-dire avoir tiré un nombre infini de coups. On supplée à cette impossibilité en s'appuyant sur les deux hypothèses suivantes :

1° La probabilité de toucher un point est fonction de ses déviations par rapport au centre absolu, mesurées sur deux axes quelconques.

2° Après avoir tiré un certain nombre de coups, le centre relatif de tir est de tous les points du plan celui qui a le maximum de probabilité pour coïncider avec le centre absolu.

Ces hypothèses nous permettent d'obtenir la valeur la plus probable de z.

Soient $x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n$ les coordonnées d'une rose obtenue par un tir de n coups, et α, β les coordonnées du centre de tir C, déterminées par les équations :

$$(2) \qquad \Sigma(x - \alpha) = 0 \quad , \quad \Sigma(y - \beta) = 0.$$

La probabilité de mettre un coup dans le rectangle $dx_1 dy_1$, adjacent au point $x_1\, y_1$, est, d'après la première hypothèse,

$$(3) \qquad dx_1\, dy_1\, p(x_1 - \alpha,\, y_1 - \beta),$$

si C $(\alpha\beta)$ est le centre de tir absolu. Mais la probabilité que, le centre absolu étant C, un coup tombe en $dx_1 dy_1$ est la même qu'étant tombé un coup en $dx_1 dy_1$ le centre soit C ; par suite, l'expression (3) représente aussi la probabilité que le centre absolu soit C après avoir tiré le coup $(x_1\, y_1)$. Donc le produit de toutes les expressions analogues à l'expression (3) exprime la probabilité qu'après n coups, C soit le centre absolu. Mais cette probabilité, d'après la seconde hypothèse, est maximum ; donc ce produit doit être maximum ou, ce qui revient au même, doit être maximum le

produit des facteurs p, ou encore le logarithme de ce produit. En différentiant ce logarithme par rapport à α et β, on a :

$$\Sigma \frac{d \log p}{d\alpha} = 0 \quad , \quad \Sigma \frac{d \log p}{d\beta} = 0.$$

Mais ces équations doivent reproduire pour α et β les valeurs données par (2), donc elles sont équivalentes à (2).

Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir :

$$\frac{d \log p}{d\alpha} = 2L(x-\alpha) + 2M(y-\beta) \tag{4}$$

$$\frac{d \log p}{d\beta} = 2N(x-\alpha) + 2P(y-\beta) \tag{5}$$

L, M, N, P étant des constantes quelconques, dont deux, toutefois, M et N, doivent être égales, puisque la dérivée de (4) par rapport à β doit être égale à la dérivée de (5) par rapport à α.

Multiplions (4) par $d\alpha$, et (5) par $d\beta$, ajoutons et intégrons, il vient :

$$\log p - \log C = -L(x-\alpha)^2 - 2M(x-\alpha)(y-\beta) - P(y-\beta)^2$$

C représentant une quantité indépendante de x et de y, ainsi que de α et de β (1).

Transportons l'origine au centre C et changeons convenablement la direction des axes, le second membre peut alors se mettre sous la forme

$$-\frac{x^2}{2h^2} - \frac{y^2}{2k^2};$$

nous mettons le signe — parce que p doit diminuer au fur et à mesure de l'augmentation des déviations, représentées maintenant par x et y.

Nous avons donc :

$$p = Ce^{-\left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2}\right)}.$$

Quant à la constante C, nous remarquerons que $\int\int p\,dx\,dy$ étendu à tous les points du plan représente la probabilité de toucher un de

(1) En intégrant par rapport à α et β, la constante arbitraire pourrait dépendre de x et y ; mais cette dépendance est exclue par la première hypothèse.

ses points, et comme un point quelconque du plan est certainement atteint, elle devient égale à 1. Donc

(6) $$C = \frac{1}{2\pi hk}.$$

En égalant finalement les valeurs (3) et (1), on a :

(7) $$z = Np = \frac{N}{2\pi kh} e^{-\left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{y^2}{2k^2}\right)} \text{ (1)}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer les constantes h et k, et la direction des axes.

§ 2.

Axes de la rose.

Au moyen de l'équation (7), on peut déterminer la probabilité $pdxdy$ de mettre un coup dans le rectangle $dxdy$, c'est-à-dire qu'il se vérifie une déviation x comptée de l'axe des y, et une déviation y comptée de l'axe des x. Elle peut se décomposer en deux facteurs :

(8) $$\frac{e^{-\frac{x^2}{2h^2}}}{h\sqrt{2\pi}} dx \quad , \quad \frac{e^{-\frac{y^2}{2k^2}}}{k\sqrt{2\pi}}$$

qui représentent précisément (chap. I, § 3) la probabilité d'une déviation x ou y. De là résulte le théorème suivant :

Quel que soit le nombre et l'influence des causes déviatrices, on peut toujours les ramener à deux causes indépendantes l'une de l'autre, qui tendent à produire des déviations dans deux sens perpendiculaires (2).

Ces deux directions sont celles des *axes de la rose*. Pour trouver ces axes, remarquons qu'en étendant les intégrales à tous les points du plan, on a :

$$\iint x^2 z\, dx\, dy = Nh^2 \qquad \iint y^2 z\, dx dy = Nk^2 \qquad \iint xyz\, dx\, dy = 0.$$

---

(1) La démonstration que nous venons de présenter ne diffère pas substantiellement de celle relative aux erreurs dans un seul sens, que Gauss a tirée du principe de la moyenne arithmétique. Mais c'est M. Scholz, professeur à l'école polytechnique de Delft, qui l'a étendue aux erreurs en deux sens et en trois sens.

(2) Siacci, *Sur les axes de groupements* (*Revue d'artillerie*), 1883).

Cette dernière équation signifie que les axes de la rose sont les axes principaux d'inertie, en supposant chaque point chargé d'une masse $= 1$; Nh^2 et Nk^2 représentant donc les moments d'inertie principaux, l'un d'eux est maximum et l'autre minimum.

Or, dans le cas présent, les moments d'inertie représentent les sommes des carrés des déviations ; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Les axes les plus probables de la rose sont ceux pour lesquels les sommes des carrés des déviations sont maximum et minimum.

Ceci posé, soient x_1, $x_2 \ldots x_n$, y_1, $y_2 \ldots y_n$ les coordonnées des points touchés rapportés de nouveau à deux axes et à une origine quelconque.

Le centre de tir étant déterminé, les inclinaisons γ de l'un ou de l'autre axe principal par rapport à l'axe des x sont donnés par la formule

$$(9) \qquad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\Sigma(x-\alpha)(y-b)}{\Sigma(x-\alpha)^2 - \Sigma(y-\beta)^2} = \frac{2[\Sigma xy - n\alpha\beta]}{\Sigma x^2 - \Sigma y^2 - n(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

Les deux valeurs de γ qui satisfont à cette équation diffèrent entre elles de $\frac{\pi}{2}$. Au moyen de ces deux valeurs de γ l'expression

$$(10) \qquad \frac{\cos^2\gamma(\Sigma y^2 - n\beta^2) - \sin^2\gamma(\Sigma x^2 - n\alpha^2)}{n\cos 2\gamma}$$

donne h^2 et k^2.

Pour démontrer les formules (9) et (10), nous remarquerons que la somme des carrés des distances de tous les points de la rose à une droite passant par le centre et inclinée de l'angle γ sur l'axe des x est :

$$\begin{aligned} S &= \Sigma[(x-\alpha)\sin\gamma - (y-\beta)\cos\gamma]^2 \\ (11) \quad &= \sin^2\gamma\,\Sigma(x-\alpha)^2 + \cos^2\gamma\,\Sigma(y-\beta)^2 - \sin 2\gamma\,\Sigma(x-\alpha)(y-\beta). \end{aligned}$$

Cette somme est maximum ou minimum, quand on a :

$$(12) \quad \frac{dS}{d\gamma} = \sin 2\gamma\,[\Sigma(x-\alpha)^2 - \Sigma(y-\beta)^2] - 2\cos 2\gamma\,\Sigma(x-\alpha)(y-\beta) = 0.$$

On en déduit l'équation (9), et en éliminant entre les équations (11) et (12) le terme $\Sigma(x-\alpha(y)-\beta)$, on trouve l'expression (10).

Si le numérateur de l'équation (9) est nul, les axes principaux sont parallèles aux axes coordonnés, si le numérateur et le dénominateur sont nuls, les axes principaux sont en nombre infini.

Bien peu d'expériences ont été faites relativement à la détermination des axes.

On admet que, pour les roses placées dans des plans verticaux, un des axes principaux est vertical, et que pour les roses horizontales, l'un des axes coïncide avec la projection de la ligne de site. Cette hypothèse peut être admise sans aucun doute pour les projectiles sphériques, où les causes de déviations sont symétriques par rapport au plan de tir, mais pour les projectiles oblongs, il serait nécessaire que l'expérience vienne les confirmer.

Quelques expériences ont toutefois été dirigées dans ce sens, et ont, dans une certaine limite, donné raison aux hypothèses.

§ 3.

Courbes d'égale probabilité.

La quantité p, qui, multipliée par $dxdy$, fournit la probabilité de frapper le rectangle $dxdy$, nous l'appellerons dorénavant coefficient de probabilité. Si nous coupons la surface de probabilité à une certaine hauteur, l'intersection déterminera sur la rose une certaine courbe dont tous les points auront le même coefficient de probabilité. Cette courbe appelée courbe d'égale probabilité est une ellipse dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=2\log\frac{1}{2p\pi hk}$$

p étant une quantité constante. Si nous représentons par $\frac{S}{\pi hk}$ le second membre de cette équation, les axes de l'ellipse sont :

$$2h\sqrt{\frac{S}{\pi hk}} \qquad 2k\sqrt{\frac{S}{\pi hk}}$$

et sa surface est S, c'est-à-dire :

$$S=2\pi hk\log\frac{1}{2\pi phk}.$$

Considérons une ellipse semblable infiniment voisine, d'aire $S + dS$; comme dans l'anneau elliptique dS, le coefficient de probabilité diffère infiniment peu de p, la probabilité de toucher dS est :

$$p\,dS = \frac{e^{-\frac{S}{2\pi hk}}}{2\pi hk}\,dS.$$

En intégrant depuis $S = 0$, on a :

(13) $$P = 1 - e^{-\frac{S}{2\pi hk}} = 1 - 2\pi phk$$

d'où

(14) $$S = 2\pi hk \log \frac{1}{1-P} \quad , \quad p = \frac{1-P}{2\pi hk}.$$

Au moyen de ces équations, étant donné le coefficient de probabilité du contour, ou bien l'aire d'une ellipse, on peut déterminer la probabilité de toucher l'ellipse, et inversement :

Si $P = \frac{1}{2}$, on a :

$$S = 2\pi hk \log 2 \quad , \quad p = \frac{1}{4\pi hk}.$$

Une ellipse d'égale probabilité contient plus de coups qu'aucune autre courbe d'égale surface.

En effet, si de l'aire de cette ellipse nous retranchons une petite surface en un point quelconque et que nous la transportions en un autre point contigu à la courbe mais en dehors, l'aire totale reste la même, mais le nombre des coups reçus par cette petite surface placée au second point est moindre que dans le premier cas.

Si donc on pose $S = \pi R^2$, R est bien le rayon du cercle équivalent à S quant à l'aire, mais non pas quant à la probabilité. La formule

$$R^2 = 2hk \log 2$$

donne donc le rayon d'un cercle qui renferme moins de la moitié des coups, et d'autant moins que la différence entre h et k est plus grande. Didion a proposé de poser $R^2 = 2(h^2 + k^2)\log 2$. Le cercle ainsi déterminé est moyen entre le cercle inscrit et le cercle circonscrit à l'ellipse, qui contient la moitié des coups, mais il n'est

pas démontré que ce nouveau cercle contiendrait un nombre de coups plus rapproché de la moitié.

Le coefficient de probabilité correspondant au centre de tir est appelé par Didion *le coefficient de précision*, puisqu'il mesure, en quelque sorte, la concentration des coups. Sa valeur est $\frac{1}{2\pi hk}$. Par conséquent, *le coefficient de probabilité du contour de l'ellipse qui reçoit la moitié des coups est la moitié du coefficient de précision.*

En multipliant le coefficient de précision par une surface infiniment petite, le produit représente la probabilité de toucher cette surface en la supposant placée au centre, et en multipliant cette probabilité par cent, on a le pour-cent. Par suite, *le coefficient de précision représente le nombre de coups (sur cent) qui battent un but d'un décimètre carré en supposant le tir centré.*

Pour se servir d'un terme unique de comparaison au point de vue de la précision que peuvent présenter deux bouches à feu, plusieurs auteurs ont proposé le rayon du cercle dans lequel tombe la moitié des coups; Didion a proposé le coefficient de précision. D'un côté, l'évaluation de ce rayon n'est possible que par approximation, et, d'autre part, le coefficient de précision ne présente rien à l'imagination, car il est trop difficile de se représenter un but d'un décimètre carré.

Il semblerait plus naturel de choisir pour terme de comparaison l'une ou l'autre des quantités suivantes :

Ou le maximum de coups sur cent que reçoit un but de un mètre carré,

Ou l'aire minimum qui reçoit la moitié des coups.

La première aurait pour expression $100\left(1 - e^{-\frac{1}{\pi^2 HK}}\right)$, et la seconde serait donnée par l'équation $2\pi hk \log 2 = 6,84\text{HK} = 2,39\,\text{EF}$, et aurait, par rapport au plan horizontal, une signification analogue à celles de E et de F qui représentent les dimensions minima de la bande, renfermant la moitié des coups.

SECTION IV

EXÉCUTION DU TIR

CHAPITRE I

L'objet du tir est de battre un but, de le battre avec la plus grande puissance de choc et avec le plus grand nombre de projectiles. Pour arriver à ce résultat, il y a lieu de déterminer deux choses, la charge et l'angle de projection ; et l'une d'elles, si aucune autre condition n'est imposée, peut être choisie à volonté dans des limites très étendues. On pourrait choisir une charge et déterminer l'angle correspondant, ou inversement se donner l'angle et déterminer la charge. Mais la force de choc et l'inclinaison sous laquelle il se produit changent avec la charge ou l'angle choisi ; il en est de même du nombre de projectiles mis dans le but. Par conséquent, parmi toutes les charges et tous les angles de projection possibles, il faut déterminer la charge et l'angle qui donnent le tir le plus efficace, en tenant compte de la situation, de la grandeur et de la nature du but à battre. De là découlent les *espèces de tir*.

On distingue trois espèces de tir : *tir de plein fouet, tir en bombe* et *tir indirect*.

Le tir de plein fouet est caractérisé par la tension maximum de la trajectoire. Dans le tir de plein fouet, on emploie par conséquent la charge maximum (charge de combat), qui est compatible avec la résistance de la bouche à feu. On emploie le tir de plein fouet contre des buts verticaux, généralement découverts (fronts de

troupe, parapets, murs de revêtement, flancs de vaisseaux, embrasures, etc.).

Le tir en bombe est surtout caractérisé par la grande élévation de la trajectoire au-dessus du sol. On emploie donc pour ce genre de tir les charges les plus faibles compatibles avec la distance, et avec l'angle maximum permis par l'affût. On emploie ce tir contre des buts horizontaux (voûtes d'édifice, ponts de vaisseaux, etc.) ou des troupes renfermées dans une enceinte fortifiée; dans ce dernier cas, les charges employées ne sont pas toujours les charges minima, mais elles doivent être suffisamment petites pour que le projectile éclate à fleur de terre.

Le tir indirect est caractérisé par la condition que le projectile tiré passe par un point donné, sous une inclinaison donnée. Dans ce genre de tir, on emploie des charges variables dépendant de la distance du but à atteindre et de l'angle sous lequel, relativement à sa position, il doit être atteint. Le tir indirect n'est, par le fait, qu'une dérivation du tir de plein fouet, car l'un et l'autre agissent contre des buts verticaux. Le tir effectué avec charge de combat prend également le nom de tir indirect quand un obstacle empêche la vue du but, sans gêner le passage du projectile.

Telles sont les principales espèces de tir en ce qui regarde spécialement les caractères géométriques de la trajectoire. Quant aux projectiles, le tir prend plusieurs noms : tir à boulets pleins, tir à obus, tir à shrapnels, tir à mitraille. Dans le tir de plein fouet, on emploie toutes sortes de projectiles. Dans le tir en bombe, ou indirect, on se sert uniquement d'obus. Relativement au but à battre, le tir prend les noms de tir de bataille, tir à démonter, tir en brèche, tir d'enfilade, tir d'effondrement, tir d'éclatement.

Les tables de tir en usage sont de trois sortes : les tables de tir de plein fouet, de tir indirect ou de tir en bombe. Celles qui se rapportent au shrapnel ou à la boîte à mitraille prennent le nom des projectiles mêmes.

§ 2.

Principes du tir.

I. — Quand la charge est fixe, les angles d'élévation, de direction et d'arrivée sont sensiblement indépendants de la hauteur du point à atteindre au-dessus de l'horizon de la pièce.

II. — Quand l'angle de projection est fixe, l'abaissement au-dessous de la ligne de projection à une distance quelconque augmente à peu près en raison inverse de la charge.

Ces deux principes sont le complément nécessaire des tables de tir.

Le principe I ne peut s'appliquer qu'aux tirs sous de petits angles, c'est-à-dire au tir direct et indirect, dont les tables sont caractérisées par une charge unique pour toutes les distances. Le principe II s'applique aux tirs pour lesquels les tables sont caractérisées par un angle fixe pour toutes les distances, ou pour plusieurs distances qui se suivent, c'est-à-dire pour les tirs en bombe.

Charges fixes. — Du premier principe on tire la conséquence fondamentale du pointage, c'est-à-dire que si l'on cherche à atteindre un point donné et visible, il n'est pas nécessaire de se préoccuper de la hauteur de celui-ci, mais seulement de sa distance, l'angle d'élévation et de direction restant constant. Il en est par conséquent de même de la hausse et de la dérive, puisque ces quantités sont fonctions de l'élévation et de la direction.

Quand on veut avoir l'angle de tir, c'est-à-dire l'angle que doit faire l'axe de la pièce avec l'horizon pour toucher un but dont l'angle de site est ε, et à une distance horizontale pour laquelle la table de tir donne une élévation α, l'angle de tir est $\alpha + \varepsilon$. Si l'on veut obtenir l'angle de projection, on ajoute encore l'angle de relèvement ρ.

Il faut remarquer que l'angle ε peut indiquer indifféremment aussi bien une quantité positive qu'une quantité négative. L'angle ε est en effet négatif quand le but est au-dessous de l'horizon de la pièce. En passant de la notation algébrique à la notation numérique, la somme $\alpha + \varepsilon$ devient donc une différence dans le second

cas. La même réserve doit être faite pour l'angle ρ et pour la somme algébrique $\alpha + \varepsilon + \rho$, qui représente l'angle de projection φ.

Il est souvent nécessaire d'abriter les pièces derrière un obstacle naturel, qui les masque à la vue de l'ennemi, ou de tirer par-dessus ses propres troupes.

Il faut donc, avant de commencer le feu, s'assurer que l'obstacle n'empêche pas le passage des projectiles. Et pour cela, on procède de la manière suivante :

Après avoir donné à l'axe de la pièce l'inclinaison convenable pour atteindre le but, on détermine avant de tirer une hausse égale à celle qui serait nécessaire pour toucher la crête de l'obstacle. Alors si, sans déplacer la pièce, la ligne de mire correspondant à cette hausse rencontre l'obstacle, il est évident, d'après le principe énoncé, que le projectile doit le rencontrer au même point. Si la ligne de mire passe au-dessus de l'obstacle, il en sera de même du projectile. Dans le premier cas, il faudra éloigner les pièces de l'obstacle, ou si les pièces sont des pièces de siège, et à poste fixe, il faudra diminuer la charge ; la diminution de la charge s'effectuera d'après le même principe, comme il suit :

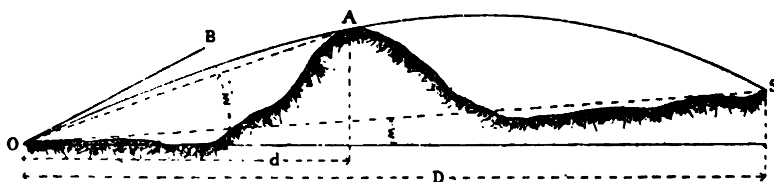


Fig. 37.

Soit A (fig. 37) la crête de l'obstacle placé à la distance *d*, et S le but, situé à la distance D, par lequel doit passer la trajectoire moyenne. Menons les deux lignes de site OA et OS, AOS est la différence des angles de site. Soit OB l'axe de la pièce, BOA est l'angle d'élévation relatif à A, et BOS l'angle d'élévation relatif à S ; la différence des deux angles est donc AOS. Donc la charge qui, aux deux distances D et *d*, donne les angles d'élévation dont la différence serait égale à celle des angles de site relatifs à l'obstacle et au but, donne une trajectoire qui rase l'obstacle.

Il faut donc chercher dans les tables de tir la charge qui donne à ces deux distances des angles d'élévation dont la différence est légèrement supérieure à la différence des angles de site.

D'après le principe I, et en se servant des tables de tir, on peut calculer les projections de la trajectoire moyenne sur le plan de tir, et sur le plan horizontal.

Remarquons, avant tout, que, bien que la trajectoire des projectiles oblongs soit complètement en dehors du plan de tir, sa projection sur ce plan en diffère très peu. Par suite, les distances des divers points à la bouche à feu, et les inclinaisons, peuvent être considérées comme égales à leurs projections sur ce même plan.

Cela posé, le plan de la figure 38 étant le plan de tir, soit x la distance horizontale OP (abscisse) d'un point M à toucher, et y sa hauteur PM (ordonnée). Soit X la portée OC, que l'on obtiendrait, si le projectile ne s'était pas arrêté en M, et α_X l'élévation COA, correspondant à cette portée.

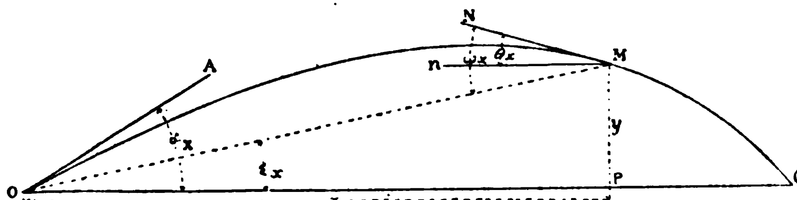


Fig. 38.

Appelons ε_x l'angle de site POM, l'élévation MOA nécessaire pour toucher le point M est par définition :

$$\alpha_X - \varepsilon_x$$

En se basant sur le principe I, l'élévation est indépendante de la hauteur du point M, elle est donc égale à celle qui serait nécessaire pour toucher le point P, ou pour obtenir une portée OP $= x$. Cette élévation se trouve dans les tables de tir, et en la désignant par α_x, on a

$$\alpha_X - \varepsilon_x = \alpha_x$$

d'où

$$\varepsilon_x = \alpha_X - \alpha_x$$

et comme,

$$\operatorname{tg} \varepsilon_x = \frac{y}{x}$$

on a

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha_X - \alpha_x)$$

Cette dernière équation permet donc de calculer les hauteurs de tous les points d'une trajectoire dont la portée est X, ou dont l'angle de projection est $\alpha_X + \rho$.

Le calcul s'effectue encore plus rapidement, si, au lieu de se servir des élévations, on emploie les hausses.

On peut, en effet, remarquer que les angles α_X et α_x représentent en général de petites quantités, et remplacer alors $tg(\alpha_X - \alpha_x)$ par l'expression

$$\operatorname{tg}\alpha_X - \operatorname{tg}\alpha_x$$

Désignons par H_X et H_x les hausses correspondant aux distances X et x, on a :

$$\operatorname{tg}\alpha_x = \frac{H_x}{L} \qquad \operatorname{tg}\alpha_X = \frac{H_X}{L}$$

et par suite

$$y = \frac{x}{L}(H_X - H_x)$$

Dans nos canons de campagnes $L = 1$, et dans tous les cas, la valeur de $\frac{x}{L}$ est donnée par les tables de tir, dans la colonne des variations verticales et latérales.

En se basant sur le premier principe, on trouve que l'angle fait par la tangente avec la ligne de site, c'est-à-dire l'angle d'arrivée, est égale à l'angle de chute correspondant à la portée $OP = x$. Si donc, on désigne par ω_x l'angle de chute donné par les tables de tir et correspondant à la distance x, on a :

$$OMN = \omega_x$$

A partir du point M, menons la droite horizontale Mn et désignons par θ_x l'inclinaison de la trajectoire en M, nous avons :

$$\theta_x + \varepsilon_x = \omega_x$$

et par suite

$$\theta_x = \omega_x - \varepsilon_x$$

Mais $\varepsilon_x = \alpha_X - \alpha_x$, donc

$$\theta_x = \omega_x + \alpha_x - \alpha_X.$$

Cette équation permet de calculer les inclinaisons de la trajectoire à toutes les distances.

Trajectoire de l'obus de 7 BR, lancé par le canon de campagne à la distance de 3000 m.

ABSCISSES x.	HAUSSES H_x.	DIFFÉRENCES $H_{3000} - H_x$.	VARIATION $\frac{x}{L}$.	ORDONNÉES $\frac{x}{L}(H_{3000} - H_x)$.	ÉLÉVATIONS α_x.	ANGLES de chute ω_x.	INCLINAISONS $\alpha_x + \omega_x - \alpha_{3000}$.
500	12	144	0,5	72	0°,7	1°,0	7°,2
1 000	33	123	1,0	123	1°,9	2°,5	4°,5
1 500	57	99	1,5	148,5	3°,3	4°,5	1°,1
2 000	86	70	2,0	140	4°,9	6°,9	2°,9
2 500	119	37	2,5	92,5	6°,8	10°,0	7°,9
3 000	156	0	3,0	0	8°,9	13°,5	13°,5

En considérant la dernière colonne du tableau et en tenant compte des signes, on voit que les trois premières inclinaisons sont de signe contraire aux trois dernières et cela parce que les premières sont sur la branche ascendante, et les dernières sur la branche descendante.

Au sommet la tangente à la trajectoire est horizontale, et par suite l'inclinaison nulle.

Désignons l'abscisse du sommet par x_0, nous avons :

$$\omega_{x_0} + \alpha_{x_0} - \alpha_X = 0$$

ou

$$\alpha_{x_0} + \omega_{x_0} = \alpha_X$$

L'abscisse du sommet correspondant à une portée connue est donc égale à la distance pour laquelle la table de tir donne un angle de chute et un angle d'élévation dont la somme est égale à l'angle d'élévation qui correspond à la portée.

Connaissant l'abscisse du sommet, la hauteur du tir, que nous désignons par Y, est donnée par l'équation

$$Y = x_0 \operatorname{tg}(\alpha_X - \alpha_x)$$

qui se réduit à

$$Y = x_0 \operatorname{tg} \omega_{x_0}.$$

Par conséquent, la hauteur de tir s'obtient en multipliant l'abscisse du sommet par la tangente de l'angle de chute relatif à cette abscisse.

Dans le cas de la trajectoire calculée ci-dessus, on trouverait que l'abscisse du sommet est de 1650 *m*, que l'angle d'élévation et l'angle de

chute en ce point sont (voir la table de tir) 3°45′ et 5°10′, dont la somme est 8°55′, c'est-à-dire l'angle d'élévation qui correspond à la portée. L'ordonnée du sommet ou la flèche est donnée par l'équation

$$1650 \times tg\,5°10' = 1650 \times 0{,}0905 = 149\ m.$$

La formule

$$y = \frac{x}{L}(H_X - H_x)$$

trouve une application immédiate au calcul de la hauteur d'éclatement des shrapnels. La hauteur d'éclatement représente, en effet, l'ordonnée de la trajectoire à la distance X — I (en appelant X la distance du but et I l'intervalle d'éclatement). Cette hauteur peut donc se calculer au moyen de l'équation

$$\frac{X - I}{L}(H_X - H_{X-I})$$

La projection horizontale de la trajectoire se détermine au moyen des dérives, c'est-à-dire par l'équation

$$D_x = \frac{x}{L} S_x \cos\alpha_x$$

D_x représentant la dérivation, c'est-à-dire la distance au plan de tir d'un point quelconque de la trajectoire d'abscisse x. Dans cette équation, pour le tir de plein fouet, et pour le tir indirect, on peut poser $\cos\alpha_x = 1$.

Angles fixes. — Quand le tir doit se faire sous de très grands angles et que le but n'est pas sur l'horizon de la pièce, pour donner la direction au plan de tir il n'est pas nécessaire de tenir compte de la hauteur du but, mais il faut en tenir compte dans la charge plutôt encore que dans l'angle d'élévation, puisque le tir courbe est presque insensible aux variations de celui-ci.

Les variations de charge s'obtiennent au moyen du principe II.

Supposons qu'il s'agisse de toucher sous l'angle de projection $PAE = \varphi$, un point M (fig. 39) placé à la distance $AP = x$ et à la hauteur $PM = y$, au-dessus de l'horizon.

L'abaissement de P au-dessous de la ligne de projection AE est :

$$PE = x\,tg\varphi$$

et à cet abaissement correspond une charge μ_x donnée par la table de tir pour la distance x. Mais comme l'on doit toucher le point M

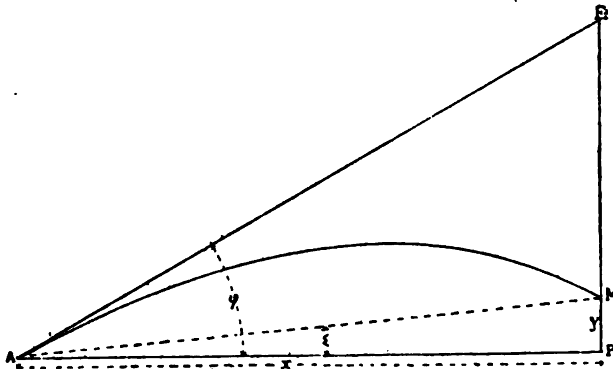


Fig. 89.

placé à la distance x, la charge doit être telle qu'elle réduise l'abaissement à

$$EM = x \operatorname{tg} \varphi - y$$

En désignant par μ la nouvelle charge, nous avons, d'après le second principe,

$$\frac{x \operatorname{tg} \varphi - y}{x \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\mu_x}{\mu}$$

La nouvelle charge est donc :

$$\mu = \mu_x \frac{x \operatorname{tg} \varphi}{x \operatorname{tg} \varphi - y} = \mu_x + \mu_x \frac{y}{x \operatorname{tg} \varphi - y}$$

L'augmentation de la charge est donc :

$$\mu_x \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varepsilon}$$

ou encore

$$\mu_x \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi},$$

en négligeant $\operatorname{tg} \varepsilon$ par rapport à $\operatorname{tg} \varphi$.

CHAPITRE II

POINTAGE

Pointer une bouche à feu, c'est la disposer de façon qu'en faisant feu la trajectoire moyenne passe par le but.

Viser un point avec une pièce, c'est disposer la pièce de façon que la ligne de mire correspondant à une hausse et à une dérive données passe par le point. Le point visé peut ne pas être le but.

Donner la direction, c'est donner au plan de tir l'inclinaison nécessaire par rapport à la ligne de site; *donner l'élévation,* c'est donner à l'axe de la pièce l'inclinaison convenable sur l'horizon.

On donne la déviation en déplaçant latéralement la crosse de l'affût.

On donne l'élévation en élevant ou en abaissant la culasse de la pièce.

§ 1.

Pointage au premier coup.

Pointage normal. — Connaissant la distance du but, les tables de tir fournissent la hausse et la dérive, la pièce est donc pointée quand la ligne de mire passe par le but. Quand ce dernier est visible, le pointage se fait donc au moyen d'une simple visée.

Ce mode de pointage, qui est le plus simple et le plus exact, s'appelle pointage normal. Il est bon, toutefois, de faire connaître d'autres méthodes, auxquelles il est nécessaire de recourir quand, pour une raison quelconque, le pointage normal est impossible.

Avec le quart de cercle. — On dirige la ligne de mire naturelle sur le but avec la dérive, on place le quart de cercle sur la génératrice supérieure de la culasse (graduation à gauche) et l'on centre la bulle d'air au moyen de la vis micrométrique, on lit l'angle indiqué par le quart de cercle. On ajoute l'angle d'élévation donné par la table de tir, on place de nouveau le quart de cercle sur la pièce, et l'on centre la bulle au moyen de la vis de pointage.

Il est facile de se rendre compte de ce qui précède; en effet, en dirigeant vers le but la ligne de mire naturelle avec dérive, la bouche à feu est placée dans la direction voulue, mais son axe fait avec la ligne de mire, que pratiquement on peut considérer comme coïncidant avec la ligne de site, un angle m_0 (angle de mire naturel); son élévation est par suite m_0, tandis qu'elle devrait être α (angle d'élévation). Il est donc nécessaire de faire tourner la pièce sur son axe de l'angle

$$\alpha - m_0$$

et cet angle est celui qui est donné dans chaque cas par les tables de tir.

Il peut arriver que la ligne de mire naturelle étant dirigée vers le but, on ne puisse avec la graduation placée à gauche centrer la bulle. Dans ce cas, on tourne la graduation à droite et, après avoir centré la bulle avec la vis micrométrique, l'angle indiqué par le quart de cercle représente l'inclinaison de l'axe de la pièce au-dessous de l'horizon.

Cette inclinaison doit être considérée comme négative, c'est-à-dire, qu'il faut la retrancher de l'angle d'élévation donné par les tables de tir, et sur le quart de cercle on marque alors la différence au lieu de la somme.

Relativement au second placement du quart de cercle sur la pièce, on distingue deux cas :

a) Si l'élévation indiquée par la table de tir est supérieure à l'inclinaison de la pièce lue sur le quart de cercle, il faut lire la graduation quand le cadran est tourné à gauche.

b) Si l'élévation est inférieure à l'inclinaison de la pièce, la graduation doit être lue quand le quart de cercle est tourné à droite.

Ce dernier cas doit être considéré comme exceptionnel, puisque le quart de cercle ne doit être employé que pour de grandes élévations; et c'est pour ce motif qu'on ne tient pas compte du cas où $\alpha - m_0$ est négatif.

Par la règle avec curseur. — On dirige la ligne de mire naturelle avec sa dérive vers le but, puis se servant de la règle et du curseur, on abaisse un point de la culasse, par exemple l'extrémité inférieure du canal de la hausse, d'une quantité

$$q = \frac{d}{L} h$$

h étant la hausse (donnée par les tables de tir, réduite ou non), d la distance du point à l'axe des tourillons, L la distance des points de mire. Si h est négatif, le point de la culasse ne doit pas être abaissé, mais au contraire soulevé d'une quantité que l'on calcule par la même formule.

Supposons la ligne de mire naturelle dirigée vers le but S (fig. 40), joignons ce point au centre des tourillons et menons POM parallèle à l'axe de la pièce. La droite OS à cause de la distance du but, peut être considérée comme parallèle à la ligne de site, ou à la ligne de mire naturelle ; par conséquent, l'angle SOM est égal à l'angle de mire naturel m_0 ; mais pour que la pièce soit pointée, il faut que son axe fasse avec la ligne de site l'angle α. Si $OP = d$, la distance du point P au prolongement de SO est $PQ = d \sin m_0$, qui deviendra, lorsque le pointage est effectué, $d \sin \alpha$. Par

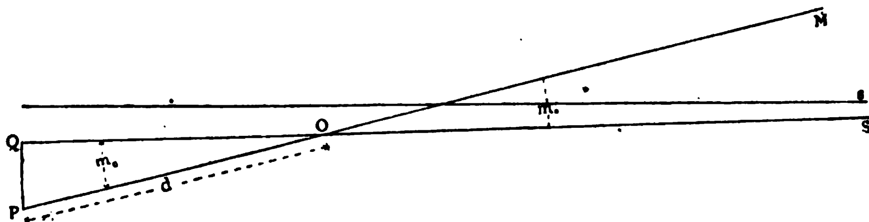


Fig. 40.

conséquent, le point P doit s'éloigner de la droite OQ de la quantité $d(\sin\alpha - \sin m_0)$; cet éloignement peut être considéré comme étant l'abaissement non seulement de P, mais de tout autre point de la culasse, placé à une distance d de l'axe des tourillons. La différence $\sin\alpha - \sin m_0$ peut être remplacée, à cause de la petitesse de α et de m_0, par $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} m_0$, ou par $\frac{H - H_0}{L}$, l'abaissement est donc :

$$\frac{d(H - H_0)}{L}$$

qui est identique à l'expression donnée plus haut, puisque $H - H_0$ représente précisément la hausse (réduite ou non) donnée dans la table de tir.

Avec la vis de pointage. — Connaissant le pas p de la vis, le nombre de tours pour obtenir un abaissement donné, ou un haussement de sa tête, est $\frac{q}{p}$: le nombre de tours correspondant à une hausse h est donc :

$$\frac{dh}{Lp}$$

d représentant dans ce cas la distance de la tête de vis à l'axe des tourillons. (Les tables de tir donnent le nombre de millimètres de hausse corresdant à $^1/_4$ ou $^1/_6$ de tour pour les diverses bouches à feu et affûts.)

Le pointage à la règle ou avec la vis de pointage est préférable au pointage avec le quart de cercle, quand la hausse est négative ou très petite.

Par fausse position. — Ce mode de pointage s'emploie quand la table donne une hausse réduite négative h. On dirige vers le but la ligne de mire naturelle avec dérive ; puis, maintenant en place la bouche à feu, on fait varier à volonté la hausse et la dérive et l'on fixe *le cran* de façon que la ligne de mire rencontre un point bien visible sur le terrain. Après avoir bien fixé ce point avec l'œil, on diminue la hausse d'une quantité h égale à la hausse réduite négative, et élevant alors la culasse, on dirige la nouvelle ligne de mire vers le point fixé.

Soient (fig. 41) S le but, M le guidon, et RMS la ligne de mire naturelle

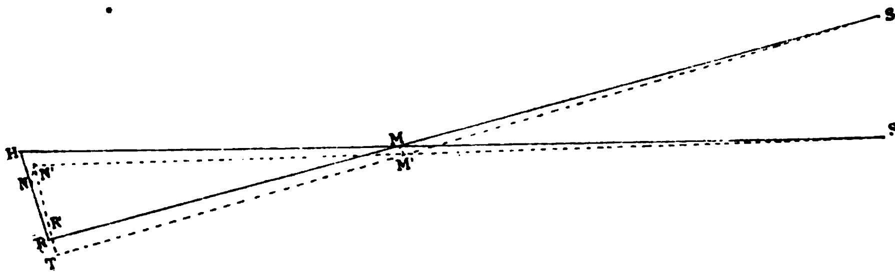


Fig. 41.

dans sa première position ; soit RH la hausse quelconque employée, S' le point où la ligne de mire rencontre le terrain ; soit finalement $NH = h$. Si l'on hausse la culasse jusqu'à ce que N et M se trouvent en N'M', c'est-à-dire en ligne droite avec S', R viendra en R', et l'on aura $RN = R'N'$. Si, par suite de ce mouvement de la pièce, le pointage, comme il faut le démontrer, est effectué en tirant SM' et en prolongeant jusqu'au plan de hausse en T, on doit avoir $R'T = h$, ce qui a lieu.

En effet, les deux triangles MRH, M'TN' peuvent être considérés comme égaux, puisqu'ils sont sensiblement rectangles en R et T, MR est à peu près égal à N'T, et les côtés adjacents aux angles en M et M' peuvent être considérés comme parallèles deux à deux. On a donc : $N'R' + R'T = NR + NH$, et comme $N'R' = NR$, on aura aussi $R'T = NH = h$.

En haussant le guidon. — Ce mode de pointage peut être employé aussi quand la table de tir donne une hausse réduite négative h. On fixe au guidon au moyen de cire une petite règle, qui dépasse ce dernier d'une quantité égale à h, et la pièce est pointée quand, en dirigeant vers le but la ligne de mire, cette dernière passe par le sommet de la règle et de la hausse mise à fond, avec la dérive de la table.

En visant un point du but différent du point à atteindre. — Ce mode de pointage peut convenir pour les petites distances lorsque le but est vertical, et en particulier quand la table de tir donne une hausse négative. Dans ce cas, on doit viser avec la ligne de mire naturelle ayant sa dérive au-dessous

du point à atteindre d'une quantité égale au produit de la hausse des tables par la *variation verticale correspondant à un millimètre de hausse*.

En effet, si on avait visé directement le point à atteindre, on aurait touché plus haut que ce point d'une quantité égale à cette variation.

En général, avec une hausse quelconque H′ et une dérive S′, on peut trouver le point sur lequel en visant avec la ligne de mire naturelle, la bouche à feu se trouve pointée. Soient H et S la hausse et la dérive de la table, le point visé doit être distant verticalement et horizontalement du point à atteindre des quantités :

$$\frac{X}{L}(H - H') \quad , \quad \frac{X}{L}(S - S')$$

et il est en dessus ou en dessous, suivant que H est plus grand ou plus petit que H′, et il est du côté de la dérivation ou du côté opposé, suivant que S′ est plus grand ou plus petit que S.

Quand le but n'est pas visible de la batterie. — Il faut alors prendre quelques dispositions préparatoires :

1° Déterminer l'angle de site et fixer le plan de direction (p. 275-277) ;

2° Fixer dans le plan de direction deux jalons, l'un à une distance double de celle de l'autre au guidon (la plus grande de ces distances doit être au moins de 20 *m*).

On donne ensuite la direction et l'élévation.

Pour donner la direction, on dirige la ligne de mire avec sa dérive (hausse quelconque) vers le jalon le plus éloigné, puis on déplace le cran de mire (la pièce restant fixe), et l'on vise le jalon le plus rapproché ; enfin on déplace la crosse de l'affût, et l'on dirige la ligne de mire vers le jalon le plus éloigné [1].

Si la longueur de la planchette de mire ne permet pas un déplacement suffisant du cran de mire pour porter la ligne de mire du jalon éloigné sur le jalon rapproché, cela indique que le plan de direction passe en dehors de la pièce ou rencontre l'essieu de l'affût à une distance trop grande du guidon, ou la rencontre à gauche plutôt qu'à droite de ce guidon, et *vice versa*. On remédie facilement à ces inconvénients par un déplacement grossier de la pièce à droite ou à gauche, suivant les cas.

[1] La méthode *des deux jalons*, qui a remplacé la vieille méthode *du fil à plomb*, a été proposée par l'auteur en 1880. (*Giornale d'Artiglieria e Genio, Parte 2ª*, 1880.)

Si le terrain placé en avant ne permet pas le placement des jalons, on place ceux-ci en arrière, toujours dans le plan de direction, le second étant à une distance double de celle qui sépare le premier du guidon.

Le pointeur se place près du guidon tourné du côté de la crosse et procède comme il a été indiqué pour le cas des deux jalons placés devant la pièce, en commençant par diriger la ligne de mire vers le jalon le plus éloigné du guidon.

Soient (fig. 42) A et B les deux jalons placés sur le plan de direction et M le guidon. Le triangle ABM est isoscèle, puisque AB = AM, et par suite, l'angle B est égal à l'angle M. Or, si avec la dérive de la table on dirige la

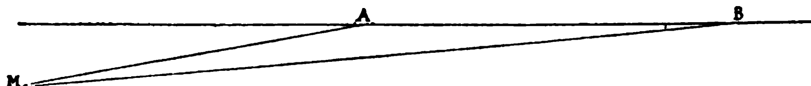


Fig. 42.

ligne de mire vers B, son prolongement ne rencontre pas le but, puisqu'elle fait un angle avec le plan de direction, angle égal à ABM, ou à AMB.

Il faut donc, pour avoir la direction exacte, faire tourner la pièce horizontalement de l'angle ABM, ce qui se fait en cherchant (la pièce étant fixe) une ligne de mire passant par A, et en la déplaçant ensuite avec la pièce, de MA en MB.

La règle se démontre de la même manière quand les deux jalons sont placés derrière la pièce.

Pour donner l'élévation : 1° fixer sur le quart du cercle un angle égal à la somme des angles de site et d'élévation (si la table donne l'élévation réduite, y ajouter l'angle de mire naturel) ; 2° placer le quart de cercle sur la pièce et centrer la bulle au moyen de la vis de pointage.

De cette façon, l'axe de la pièce faisant avec l'horizon un angle égal à la somme de l'angle d'élévation et de l'angle de site, fait avec la ligne de site un angle égal à l'angle d'élévation.

Abréviations. — Il peut arriver que le pointeur, en s'éloignant de quelques pas en arrière de la pièce ou seulement en se haussant, aperçoive le but ; dans ce cas, on peut éviter d'établir le plan de direction et de planter des jalons. On donne la direction en plaçant le guidon et le cran de mire auquel on a donné la dérive (hausse

quelconque) dans un plan vertical déterminé par le but et un fil à plomb que tient le pointeur ; ce qui s'obtient par un simple déplacement de la crosse de l'affût. L'élévation se donne avec le quart de cercle, ainsi qu'il a été indiqué plus haut.

Quand la condition précédente ne se vérifie pas et qu'il faut opérer rapidement, on peut se passer de fixer un plan de direction et même de mesurer l'angle de site, si le tir n'est pas indirect. On fixe dans la direction présumée du but un jalon ou tout autre signal. On dirige sur lui la ligne de mire naturelle ayant sa dérive et on donne l'élévation avec le quart de cercle (en se passant de l'angle de site si le tir n'est pas indirect). Le premier coup sera certainement entaché d'erreur, mais servira à corriger le pointage pour les coups suivants. La correction latérale qui sera nécessaire au second coup sera en général supérieure à la dérive qui est disponible sur la planchette ; il faudra donc transporter le jalon, ou ce qui en tient lieu, d'une quantité égale au produit de la déviation observée par le rapport de la distance du jalon à la distance du but.

L'angle de site est en général un angle faible, dont il importe peu de se préoccuper, quand l'élévation est considérable ; aussi, on peut s'en passer dans le tir en bombe, et même dans le tir de plein fouet, quand les circonstances locales présentent des difficultés pour sa mesure (p. 277). C'est seulement dans le tir indirect que se présente la nécessité de mesurer l'angle de site, non pas pour le pointage, mais pour la détermination de la charge.

Exactitude relative de la hausse et du quart de cercle. — En ne considérant que les erreurs que l'on peut commettre dans la lecture de la hausse et du quart de cercle, l'avantage est évidemment tout entier à la hausse, car tandis qu'il est courant de commettre dans la lecture du quart de cercle une erreur de 1/10 de degré, il est presque impossible de commettre dans la lecture de la hausse une erreur de 1/2 millimètre, qui correspondrait à 3/100 de degré dans le cas peu favorable de $L = 1$ m.

Mais on doit aussi tenir compte de l'habileté nécessaire pour l'emploi des deux instruments.

L'emploi du quart de cercle demande peu d'habileté, tandis qu'à la hausse un pointeur peu habile peut commettre une erreur de 1 mm et plus, s'il ne fait pas passer le rayon visuel par le sommet

du guidon et par le fond du cran de mire. Toutefois, même dans ce cas, l'avantage reste à la hausse, surtout si l'on considère que le quart de cercle est, par la délicatesse même de sa construction, très sujet à se déranger.

Le quart de cercle s'emploie surtout dans le tir en bombe. Dans ce cas, le but est horizontal et la déviation longitudinale provenant de quelques dixièmes de degré est toujours faible ; cet inconvénient est généralement moindre que les inconvénients qui proviennent d'une longue hausse correspondant à une grande élévation.

Quand le but n'est pas visible, le quart de cercle est inévitable, quel que soit l'angle d'élévation, pour faire le pointage du premier coup.

§ 2.

Pointage pour les coups successifs.

(*Pointage indirect.*)

Il est évident que tous les coups peuvent être tirés comme le premier, en tenant compte, bien entendu, des déviations observées (chap. III).

Mais quand on veut effectuer un tir continu dans des conditions identiques, comme cela se présente toujours dans les tirs de siège, les opérations du pointage peuvent se poursuivre sans plus se préoccuper du but. Si, en effet, après avoir fait un premier pointage, on relie la pièce au moyen de conditions géométriques, avec un point du terrain (faux but), il est évident que, replaçant la bouche à feu de façon à satisfaire à ces conditions, cette position devra coïncider avec celle du pointage. En opérant ainsi, on gagne en exactitude et en rapidité. On peut en outre effectuer avec une grande facilité les corrections suggérées par l'observation des coups précédents.

On peut tolérer quelque erreur dans la direction et dans l'élévation au premier coup ; celui-ci sert seulement de base pour les coups suivants. Ces tirs successifs, si on les continue en suivant le premier mode de pointage, bien que corrigés, sont toutefois sujets

à d'autres inexactitudes, provenant de la difficulté de viser un but peu visible, ou de l'emploi des instruments adoptés, ou enfin de la précipitation qui entraîne naturellement le pointeur pour remplir ses fonctions au feu. Au contraire, dans le pointage avec le faux but, les opérations se réduisent toujours à mettre deux points reliés à la pièce en ligne droite avec un troisième point fixe sur le terrain, et ce troisième point, ou faux but, peut être placé dans les meilleures conditions pour être vu, et dans la situation plus compatible avec le service et la sécurité du pointeur.

Le pointage avec un faux but (pointage indirect) doit donc être toujours préféré au pointage direct, à moins que celui-ci ne soit imposé par la mobilité de l'ennemi.

Dans le tir de nuit, le pointage indirect est inévitable et il s'effectue avec la même justesse et la même rapidité que dans le jour.

La hausse et la dérive qui (lorsque la pièce est pointée) déterminent la ligne de mire dirigée vers le faux but, s'appellent *hausse* et *dérive fictives*.

Soient (fig. 43) AB la projection horizontale de l'axe de la pièce pointée pour le premier coup, m le guidon, C le faux but placé à la

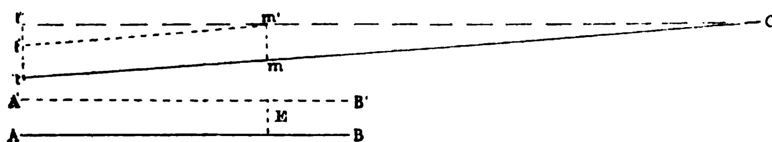


Fig. 43.

distance D du guidon, t la position du cran de mire, à travers lequel en visant par m, on aperçoit C. Après avoir tiré et remis en batterie la pièce, celle-ci sera déplacée latéralement. Supposons-la pointée dans la nouvelle position, son axe aura une position A'B' parallèle à la première. Soit E le déplacement latéral : le guidon s'étant déplacé de la même quantité sera en m' et le cran de mire en t'. En visant donc sur m' on ne verra plus C, Soit t'' la nouvelle position que l'on doit donner au cran de mire pour être en ligne droite avec m'C. Dans les triangles $Cm'm$, $m't''t'$, on a

$$\frac{Cm}{mm'} = \frac{m't'}{t't''} \qquad \text{ou} \qquad \frac{D}{E} = \frac{L}{t't''}$$

D'où

$$t't'' = E\frac{L}{D}.$$

Si donc, après le premier coup, on transporte le cran de mire de $E\frac{L}{D}$ dans le sens opposé au déplacement latéral de la bouche à feu, et on dispose ensuite celle-ci de façon que la ligne de mire passe par le faux but, la pièce est pointée.

Le déplacement latéral E de la bouche à feu est mesuré au moyen du dérivateur (*scostatore*). Il se compose essentiellement d'une règle divisée en parties égales ; chacune de ces parties est telle, que son rapport à l'unité de division de la planchette de dérive est comme D est à L ; il en résulte que les valeurs numériques du déplacement E donné par le dérivateur coïncident avec les valeurs numériques (en millimètres) du déplacement à donner au cran de mire.

La distance D devra se régler sur l'unité de la règle (si, par exemple, cette unité est 30 *mm*, on aura D = 30 L). Pour pouvoir mettre le faux but à différentes distances, il faudra que la règle ait plusieurs faces divisées d'une façon différente. Le dérivateur adopté a cinq faces dont les divisions correspondent à 17, 20, 25, 30, 40 *mm* (1).

Inclinaison de l'axe des tourillons. — L'inclinaison de l'axe des tourillons détermine une déviation latérale du côté de la roue la plus basse, et en produit également une verticale : en haut si la roue la plus basse est celle qui est du côté de la dérivation, en bas dans le cas contraire.

Supposons une bouche à feu pointée avec l'axe des tourillons horizontal et la ligne de mire déterminée par la hausse et la dérive de la table de tir passant par le but S (fig. 44). Supposons en outre le plan de la figure passant par S et perpendiculaire à l'axe de la pièce représenté en O.

---

(1) L'appareil pour le pointage indirect, proposé par l'auteur en 1880, et adopté par l'artillerie italienne, est décrit d'une facon très détaillée dans le *Manuale d'Artiglieria* (*Parte seconda, Artiglieria da fortezza*, pages 188-191).

La pièce la plus simple, et en même temps la plus essentielle, qui a résolu le problème du pointage de nuit est le *faux but* qui n'est plus un *point lumineux*, mais

Si maintenant on imagine que la pièce tourne autour de son axe d'un angle γ par l'abaissement d'un des tourillons (celui, par exemple, qui est placé du côté de la dérivation), elle reste pointée, puisque son axe n'a pas changé de position, mais la ligne de mire ne passe plus par le but S ; en effet, son point de rencontre avec le plan de la figure a décrit un arc de cercle SS′ mesuré par l'angle γ. Le point S pourra donc être atteint en conservant la même hausse et la même dérive, à condition que l'on vise le point S′, c'est-à-dire un point placé *au-dessous* de S de la quantité SP et *à droite* de S de la quantité PS′. Si l'on visait au contraire S, l'axe de la pièce aurait

Fig. 41.

une *surface éclairée :* tablette blanche (40 *cm* de côté), sur laquelle est peint en noir un anneau circulaire (diamètre intérieur 4 *cm*, diamètre extérieur 15 *cm*).

On la fixe verticalement sur le sol au moyen d'un pivot, en arrière de la plate-forme de 20 à 40 *m* de la bouche à feu. Sur ce faux but on vise, au moyen d'un cran de mire (ou trou de mire) adapté à l'extrémité d'un tourillon, et d'un micromètre (petit

Faux-but. Micromètre.

Fig. 45.

cercle avec trois fils noircis) qu'on adapte à la hausse de culasse. Lorsque la pièce est pointée, les fils se projettent sur le faux but, les deux fils verticaux embrassent l'anneau noir, le fil horizontal traverse le petit cercle central.

Dans le tir de nuit, il n'y a qu'à éclairer le faux but par une lanterne déposée sur le sol, à côté de la tablette. Avant ce pointage, quelque partie de la pièce se projette toujours sur les parties blanches de la tablette, et cela suffit pour trouver très rapidement la position de pointage, sans avoir besoin d'éclairer la pièce.

Enfin, un dérivateur à cinq faces permet de placer le faux but à toutes distances entre les limites indiquées.

une autre position, et le point touché aurait une déviation *en haut* égale à S P, et une déviation *à gauche* égale à P S'.

Soit δ l'angle de OS avec la trace ON du plan vertical de l'axe, on a :

$$\begin{aligned} PS' = SQ - S'R &= OS\,[\sin\delta - \sin(\delta-\gamma)] \\ &= OS\,[\sin\delta - \sin\delta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\delta] \\ SP = OR - OQ &= OS\,[\cos(\delta-\gamma) - \cos\delta] \\ &= OS\,[\cos\delta\cos\gamma + \sin\delta\sin\gamma - \cos\delta]. \end{aligned}$$

L'angle γ étant toujours très petit, on peut poser $\cos\gamma = 1$; par suite,

$$\begin{aligned} PS' &= OS\cos\delta\sin\gamma = OQ\sin\gamma \text{ (déviation latérale)} \\ SP &= OS\sin\delta\sin\gamma = SQ\sin\gamma \text{ (déviation verticale)}. \end{aligned}$$

La quantité Q S représente la dérivation D et O Q le côté d'un triangle rectangle placé dans le plan de tir, triangle dans lequel l'angle opposé à O Q est l'angle d'élévation α : par conséquent, en appelant X la distance de Q à la bouche, O Q sera égal à $X\sin\alpha$, et comme α est très petit, à $X\,\mathrm{tg}\alpha$. La déviation verticale est donc $D\sin\gamma$, et la déviation latérale

$$X\,\mathrm{tg}\alpha\sin\gamma.$$

Enfin, 1 *mm* de hausse ou de dérive correspond en hauteur ou en direction à une correction $\frac{X}{L}$; donc les déviations indiquées correspondent à une erreur de hausse

$$\frac{LD}{X}\sin\gamma = S\sin\gamma,$$

et à une erreur de dérive

$$L\,\mathrm{tg}\alpha\sin\gamma = H\sin\gamma.$$

Mortiers. — Les mortiers, comme les obusiers de côte, n'ayant pas de hausse, se pointent toujours au moyen du quart de cercle. La direction se donne de la manière ordinaire en faisant passer un rayon visuel par le but, par le guidon et par un cran pratiqué sur des piquets de mire appliqués sur l'un des flasques de l'affût.

§ 3.

Plan de direction. — Quand de l'endroit où est placée la bouche à feu on ne voit pas le but, il est nécessaire d'établir un plan

de direction. On l'établit au moyen de deux ou de plusieurs jalons.

Si, en se plaçant derrière la plate-forme, même en s'éloignant beaucoup, on peut voir en même temps la plate-forme et le but, l'alignement se fait sans aucune difficulté. Au moyen d'un fil à plomb, un opérateur couvre à la fois l'une et l'autre, et le plan visuel coïncide alors avec le plan de direction. Dans ce plan on plante autant de jalons qu'on le juge convenable.

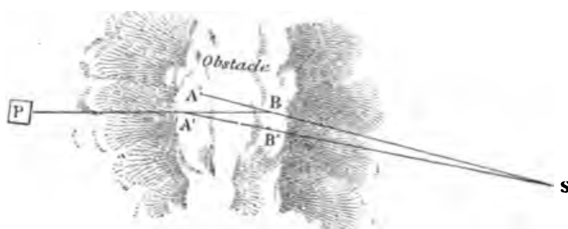


Fig. 46.

Lorsqu'il n'est pas possible de découvrir le but, quelle que soit la position que l'on occupe derrière la plate-forme, deux opérateurs A et B (fig. 46) montent avec deux jalons sur l'obstacle interposé entre la plate-forme et le but, et suffisamment éloignés l'un de l'autre, de façon toutefois que B puisse observer la plate-forme P, et A le but S. A étant dans une première position, quelconque du reste, fait placer B dans la direction A S; B fait ensuite déplacer A en A′ dans la direction PB. Cette manœuvre effectuée, A′ déplace B en B′ dans la direction A′S et ainsi de suite. Après deux ou trois épreuves, les deux opérateurs, se faisant face, couvrent avec leurs jalons respectivement le but et la plate-forne. Ils plantent alors les deux jalons, qui déterminent le plan de direction, que l'on prolonge, s'il est besoin, dans la direction de la plate-forme.

Le plan de direction établi pour une pièce, les plans de direction des autres pièces peuvent être regardés comme parallèles, en se réservant de faire une correction sur la dérive pour obtenir la convergence du tir. Si E est la distance entre les pièces, la correction est $\frac{E}{D}L$, D étant la distance du but, L la longeur de la ligne de mire.

Quand il n'est pas possible de monter sur l'obstacle, ou, si le sommet de celui-ci n'a pas assez de largeur, on établit un alignement en dehors de l'obstacle et ensuite un alignement parallèle passant par la plate-forme. La direction définitive PS (fig. 47) est alors déterminée par un jalon planté à la distance d en avant, et un peu en dehors du plan parallèle du côté du premier alignement d'une quantité $\frac{E}{D} d$.

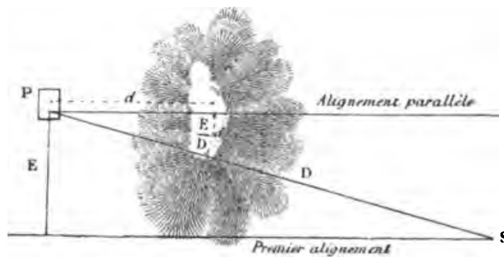


Fig. 47.

Angle de site. — Quand du point où se trouve la bouche à feu, on aperçoit le but, l'angle de site est déterminé au moyen de la bouche à feu elle-même. La hausse étant à fond, on dirige la ligne de mire vers le but; on place le quart de cercle sur la génératrice supérieure et on centre la bulle avec la vis micrométrique. L'angle de site ε est l'angle A indiqué par le quart de cercle diminué de l'angle de mire naturel m_0, c'est-à-dire :

$$\varepsilon = A - m_0.$$

L'angle de site, comme on le voit, devient négatif quand A est négatif ou plus petit que m_0; quand ε est négatif, cela indique que le but est au-dessous de l'horizon de la pièce.

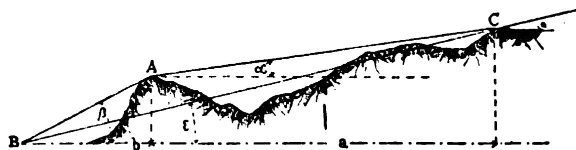


Fig. 48.

Si en avant de la bouche à feu B (fig. 48) se trouve un obstacle A, qui empêche la vue du but C, il est facile de se procurer un ins-

trument permettant la mesure des angles verticaux. Muni de cet instrument, on monte sur l'obstacle, et on mesure l'inclinaison α de AC, tandis qu'en B, on mesure avec la bouche à feu, ou avec le même instrument l'angle β. La tangente de l'angle de site ε est alors donnée par l'équation

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta}{a+b}$$

et l'angle ε est approximativement

$$\varepsilon = \frac{a\alpha + b\beta}{a+b}.$$

b représentant la distance de la pièce à l'obstacle, et a la distance entre celui-ci et le but (1).

(1) Dans la traduction de ces formules en nombres, on devra se rappeler que les sommes algébriques des numérateurs deviennent des différences, quand α ou β est négatif.

CHAPITRE III [1]

CORRECTIONS DU TIR

Les données de pointage qui servent à commencer le tir ne sont jamais exactes, soit parce que la distance du but est imparfaitement connue, soit que les quantités contenues dans les tables de tir sont susceptibles elles-mêmes de corrections, dues principalement aux conditions atmosphériques et à l'état du matériel.

Le présent chapitre est divisé en deux parties. La première, intitulée *Théorie des corrections*, a pour objet les relations qui existent entre les variations du pointage et celles du point de chute ou d'éclatement des projectiles. La seconde fait connaître les principes qui règlent les corrections effectives dans le *tir de guerre*.

§ 1.

Théorie des corrections

Tir à obus et à boulet (tir à percussion). — Les corrections sont de trois espèces : en hauteur, en direction et en portée ; on les trouve immédiatement quand l'écart est donné, et que l'on connaît les corrections spécifiques, c'est-à-dire les variations en hauteur, en direction et en portée correspondant à un ou plusieurs millimètres de hausse ou de dérive, à un ou plusieurs dixièmes de

---

(1) Ce chapitre et les deux suivants sont tirés des chapitres analogues de l'ouvrage de l'auteur, intitulé : *Nozioni generali sul tiro delle artiglierie da campagna e d'assedio* (*Istruzioni pratiche dell' artiglieria*. Vol. VII, titre II, 1882).

On a apporté ensuite quelques variations au texte de ces Instructions, qui n'en altèrent pas toutefois la substance.

degré, à un ou plusieurs décagrammes de charge. Ces variations sont généralement indiquées dans les tables de tir, ou peuvent se calculer comme nous l'avons dit à la page 155. En divisant la correction que l'on veut obtenir par la correction spécifique correspondante, on obtient sans autre calcul les variations à faire subir soit à la hausse, soit à l'élévation, soit à la charge ou à la dérive.

Relativement au sens de la correction, il n'est pas possible de commettre une erreur, lorsqu'on veut augmenter ou diminuer la portée ou la hauteur. Quant aux corrections en direction, on doit avoir toujours présent à l'esprit, que pour toutes les bouches à feu, excepté pour celles de 12 (av.), les augmentations de dérive portent le projectile à droite. Pour les canons de 12 à chargement par la bouche, les augmentations de dérive portent le projectile à gauche.

Quand le but est à une certaine hauteur au-dessus du terrain sur lequel on mesure les déviations longitudinales, il est nécessaire de faire deux corrections, l'une pour porter le projectile au pied du but, l'autre pour faire passer la trajectoire par le but.

Exemple. — *Canon de 16ᶜ G R.* Tir de plein fouet.

Le but est à 2 000 *m*, à 5 *m* au-dessus du terrain, et le tir est court de 20 *m*.

Il faut l'allonger de 20 *m*, et l'élever de 5 *m*. Or 5 *mm* de hausse correspondent à une augmentation de 26 *m* en portée, et 1 *mm* de hausse correspond à une augmentation de 0,7 *m* en hauteur : il faudra donc augmenter la hausse de 4 *mm* pour la portée, et de 7 *mm* pour la hauteur. Total 11 *mm*.

Cette double correction n'a lieu que dans les tirs d'école (en tirant, par exemple, sur un cadre en toile), et suppose que l'observateur placé auprès du but transmet la déviation longitudinale, comptée toujours depuis le pied de celui-ci.

Les corrections sur les hausses fictives et sur les dérives fictives dans le pointage avec un faux but sont identiques à celles que l'on ferait subir aux hausses et aux dérives dans le pointage direct. Quand les variations données par les tables de tir sont basées sur un guidon de volée, ces variations doivent être multipliées par $\frac{L}{L'}$, L' étant la distance des points de mire dans le pointage indirect,

et L la distance des points de mire lorsque l'on emploie le guidon auquel se rapportent les tables de tir.

Tir à shrapnel (tir à temps). — Le but de ce tir est de faire éclater le projectile avant le but, à une certaine distance de ce dernier, et à une hauteur indiquée dans la table, hauteur d'autant plus grande, que cette distance est elle-même plus grande. On corrige les écarts latéraux avec la dérive, et il n'y a pas lieu d'ajouter ici aucune observation spéciale.

Les écarts en hauteur se corrigent avec la hausse, les écarts en intervalle sur la graduation de la fusée.

Mais la variation d'intervalle entraîne par la courbure de la trajectoire, aussi la variation de la hauteur d'éclatement. Par conséquent, si la hauteur est exacte, et si l'intervalle ne l'est pas, la correction de la fusée doit être accompagnée d'une correction analogue pour la hausse : la réunion de ces deux corrections est nommée *double correction ;* elle consiste à allonger la portée de la quantité dont on éloigne l'éclatement, et inversement.

En effet (fig. 49), la hauteur trouvée exacte d'éclatement C' montre

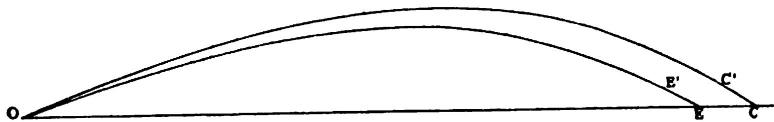


Fig. 49.

que le projectile rencontrerait le terrain en C à une distance exacte de ce point d'éclatement, mais au delà du but, si l'intervalle est trop court, et en deçà si l'intervalle est trop long. En corrigeant de la quantité CE, aussi bien la portée que la graduation, l'éclatement et le point de chute resteront dans la même position relative.

Quand il est nécessaire de corriger en même temps la hauteur et l'intervalle, il faut faire la *correction complexe,* qui consiste en une correction double (correction de la fusée et correction analogue de la hausse) et en une correction simple de la hausse. Avec la seconde, on porte l'éclatement à la hauteur exacte ; avec la première, en maintenant la hauteur, on corrige l'intervalle.

La correction complexe renferme donc deux corrections de hausse (la correction simple et celle qui fait partie de la correction

double); elles tendent à se compenser dans ces deux cas : quand la hauteur d'éclatement et l'intervalle sont à la fois ou trop grands ou trop petits [1]. Dans ces cas, la correction complexe peut être ramenée à une correction simple de graduation.

En résumé, et en laissant de côté les erreurs en direction, le tir à temps est susceptible de quatre espèces de corrections :

1° *Correction simple en hausse :* quand la hauteur n'est pas juste, l'intervalle l'étant.

2° *Correction simple en graduation :* quand la hauteur et l'intervalle sont à la fois trop grands ou trop petits.

3° *Correction double.* — (Composée de la correction de la fusée et d'une correction égale de la hausse en portée) : quand la hauteur est exacte, et l'intervalle ne l'est pas.

4° *Correction complexe.* — (Composée d'une correction double et d'une correction simple en hausse) ; on l'emploie quand la hauteur est trop grande et l'intervalle trop petit, ou inversement.

§ 2.

Corrections dans le tir de guerre.

Observations du tir. — La plus grande difficulté dans le tir en guerre réside dans les observations, qui ne peuvent être faites que de la batterie, ou dans un lieu rapproché.

Contre un but vertical, découvert et résistant, un observateur expérimenté, muni au besoin d'une longue-vue, peut avec une certaine approximation apprécier de la batterie les déviations verticales et latérales. Sur le terrain, les déviations latérales sont en général également appréciables ; il n'en est pas de même des déviations longitudinales. A part certains cas de guerre exceptionnels, on n'a d'autre indication pour corriger que le nombre des coups courts ou longs sur la totalité des coups tirés.

Dans le tir à obus, il est facile de juger si le tir est court ou long suivant que la fumée produite par l'éclatement masque le but ou

---

[1] Dans les petits intervalles on comprend les intervalles négatifs, qui correspondent aux éclatements ayant lieu au delà du but.

apparaît en arrière: mais il faut avoir égard au vent qui peut porter la fumée au delà du but malgré l'éclatement qui a eu lieu en avant. Les projectiles qui n'ont pas éclaté, en soulevant la terre au point de chute permettent aussi de distinguer les coups longs des coups courts, lorsque la distance n'est pas très grande.

Dans le tir au shrapnel, la hauteur d'éclatement s'apprécie facilement de la batterie; il n'en est pas de même de l'intervalle: on peut seulement juger si l'intervalle est positif ou négatif, quand le petit nuage produit par l'éclatement masque le but ou il en est masqué. La poussière produite par les balles qui battent le sol donnerait des indices à peu près certains; la distance de l'éclatement au point d'arrivée équivaut à trois ou quatre fois la dispersion latérale. Mais pour des observations semblables, il est nécessaire d'un concours de circonstances difficilement réalisables en pratique. Il est donc toujours utile, dans les premiers coups, de faire éclater les projectiles à une faible hauteur du sol.

Quand on est sûr de la portée, c'est-à-dire de la hausse, on peut être assuré que l'intervalle est positif et dans des limites convenables si l'éclatement a lieu à la hauteur exacte. C'est pour cela qu'il est nécessaire de tirer quelques coups à percussion avant de tirer à temps. On prend alors pour ce dernier tir la même hausse que pour le tir à percussion.

Les corrections dans le tir de guerre sont de deux sortes. Les premières, qui sont généralement les plus fortes, ont pour but de diriger le faisceau des trajectoires sur le but, c'est ce qui s'appelle *ajuster le tir*.

Les secondes doivent tendre à amener le centre de tir en un point déterminé du but, qui est en général le centre même de ce but, c'est ce qui s'appelle *rectifier le tir*.

Le tir sera *réglé* lorsque le centre de tir coïncide exactement avec le centre du but: le tir réglé dans le sens absolu ne se réalise jamais, en admettant même un tir indéfini. Et encore dans ce cas, y aurait-il lieu d'effectuer des corrections spéciales dépendant du changement de pointeur et des variations de l'atmosphère.

Malgré les différences de détail, dans les cas des tirs de campagne et de siège, l'ajustement et la rectification du tir peuvent être ramenés aux principes suivants.

Ajustement du tir. — L'ajustement du tir se compose d'une ou de plusieurs *fourchettes* et d'un ou de plusieurs *groupements* de coups.

On appelle fourchette un couple de trajectoires comprenant entre elles le but ; la distance entre les points de chute estimée d'après les données du tir, est appelée ouverture de la fourchette.

Après avoir tiré et observé le premier coup, on en tire un second et au besoin un troisième, de manière à obtenir une fourchette de grande ouverture. La première fourchette obtenue, en tirant à une distance intermédiaire on en forme une seconde dont l'ouverture est moitié de la première. On peut en continuant, s'il est nécessaire, partager en deux la seconde fourchette, et ainsi de suite.

La dernière fourchette dans le tir de campagne est de 50 *m*; dans le tir de siège elle n'est pas supérieure à la profondeur de la bande qui contient la moitié des coups.

L'emploi des fourchettes peut donner lieu à la perte d'un grand nombre de coups, si dans l'observation de quelque coup on commet une erreur, principalement s'il est un des premiers. Par conséquent, il est très important, surtout dans les cas pressés, de considérer comme non tirés les coups mal observés.

Ayant exécuté la dernière fourchette, on fixe la hausse (ou la charge, si on tire à angle fixe) pour celle des deux distances qui donne la plus grande facilité d'observation et l'on tire alors une série de coups (6 à 10) [*groupement*]. — Si cette série n'est pas suffisante, on en fait une seconde, en corrigeant les données de pointage, en prenant pour base 25 *m* pour le tir de campagne, et la moitié de la bande pour le tir de siège.

Dans le tir de campagne, toutes les pièces de la batterie concourent à l'ajustement, c'est-à-dire à la formation des fourchettes, et à l'exécution des groupements.

Dans le tir de siège, toutes les pièces de la batterie concourent à l'ajustement, jusqu'à la formation de la dernière fourchette. Les groupements s'exécutent par pièces.

Les règles exposées plus haut sont relatives au réglage du tir en portée. Relativement à ce qui concerne les déviations latérales, l'observation des premiers coups suffit pour indiquer la correction nécessaire pour donner la direction convenable.

Si le but présente de grandes dimensions dans le sens vertical,

les fourchettes peuvent se faire en hauteur, en adoptant les mêmes principes. Mais comme il est alors facile d'apprécier avec une certaine approximation la position des points touchés, le réglage du tir peut se faire assez facilement sur la base de l'erreur moyenne observée.

On peut opérer de la même façon lorsque dans le voisinage du but se trouve une surface verticale (par exemple, une maison). Ayant déterminé sur la surface une rose de 3 ou 4 coups, on en transporte le centre sur le but en faisant varier convenablement les données de pointage.

Rectifications. — Les rectifications du tir constituent une série de corrections de plus en plus petites, qui se font pour chaque pièce, dans le but de rapprocher de plus en plus le centre de chaque rose du point où l'on doit frapper le but. Ces corrections ne sont par le fait que la continuation de l'ajustement, et le principe qui doit les guider est celui-ci :

Le nombre de coups déterminant une correction doit être d'autant plus grand, que la correction qui reste à faire est plus petite.

En effet c'est sur ce principe qu'est basé l'ajustement du tir, où les plus grandes corrections, celles que produisent les fourchettes, sont déterminées par un seul coup court ou long, et les corrections moins grandes sont déterminées par des groupes de coups.

Les exigences du tir de campagne ne permettent pas d'avoir un grand nombre de règles pour la rectification. On admet que ces corrections ne doivent pas dépasser 25 *m* et s'appuyer sur l'observation de 5 coups au moins.

Dans le tir de siège, ces corrections doivent être réduites à des moitiés ou à des quarts de bande. Dans la table suivante, on peut trouver un guide pour les effectuer. La première colonne contient le nombre théorique des coups courts, que l'on suppose pouvoir être obtenues à *tir réglé* sur 100 coups tirés. Les colonnes suivantes donnent les coups courts, qui dans un groupe de 10 ou de 20 coups déterminent la correction d'une moitié ou d'un quart de bande.

TABLEAU.

Table de corrections (1)

TIR RÉGLÉ courts sur 100.	CORRIGER DE $^1/_2$ BANDE si sur 10 coups il en résulte courts :		CORRIGER DE $^1/_4$ BANDE si sur 10 coups il en résulte courts :	
50	2 ou moins	8 ou plus	7 ou moins	13 ou plus
45	2 —	7 —	6 —	12 —
40	1 —	7 —	5 —	11 —
35	1 —	6 —	4 —	10 —
30	1 —	6 —	3 —	9 —
25	Aucun	5 —	3 —	8 —
20	»	4 —	2 —	7 —
15	»	4 —	1 —	5 —
10	»	3 —	1 —	4 —
5	»	2 —	Aucun	3 —

Si les coups longs sont plus faciles à observer que les courts, cette table sert également : il suffit de remplacer le mot *courts* par le mot *longs*. Dans le cas d'un but vertical, on remplace les mots *courts* ou *longs*, par les mots *bas* ou *hauts*.

(1) Relativement à la construction de la table, voyez la page 240.

CHAPITRE IV

RÉSUMÉ DU TIR DE CAMPAGNE

§ 1.

Généralités. — Les buts qui s'offrent à l'artillerie de campagne sont ordinairement des troupes diversement groupées, le plus souvent découvertes ou seulement masquées par les accidents du terrain, quelquefois abritées artificiellement. Les projectiles employés sont des obus, des shrapnels, et des boîtes à mitraille.

Les obus agissent principalement par leur éclatement. Dans un terrain consistant et faiblement incliné par rapport à la direction de la vitesse de chute, l'obus éclate en projetant en avant ses éclats, sous un angle supérieur à celui du terrain avec la tangente à la trajectoire. Plus cet angle est considérable, plus il faut rapprocher le point d'éclatement du but.

La distance à laquelle l'éclatement cesse d'être efficace, dépend en même temps de l'angle d'incidence et de la consistance du terrain. Elle peut varier de 10 à 40 *m ;* si le terrain est mou ou très incliné, l'obus pénètre sans éclater, ou éclate sans produire d'effet.

L'action des shrapnels est indépendante du terrain, mais leurs effets dépendent de la hauteur d'éclatement, et surtout de l'intervalle. La vitesse de projection des balles étant égale à celle du shrapnel au moment où il éclate, il faut rapprocher le point d'éclatement d'autant plus près du but que celui-ci est plus éloigné de la batterie. Le point d'éclatement peut toutefois varier d'une façon assez large, sans faire perdre au shrapnel son efficacité. Un intervalle de 10 à 100 *m,* une hauteur inférieure à 6 *m* aux petites distances, à 11 *m* aux grandes donnent toujours des tirs efficaces.

Si grandes que soient ces limites et si resserrées que soient les limites pour l'efficacité des obus, ce projectile a pour lui l'avantage de la facilité du réglage du tir et la rapidité du feu. Les erreurs d'observation dans le tir au shrapnel et dans le tir à obus sont à peu près proportionnelles aux limites indiquées plus haut, et l'on ne doit pas perdre de vue les erreurs très graves que dans l'émotion du feu le soldat peut commettre en réglant la fusée.

De cette comparaison il ne faut donc pas tirer des préventions en faveur de l'un ou l'autre projectile : on doit au contraire en déduire des repères pour juger de l'opportunité de leur emploi, suivant le but qui se présente, et les conditions dans lesquelles il se présente.

Dans l'ajustement du tir et dans un feu rapide contre des troupes en mouvement, le tir à obus doit en général être préféré. Contre la cavalerie, surtout, l'obus peut être préféré au shrapnel qui tue avec moins de bruit. Contre des obstacles matériels, l'obus est le seul projectile efficace.

Contre des troupes en ordre dispersé, couvertes ou cachées par les replis du terrain, ou abritées par une masse couvrante, le tir à shrapnel est préférable en général ; il l'est toujours lorsque le terrain en avant du but par sa mollesse ou son inclinaison est peu propre à l'éclatement par percussion.

Pour le choix de ses positions, l'artillerie doit viser d'abord à l'effet, ensuite à l'abri.

Pour l'effet, sont conditions essentielles : facilité des observations, vaste champ à battre, possibilité de battre le terrain jusqu'aux petites distances. La dénivellation des positions, quand elle n'est pas exagérée, a peu d'influence sur les effets des projectiles. Les positions élevées ont l'avantage de découvrir une grande zone de terrain et de faciliter en général les observations du tir. Les positions trop élevées donnent aux faibles distances un tir trop plongeant.

Relativement à l'abri : se tenir loin des objets qui frappent la vue, et qui peuvent servir de point de repère à l'artillerie ennemie pour mieux diriger son tir. Éviter les endroits pierreux ; s'aider des replis de terrain, des arbustes pour masquer les pièces au tir et à la vue de l'ennemi ; et si celui-ci tire à percussion, faire avancer à

bras les pièces jusqu'aux crêtes, même en les démasquant s'il le faut, puisque l'obus entier est moins meurtrier que ses éclats.

Dans le choix du but, préférer avant tout les troupes les plus menaçantes, ensuite celles où le projectile promet plus de carnage.

Ne pas disséminer le feu, mais le concentrer successivement sur les diverses parties du but.

La distance maximum utile dépend de la position, de l'étendue du but et de la facilité des observations. On la considère comme étant celle au delà de laquelle le but ne recevrait pas le quart des coups tirés.

§ 2.

Conduite du feu.

Ordre et rapidité du feu. — Une batterie peut faire feu :

Au commandement. — Chaque pièce doit faire feu au signe ou au commandement du capitaine de batterie.

Pièce par pièce. — Les pièces font feu successivement de droite à gauche ou inversement suivant le commandement (feu par la droite ou feu par la gauche), et si une pièce n'est pas prête, elle ne tire qu'au moment où son tour revient.

Par section. — Chaque section tire indépendamment l'une de l'autre. C'est la seule règle à suivre dans le tir à mitraille.

Par salve. — Toutes les pièces de la batterie ou d'une demi-batterie tirent ensemble au commandement.

Relativement à la rapidité, le tir se divise en trois espèces :

Tir ordinaire. — Un coup toutes les deux minutes.

Tir lent. — Un coup toutes les quatre minutes.

Tir rapide. — A obus ou à mitraille, deux coups à la minute, à shrapnel un coup.

Dans le tir à mitraille, on fait toujours le tir rapide. Pour les obus et pour les shrapnels le tir lent et le tir rapide s'exécutent par un commandement. S'il n'y a pas de commandement spécial, on effectue le tir ordinaire.

§ 3.

Tir percutant.

But immobile. — *Ajustement du tir.* — Toutes les pièces sont chargées et pointées avec la hausse indiquée par le capitaine sur le même point, qui sera le pied de la partie la plus visible du but, quel qu'il soit : elles tirent au commandement. Si la distance a été appréciée à vue, la première fourchette est de 200 *m*; si elle a été mesurée au télémètre, elle est de 100 *m*. La dernière fourchette est de 50 *m*.

On fixe la hausse de toutes les pièces pour l'une des deux distances de la dernière fourchette et on tire au commandement une série de 4 ou 8 coups, dirigés tous sur le même point. Si la série n'est pas satisfaisante, on en recommence une seconde en augmentant la hausse de 25 ou 50 *m*.

Contre un but profond (troupes en colonnes), quatre coups courts, contre un but peu profond (infanterie et cavalerie en ligne, ou en chaîne, et artillerie en batterie) 4 coups longs déterminent le passage d'une série à la suivante.

Ajustement du tir contre un front d'infanterie en colonne.
Distance mesurée 2200 m.

1re PIÈCE.			2e PIÈCE.			3e PIÈCE.			4e PIÈCE.			5e PIÈCE.			6e PIÈCE.		
Coup.	Hausse.	Observation.	Coup.	Hausse.	Observation.	Coup.	Hausse.	Observation.	Coup.	Hausse.	Observation.	Coup.	Hausse.	Observation.	Coup.	Hausse.	Observation.
1°	2 200	?	2°	2 200	+	3°	2 100	?	4°	2 100	—	5°	2 150	—	6°	2 150	—
7°	2 150	—	8°	2 150	—	9°	2 175	?	10°	2 175	+	11°	2 175	—	12°	2 175	+
13°	2 175	?	14°	2 175	+	15°	2 175	+	16°	2 175	+	17°	2 175	+	18°	2 175	—

N. B. + signifie long ; — court ; ? incertain.

On a tiré cinq coups pour former la fourchette de 50 *m*. Les coups 6, 7 et 8 (du premier groupe) réunis au cinquième décident du passage de la première série à la seconde ; celle-ci est satisfaisante, puisque sur 8 coups observés, 6 sont non courts.

Ajustement du tir contre de l'artillerie.
Distance appréciée à vue 2 200 m.

1re PIÈCE.			2e PIÈCE.			3e PIÈCE.			4e PIÈCE.			5e PIÈCE.			6e PIÈCE.		
Coup.	Hausse employée.	Observation.	Coup.	Hausse employée.	Observation	Coup.	Hausse employée.	Observation.	Coup.	Hausse employée.	Observation.	Coup.	Hausse employée.	Observation.	Coup.	Hausse employée.	Observation.
1o	2 200	?	2o	2 200	?	3o	2 200	—	4o	2 400	?	5o	2 400	+	6o	2 300	+
7o	2 250	+	8o	2 250	+	9o	2 200	+	10o	2 200	?	11o	2 200	+	12o	2 200	+
13o	2 100	—	14o	1 900	—	15o	2 000	+	16o	1 950	—	17o	1 950	+	18o	1 950	—

N. B. + coups jugés longs ; — courts ; ? incertains.

Le commandant de batterie a commis une erreur en jugeant le 3e coup court, tandis qu'il est long ; il est arrivé de la sorte au 12e coup sans avoir fait la fourchette. Il soupçonne alors une erreur, raccourcit le tir de 100 *m* ce qui est peu. Au 14e coup, bien sûr de l'erreur commise, il raccourcit encore le tir de 200 *m* (enfin !) et fait la fourchette. Il la réduit ensuite de 100 *m* et de 50 *m* au 15e et au 16e coup, et il peut alors commencer la série. Une fausse observation a fait perdre 14 coups et dépenser un temps très précieux dans un combat d'artillerie.

Répartition du feu et rectification du tir. — Après avoir tiré une série avec une proportion satisfaisante entre les coups courts et longs, on continue le feu suivant les indications du capitaine et les ordres des chefs de section.

Quant à la répartition, si le but est une masse d'artillerie, la battre graduellement pièce par pièce ; si le but est de l'infanterie ou de la cavalerie, concentrer le feu sur le point où le désarroi peut être le plus complet ; contre les tirailleurs en ligne les sections tirent contre autant de points de la ligne ; si les soutiens sont visibles, toute la batterie concentre ses feux sur l'un d'eux.

La répartition du feu faite, les chefs de section font pour chaque pièce les corrections latérales qui semblent les plus convenables, et avec l'acceptation du capitaine, ils font les petites corrections des hausses, afin d'obtenir pour chaque pièce la proportion voulue entre les coups courts et les coups longs.

Contre un but profond, on regarde le tir comme réglé, quand la

moitié des coups ou le quart des coups est court; si le but est peu profond, le tir est réglé si la moitié ou le quart est long.

La correction qui fait varier de 1/4 du total des coups le nombre des coups courts est très petite; elle atteint à peine 2 *mm* pour la plus grande distance.

Si le terrain en avant du but ne se prête pas bien à l'éclatement, le nombre des coups courts doit être réduit au strict nécessaire pour s'assurer que le tir n'est pas trop long.

Contre des troupes abritées par une masse couvrante, le même principe est à appliquer. Les fourchettes se font à cheval de la crête, et si l'objectif du tir est la démolition de l'abri, le nombre des coups longs doit être réduit au strict nécessaire pour s'assurer que le tir n'est pas trop court.

Quand il est impossible, ou très difficile d'observer les coups isolés, on tire par salves, soit pour former la fourchette, soit dans les groupes.

But en mouvement. — *Le but avance.* — Ayant fait la fourchette de 100 *m* ou de 200 *m*, si le but est très éloigné on se meut rapidement, on tire lentement à la plus petite distance tant qu'on observe des coups courts. Aussitôt qu'un coup a atteint le but, on accélère le tir, tant qu'on observe plusieurs coups longs consécutifs; alors on diminue la hausse encore pour 100 *m* et on recommence à tirer lentement, et ainsi de suite. Si sur le chemin que suit l'ennemi, on distingue certains points bien visibles, y ajuster le tir, en y attendant le passage de l'ennemi, puis tirer avec toute la rapidité possible [1].

Le but s'éloigne. — On opère d'une façon inverse.

Le but marche en d'autres directions. — Viser la tête de colonne, si la longueur de celle-ci est considérable; si elle est petite ou si sa marche est rapide, viser en avant d'une quantité que chaque pointeur apprécie facilement en suivant avec la ligne de mire le but pendant un certain espace. Dans ce cas encore, on peut préparer son tir en le réglant sur des points par où doit nécessairement passer l'ennemi.

---

[1] Ce réglage *préventif* compense amplement la consommation des munitions quand l'ennemi doit forcément passer par les points choisis. Par exemple, un pont.

§ 4.

Tir à temps.

But immobile. — *Ajustement du tir.* — *Fourchette.* — La fourchette se fait en général avec le tir percutant.

Fourchette avec shrapnel. Quand le terrain en avant se prête mal aux percussions, ou même encore quand en tirant déjà à shrapnel sur un but, un autre but se présente inopinément, les fourchettes se font avec le même projectile, en chargeant et tirant par section. La dernière fourchette est de 50 *m*, la première de 100 ou 200 *m*, suivant que la distance a été mesurée, ou appréciée à la vue.

On fera dans la formation des fourchettes des corrections doubles (hausse et réglage). On fera des corrections simples en la hausse, quand la hauteur d'éclatement ne permet pas les observations des intervalles, ou quand les projectiles touchent terre en deçà avant d'éclater; on fera des corrections dans le réglage, quand ceux-ci touchent également terre avant l'éclatement, dans le voisinage du but. Dans les autres cas, corrections doubles. Généralement, préférer les corrections de la fusée plûtot en moins qu'en plus, parce que le tir est bon même avec des intervalles de 100 *m*; les coups bas sont également préférables aux coups hauts à cause de la facilité des observations.

Si les observations sont difficiles ou demandent trop de temps, on fait charger et tirer par section ou même par batterie.

Groupes de coups. — Après avoir fait la fourchette avec l'obus ou le shrapnel, tirer 8 ou 10 coups à la plus petite des deux distances et le tir est réglé, si quelque éclatement paraît en avant du but, et qu'aucun n'ait lieu au delà, même si un coup touche la terre en avant du but.

Si plusieurs coups touchent terre en avant du but, on recommence la série en augmentant seulement la hausse pour 50 *m*. Si l'on obtient des éclatements au delà du but, on fait une nouvelle série avec correction double de 50 *m* en moins. Si, par suite de la hauteur d'éclatement, on ne peut s'assurer de l'intervalle, on fait une correction simple sur la hausse pour abaisser l'éclatement.

Rectification du tir. — La rectification du tir est confiée aux chefs

de section qui, en répartissant le feu suivant les ordres du capitaine, peuvent modifier la dérive et la hausse quand les shrapnels éclatent trop haut ou touchent le sol, mais non pas le réglage de la fusée.

En tirant sur des troupes abritées, la fourchette se fait de la même façon. La première série de coups se fait à une distance moyenne entre les limites de la dernière fourchette, et le tir est considéré comme ajusté et rectifié, quand la masse couvrante masque le quart ou la moitié des coups.

But en mouvement. — *Le but s'avance.* — En tirant à obus ou, si cela n'est pas possible, à shrapnel, on fait une fourchette de 200 *m* et l'on tire de suite à la plus faible distance, jusqu'à ce que l'on aperçoive quelque éclatement au delà du but. On tire alors une salve rapidement, et on raccourcit le tir de 200 *m*, ou de 300 *m*, si le but avance rapidement.

On peut conseiller d'accompagner le tir à temps du tir à percussion continu d'une section afin de conserver la fourchette. L'une des pièces de cette section tire à la distance à laquelle les autres sections font feu à temps, l'autre à une distance de 200 *m* plus grande. On estimera qu'il convient de continuer le tir à temps jusqu'au moment où l'on voit que les obus font fourchette. Quand celle-ci cesse, toutes les pièces de la batterie raccourcissent le tir de 200 *m*.

Le meilleur renseignement de l'efficacité du tir à shrapnel contre un but qui s'avance, est le désordre porté dans les troupes ennemies, désordre qui est l'avant-coureur du succès définitif, la retraite de l'ennemi.

Le but s'éloigne. — On fait la fourchette de 200 *m* préférablement avec l'obus, puis on tire à shrapnel à la plus grande distance. Si l'on n'observe aucun éclatement au delà du but, on allonge le tir de 100 *m* et on continue jusqu'à ce qu'on n'observe plus aucun éclatement au delà, et ainsi de suite.

Si le but se déplace si rapidement qu'il soit nécessaire de modifier le réglage de la fusée à chaque salve, il convient de tirer par batterie, en indiquant après chaque salve la distance de réglage des shrapnels et de pointage des pièces.

Le but s'avance dans une direction quelconque. — Opérer comme dans le tir à percussion.

Tir à mitraille. — Comme l'ennemi est très rapproché, la première règle est de tirer très rapidement. Pour abréger le pointage, abattre la hausse, et viser avec un doigt posé sur la planchette de mire à 300 *m*, avec deux doigts à 400 *m* et au delà. Si le sol est uni, viser au pied du but; s'il est ondulé, au sommet.

CHAPITRE V

RÉSUMÉ DU TIR DE SIÈGE

---

§ 1.

Généralités. — Le but de l'assaillant est de réduire au silence l'artillerie ennemie et d'entrer dans la place : le but de l'assiégé est d'empêcher les progrès de l'assaillant en battant son artillerie et ses ouvrages.

Les buts sont fixes, les distances mesurées, les bouches à feu, de gros calibre, abritées le mieux possible, placées sur plate-forme. Il est donc possible d'avoir un tir bien réglé et méthodique.

Les buts sont les batteries, avec tout le personnel, les ouvrages de fortification existants ou en voie d'exécution, les défenseurs des chemins couverts et des tranchées.

Les bouches à feu peuvent être battues de front par un tir de plein fouet (*tir à démonter*) et toujours par les mêmes tirs qu'elles emploient : de flanc, en faisant passer le projectile au-dessus de l'obstacle qui les couvre latéralement (*tir d'enfilade*). Les ouvrages, s'ils sont verticaux, comme les parapets, les murs d'enceinte, les escarpes, les caponnières, etc., peuvent être battus par des tirs de plein fouet ou indirects (*tir de démolition*, et en particulier *tir en brèche*) ; s'ils sont horizontaux, comme les voûtes de casemates ou d'autres édifices, ils peuvent être battus par un tir courbe (*tir d'effondrement*). Les défenseurs sont battus par le tir à shrapnel et par le tir courbe (*d'éclatement*).

Quant à l'exécution du tir à shrapnel, nous renverrons au tir de campagne (*buts couverts*). Pour le tir courbe, nous n'avons rien à ajouter aux principes généraux exposés dans les chapitres précédents.

Il nous reste donc à parler du tir à obus, de plein fouet et indirect.

§ 2

Tir de plein fouet.

Le but est découvert. S'il est étendu, on le divise en plusieurs zones, que l'on bat successivement ou simultanément, suivant le nombre de pièces disponibles, et autres nécessités. En général, c'est sur le point le plus central du but ou de la zone désignée que l'on dirige la trajectoire moyenne.

Le pointage, après le premier coup, se fait sur un faux but, c'est une règle générale pour tous les tirs de siège. Si on veut avoir une règle sûre pour effectuer les corrections, il convient de se procurer les dimensions du but, et de calculer avec celles-ci les coups, qu'à tir réglé (généralement centré) on peut attendre justes, soit en hauteur, soit en direction, et par conséquent ceux qui doivent frapper en dehors du but, dans une partie désignée, où les observations sont faciles (par exemple, les coups courts). Les dimensions verticales du but s'obtiennent facilement au moyen de la hausse, les dimensions horizontales au moyen de la dérive. Avec une hausse quelconque, on dirige la ligne de mire au pied du but; ensuite, sans déplacer la pièce, on abaisse le cran de mire jusqu'à ce que la ligne de mire rencontre le sommet du but. La hauteur du but est alors $\frac{Dh}{L}$, D étant la distance du but, h la différence des hausses, et L la longueur de la ligne de mire. On procède de la même façon pour obtenir la dimension horizontale.

La même méthode peut être employée pour mesurer les déviations sur le plan vertical du but, mais il est toujours plus exact de se régler sur le nombre des coups qui tombent en dehors du but, en se servant de la *table des corrections* (voyez page 286).

Dans le tir à démonter, on dirige le tir contre une pièce, en faisant passer la trajectoire moyenne par la crête du parapet, que la pièce soit en barbette ou en embrasure; si l'embrasure est fermée à la partie supérieure, on tire à la clé de voûte. Dans le premier

cas, les corrections s'effectuent par l'observation des coups bas et courts, dans le second par l'observation des coups hauts. Si le tir est oblique et si la pièce battue est en embrasure, la trajectoire moyenne doit passer par l'arête extérieure de la joue couverte. Lorsque l'arête est émoussée, l'ouverture intérieure de l'embrasure est à découvert, et le tir sera alors dirigé au centre même de l'ouverture.

Dans le tir en brèche, pour donner un accès praticable aux colonnes d'assaut, il est utile de pratiquer trois entailles dans le mur, une horizontale, de 20 *m*, ou de 30 *m* si le revêtement est très haut, environ à 1/3 de la hauteur totale, à partir du pied, et deux verticales. Mais on ne peut pas compter sur la continuité des entailles, à moins que la distance ne soit très petite. On commence alors par l'entaille horizontale, chaque pièce tire de façon que les coups frappent à côté des précédents sur la partie de muraille déjà ébranlée. On attaque ensuite les entailles verticales, qu'il n'est pas nécessaire de continuer jusqu'à leur extrémité supérieure, parce que le mur s'écroule facilement en ébranlant par quelques coups la partie centrale. Si le mur est muni de contreforts, les entailles verticales seront voisines de ces derniers. Il est utile dans ce cas de faire un tir croisé, c'est-à-dire de diriger le feu de droite de la batterie sur la gauche du mur, et inversement.

Si la distance ne permet pas une précision suffisante, il faut substituer aux entailles une succession de roses formées de quatre ou cinq coups tirés dans des conditions identiques ; les centres à 1 ou 2 *m* l'un de l'autre. Après avoir formé une première série, on en forme une autre sur la même ligne, en prenant pour centre des nouvelles roses le milieu des intervalles.

§ 3.

Tir indirect.

La nécessité d'employer le tir indirect se présente dans deux cas principaux :

1° Quand il s'agit de démolir une construction défendue par une masse couvrante (*Tir de démolition*).

2° Quand on doit battre dans le sens de la longueur le terre-plein d'un ouvrage de fortification défendu latéralement par une ou plusieurs masses couvrantes (*Tir d'enfilade*).

Les autres cas de tir indirect peuvent se ramener au cas dans lequel la batterie d'attaque étant placée en arrière d'une défense plus ou moins voisine, naturelle ou artificielle, les projectiles doivent nécessairement passer au-dessus de cette défense pour atteindre le but.

Détermination de la charge. — Quand la crête de la masse couvrante est plus voisine du but que de la batterie, la charge dépend de l'angle que doit faire la trajectoire avec la ligne de site par rapport à la crête (angle d'arrivée).

Soit A (fig. 50) l'arête de la masse couvrante, C le point où la

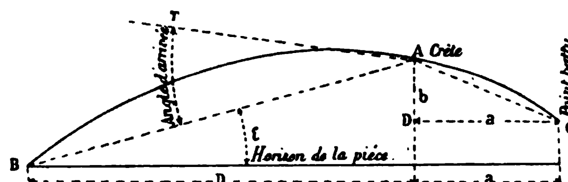


Fig. 50.

trajectoire passant en A rencontre le but (C est la limite du but, et les règles qui la déterminent seront données plus loin), B la bouche de la pièce. Soit D la distance horizontale de A, b la distance verticale entre A et C, a la distance horizontale entre ces mêmes points, ε l'angle de site : l'angle d'arrivée $TAB = \omega$ est donné par l'équation :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a} + \frac{D \operatorname{tg} \varepsilon - b}{D + a}.$$

Les quantités a, b, D, ε, dépendent du profil de l'ouvrage, de la position de la bouche à feu et du choix du point C. L'angle de site se détermine comme il a été dit (page 277). Le choix du point C dépend des règles qui seront indiquées plus loin.

L'angle d'arrivée étant déterminé, on cherche dans les tables de tir la charge à adopter; cette charge est celle qui, à la distance D, donne un angle de chute égal à l'angle d'arrivée. Si, à cette distance,

aucune charge ne donne cet angle, en général il n'est pas nécessaire d'interpoler; on choisit parmi les deux charges qui donnent deux angles de chute, l'un supérieur, l'autre inférieur à l'angle calculé, celle qui est plus petite. Avec cette charge et les données de pointage de la table, on tire un premier coup, comme si l'on voulait toucher le point A, sauf à effectuer ensuite les corrections.

Si l'obstacle (fig. 51) était proche de la batterie, on détermi-

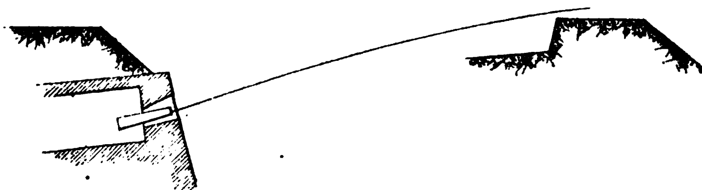


Fig. 51.

nerait les angles de sites ε ε' correspondant à la crête de l'obstacle et du but; et on choisirait la charge pour laquelle entre les élévations correspondant aux distances de la crête et du but, il se vérifiera une différence un peu supérieure à ε' — ε (page 258).

Ce dernier cas se présente surtout dans la défense.

§ 4.

Tir de démolition.

Pour la démolition, il est en général nécessaire d'avoir une vitesse du choc supérieure à 160 *m* pour les obus de 15 ou 16^c et à 260 *m* pour ceux de 12^c, en général 40 dynamodes de force vive [1].

Dans le tir indirect, la distance étant donnée, la charge est d'autant plus petite que l'angle d'arrivée ou de chute est plus considérable, et cet angle dépend des conditions de profil de l'ouvrage et

---

[1] 40 dynamodes de force vive suffisent pour démolir environ 1|10 de mètre cube de bonne muraille, et environ un quart de mètre cube de muraille de qualité inférieure.

de la limite C du but (fig. 52). Il est donc nécessaire de déterminer cette limite C de façon qu'elle satisfasse à deux conditions : 1° que

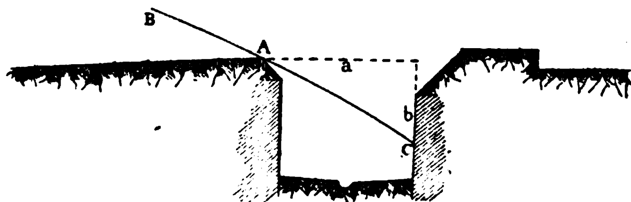


Fig. 52.

son étendue soit suffisante pour recevoir un nombre convenable de coups ; 2° que ceux-ci aient une force de choc suffisante.

Détermination de la limite du but. — L'angle de chute est donné par l'équation

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{b}{a} + \frac{D\operatorname{tg}\varepsilon - b}{D + a}.$$

Le second terme est en général négatif, si la batterie est plus élevée que la crête, et positif dans le cas contraire. Dans le premier cas, et toutes choses égales d'ailleurs, l'angle de chute est plus petit que dans le second, la charge employée est donc plus forte. Mais grâce à la petitesse ordinaire de l'angle ε, la différence est souvent insignifiante.

L'angle de chute dépend donc essentiellement de $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire du profil de l'ouvrage et du choix du point C. Les conditions du choc sont donc d'autant plus favorables que la fraction $\frac{b}{a}$ est plus petite, c'est-à-dire que b est petit et a grand.

L'enfilade des fossés, sera donc très favorable pour la démolition des escarpes, des flanquements, des caponnières, parce que a est alors suffisamment grand pour permettre d'employer même la charge de combat. L'augmentation de a est favorisée par l'enfilade oblique des fossés ; cependant l'avantage de l'emploi d'une plus grande charge est en grande partie supprimé par l'obliquité du choc. Dans aucun cas on n'admettra une obliquité horizontale supérieure à 30° avec la normale au mur.

La quantité b dépend du choix du point C, c'est-à-dire du point inférieur battu.

Comme règle, on admet pour des distances supérieures à 1200 m que ce point soit à 1/3 de l'escarpe à partir du pied. Dans le tir centré, les coups seront alors groupés autour du centre de la partie supérieure, c'est-à-dire à 1/3 du haut de l'escarpe. Pour les distances inférieures, on peut porter la limite à la moitié du mur, en rectifiant ensuite le tir de façon que le centre tombe toujours au 1/3 du haut de l'escarpe. Dans le premier cas, le grand angle d'arrivée est compensé par la distance, qui permet une charge plus forte. Dans le second cas, le nombre des coups qui battent le glacis n'est pas plus grand que dans le premier, grâce à une plus grande précision.

Dans les ouvrages modernes, les murs d'escarpe sont défilés à 1/5 et même à 1/3. Il est nécessaire, dans ces cas, de porter la limite du but au tiers supérieur, sans quoi, même avec les plus gros calibres, on n'obtiendrait pas un choc suffisant pour la démolition; le tir sera rectifié de façon que la trajectoire moyenne rase la crête du glacis. La moitié inférieure des coups reste ainsi arrêtée par celui-ci, mais ce résultat est loin d'être inutile, puisqu'en écrêtant le glacis, on ouvre le passage aux coups suivants et on augmente la partie battue de l'escarpe.

Le passage fait, les projectiles peuvent dans quelques ouvrages rester arrêtés par la crête de la contrescarpe; si alors la moitié supérieure des coups ne réussit pas à faire une brèche, il faudra, avant de la pratiquer, démolir la contrescarpe en employant la mine; ce moyen est préférable à l'établissement des batteries sur le glacis, établissement qui donne beau jeu à la défense, et qui a l'inconvénient de faire ricocher sur les batteries les éclats de mur ou d'obus. La contrescarpe abattue, l'angle de chute devient suffisamment petit pour favoriser la brèche, et la descente dans le fossé pour la colonne d'assaut est toute préparée.

Il est rare que, dans le tir en brèche indirect, on réussisse à faire dans le mur une véritable entaille horizontale; parce qu'à mesure que le mur est percé, la partie supérieure tombe également, soit à cause de l'obliquité du choc, soit par suite de la dispersion naturelle des coups. Il sera donc très rare que l'on ait à procéder aux

entailles verticales ; toutes les fois que ce cas se présente, on opère de bas en haut, graduellement en augmentant la charge, et en diminuant la hausse. Il est toujours nécessaire, pour achever la brèche, d'augmenter la charge, soit pour déterminer la ruine totale de la partie supérieure du mur, quand on n'aura pas fait de tailles, soit pour battre les terres du parapet et du terre-plein ; celles-ci en s'éboulant, tandis qu'elles ouvrent un passage, couvrent les matériaux déjà tombés et rendent la brèche praticable.

Distance. — Les limites géométriques de la zone dans laquelle on peut établir une batterie de tir indirect dépendent de l'angle de chute que l'on doit obtenir et de la bouche à feu. Ces limites sont les deux distances qui donnent cet angle avec la charge maximum et la charge minimum.

Si, par exemple, on veut obtenir avec le canon de 16 G R un angle de chute dont la tangente soit 0,130 (7°,27′), la distance maximum de tir est 2 000 *m* (charge 3,2 *kg*) et la distance minimum 700 *m* (charge 1 *kg*).

Voici quelques considérations qui permettent de fixer le choix entre les grandes et les petites distances pour une batterie de démolition. Aux grandes distances, la précision du tir est faible, mais la force du choc est grande : par conséquent, on peut abaisser la limite du but et faire un tir centré, c'est-à-dire rectifier le tir de façon que la trajectoire moyenne passe par le centre de la partie vulnérable du but. Aux petites distances, la précision du tir est plus grande, mais la force du choc plus petite. Par conséquent, il faut relever la limite du but et faire un tir non centré : par là le même nombre de coups utiles se réduit comme aux grandes distances.

Les petites distances présentent donc l'avantage de faire converger les coups, les grandes distances ont pour elles la plus grande force de choc.

Quand il s'agit d'une simple démolition, les grandes distances (supérieures à 1 500 *m*) sont préférables, quand on veut au contraire avoir une brèche, il est préférable d'agir à petite distance (inférieure à 1000 *m*).

Exécution du tir. — La charge établie, on tire le premier coup comme si l'on voulait toucher la crête du glacis en pointant avec

les données de la table de tir. Les coups suivants s'exécutent en visant un faux but préalablement préparé en arrière de la pièce.

Si le premier coup bat le glacis ou le parapet qui est au-dessus de la berme, on forme immédiatement la fourchette à cheval du fossé, et la première ouverture, d'abord d'une double bande, se réduit ensuite à une seule, et on passe aux groupes. On passe de suite aux groupes si le premier coup ou l'un des coups qui doivent faire la fourchette tombe dans le fossé. Les groupes se font par pièce et sont en général de 10 coups ; chaque groupe sert à faire les corrections nécessitées par les coups courts observés sur le glacis, en se réglant sur la table de corrections (page 286). Le premier groupe se fait avec la hausse qui a donné un coup dans le fossé, ou le coup court de la dernière fourchette, et peut se borner à trois coups seulement si ceux-ci sont tous longs ou tous courts.

§ 5.

Tir d'enfilade.

Le terre-plein à enfiler est divisé en zones et l'on prend autant de zones que leur longueur contient la double profondeur de la bande contenant la moitié des coups. On affecte à chaque zone un certain nombre de pièces.

L'occasion d'enfiler un terre-plein non pourvu de traverses se présente bien rarement, et si cela arrive, ce n'est que dans la première période du siège, mais alors la distance est telle que la charge de combat donne toujours une courbure suffisante pour l'enfilade, toutes les pièces peuvent donc tirer avec cette charge avec des élévations convenant aux distances de la zone à battre.

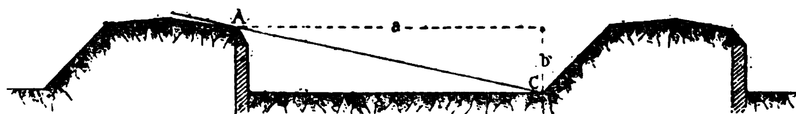


Fig. 53.

Le terre-plein (fig. 53) étant pourvu de traverses, chaque pièce détermine sa trajectoire de façon qu'elle passe par la crête de la tra-

verse la plus centrale de chaque zone et par le pied de la traverse suivante. Si a est trop petit pour ne pas permettre l'emploi d'une charge suffisante pour le choc que l'on veut obtenir, on l'augmente de 1 ou plusieurs mètres. Les trajectoires dans ce cas ne battent les artilleries qu'après avoir émoussé les traverses : en attendant les éclats des obus blessent les servants. Si la distance des traverses est inconnue, on détermine la charge de façon que l'angle de chute soit de 10° à 15°. La pièce d'aile, c'est-à-dire celle qui est la plus éloignée du prolongement de la magistrale du terre-plein enfilé, peut généralement employer une charge plus forte et diriger son feu sur les communications qui existent en arrière des traverses et sur la plate-forme basse du rempart.

Exécution du tir. — La charge étant établie, on tire le premier coup en visant la crête du parapet, et les coups suivants en visant un faux but. Quelle que soit la zone assignée à chaque pièce, toutes les pièces commencent le tir avec la hausse minimum, c'est-à-dire avec la hausse correspondant à la première zone, et les fourchettes se font à cheval sur la crête. La première fourchette a pour ouverture une double bande que l'on réduit ensuite à une bande simple. Les groupes se font par pièce et sont en général composés de 10 coups. Le premier groupe se fait avec chaque pièce sur la première zone, avec la hausse qui a donné le dernier coup au delà de l'arête et peut être limité à 3 coups lorsque ceux-ci sont courts.

Après avoir effectué les corrections par l'observation des coups courts, les pièces destinées à battre les zones au delà de la première augmentent leur hausse de la quantité nécessaire pour porter les trajectoires respectives au centre de chaque zone.

On effectue les corrections correspondantes pour chaque groupe successif, corrections résultant de l'observation des coups courts au moyen de la *Table des corrections* (page 286).

Pour les zones éloignées, on aura peu de coups courts ou point du tout. Pour être donc assuré que le tir n'est pas trop long, il faudra, tous les deux groupes, tirer un coup avec une hausse convenablement diminuée afin d'obtenir un coup court qui servira de contrôle aux autres.

§ 6.

Règles pour le commandant de batterie.

Au moment d'ouvrir le feu, le commandant doit déjà avoir une idée exacte et très claire du but que sa batterie a à remplir. Outre la connaissance de la distance. il se sera déjà procuré avec une approximation convenable les dimensions du but; il aura copié dans les tables du tir toutes les données du pointage et calculé le pourcent des coups que dans un tir rectifié on peut mettre dans le but et par conséquent en dehors.

De la table des corrections, il aura extrait les données qui, d'après l'observation des coups tombés en dehors du but, doivent conduire à la correction des demi-bandes ou des quarts de bandes.

Chaque chef de pièce est en possession d'un carnet contenant très clairement, très proprement écrit, et avec ordre toutes ces données (voyez l'exemple à la fin du paragraphe). Sur le même carnet est réservé une place pour noter les hausses fictives qu'il y aura lieu d'adopter par suite des corrections successives; une autre place est également réservée pour l'observation des coups en dehors du but et spécialement des coups courts ou longs. Ce carnet, quoique entre les mains du chef de pièce, sert plutôt au commandant pour juger des progrès du tir et de l'utilité des corrections.

Sans observations le tir est nul. Pour l'ajustement du tir, les observations doivent être faites par le commandant lui-même et continuées par lui aussi longtemps que cela lui est possible.

Si les observations peuvent être faites de la batterie, il est nécessaire qu'un homme soit désigné pour cela pour chaque pièce : le chef de pièce ou le pointeur. Il est rare cependant que l'on puisse observer de la batterie. alors on délègue au poste d'observation un homme assez intelligent (un au moins) qui, ayant assisté aux observations faites par le commandant pendant l'ajustement du tir, connaît pratiquement les règles pour distinguer les coups courts des coups longs, des coups justes et des coups douteux. Cet observateur signale, d'après des conventions données, les résultats coup par coup, et si la chose n'est pas possible, il les note et les transmet au commandant après chaque salve. Le commandant, ou son remplaçant. transmet ces observations aux chefs de pièce, qui les notent dans leurs carnets.

Il est utile, pour la bonne marche du tir, que les pièces tirent dans le même ordre; d'autre part, cet ordre régulier peut servir de règle utile à l'ennemi. On peut donc faire feu à volonté, aussi rapidement que le permettent un chargement soigneux, un pointage rapide et surtout la possibilité et la facilité des observations. Si l'observateur est éloigné de la batterie, le commandant doit porter toute son attention à ne pas attribuer à

une pièce les résultats qui ne lui appartiennent pas. Il est donc très utile de tenir note de l'ordre dans lequel les pièces tirent dans une salve.

Exemple. — On doit battre en brèche, avec un tir indirect, un mur d'escarpe : la hauteur de celui-ci est de 6 *m*, la limite supérieure est de 1 *m* en-dessous de l'arête du glacis et distante de 30 *m*. En face se trouvent deux positions convenables pour une batterie de 16 *cm*. Toutes les deux dominent le glacis avec un angle de site d'environ — 0°5, l'une est à 900 *m* de la crête, l'autre à 1 200 *m*. Quelle est celle des deux positions que l'on doit choisir ?

Les conditions du profil donnent $a = 30$ *m*, et si nous mettons la limite du but à 1/3, c'est-à-dire à 2 *m* du fond du fossé, nous avons $b = 5$. La formule

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{b}{a} + \frac{D \operatorname{tg}\varepsilon - b}{D + a}$$

donne pour 1 200 *m*

$$\operatorname{tg}\omega = 0{,}167 - 0{,}013 = 0{,}154$$

et pour 900 *m*

$$\operatorname{tg}\omega = 0{,}167 - 0{,}014 = 0{,}153.$$

A ces tangentes correspondent :

Pour 1 200 *m*, la charge de 1,5 *kg* (vitesse de choc 188 *m*, force vive 54 dynamodes) ;

Pour 900 *m*, la charge de 1,1 *kg* (vitesse de choc 162 *m*, force vive 40 dynamodes).

La force vive de 40 dynamodes atteint à peine la limite suffisante pour la démolition. Mais la plus grande précision propre des petites distances permet de rehausser la limite du but en la portant à la moitié de la hauteur du mur. Dans ce cas $b = 4$, et l'on obtient

$$\operatorname{tg}\omega = 0{,}133 - 0{,}012 = 0{,}121.$$

A cet angle de chute correspond une charge de 1,3 *kg* avec 49 dynamodes de force vive au choc, quantité suffisante, quoique sensiblement inférieure à celle qui correspond à l'autre charge.

Comparons maintenant le nombre des coups utiles qui, sur 100 coups tirés, peuvent atteindre le but. Celui-ci, lorsqu'on tire à 1 200 *m*, a une hauteur vulnérable de 4 *m*, la hauteur de la bande contenant 50 p. 100 est également de 4 *m*. Par conséquent, dans un tir centré, 50 coups sur 100 frapperont le mur. En tirant à 900 *m*, si on veut avoir le centre de tir à la même hauteur que dans le tir à 1 200 *m*, il faut diviser le but en deux parties $h_1 = 2$ *m*, $h_2 = 1$ *m* et le pourcent des coups utiles est, pour un tir réglé (page 237)

$$\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2h_1}{F}\right) + P\left(\frac{2h_2}{F}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{4}{3}\right) + P\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}[63 + 35] = 49 \text{ p. } 100.$$

Le pourcent est à peu près le même dans les deux cas, mais la force vive est moindre dans le dernier. Ce désavantage est compensé par le meilleur centrage des coups, parce qu'en tirant de 900 *m*, les coups utiles sont disséminés sur un but haut seulement de 3 *m*. En outre, dans le tir à 900 *m*, l'angle de chute a pour tangente 0,131, c'est-à-dire qu'il est un peu plus grand que l'angle voulu, le but peut donc recevoir un peu plus de 49 coups. On pourrait même prendre la charge de 1,35 *kg*, mais l'avantage au point de vue de la force vive serait insignifiant.

On voit d'après ce qui précède que les deux positions ne présentent pas des avantages bien différents, eu égard aux données. D'autres considérations doivent entrer en ligne de compte : par exemple, parmi les conditions d'offensive, la facilité des observations, toujours plus faciles aux petites distances ; parmi les conditions défensives, la facilité des approvisionnements et de la construction, et le plus grand abri.

Supposons que l'ensemble des conditions soit en faveur de la position à 1200 *m*, et examinons de quelle façon la batterie construite et armée de quatre pièces doit commencer et conduire son feu.

Nous donnons ici un modèle de carnet de tir que l'on donne aux chefs de pièce, rédigé conformément aux données de tir et de la table de corrections.

Pointage initial à la crête du glacis.	Corrections (*).
Hausse 315 — Dérive 32 Élévation réduite $6^{o},3$.	1^{mm} de dérive fictive corrige de $0^{m},9$. 4^{mm} de hausse fictive corrigent une bande de (26^{m}).

Tir réglé 25 courts p. 100.

Si sur 10 coups tirés on a coups courts		Si sur 20 coups tirés on a coups courts	
aucun, diminuer	5 ou plus, augmenter	3 ou moins diminuer	8 ou plus augmenter
la hausse fictive de 2^{mm}.		la hausse fictive de 1^{mm}.	

COUPS.	HAUSSE fictive.	RÉSULTAT.	COUPS.	HAUSSE fictive.	RÉSULTAT.	COUPS.	HAUSSE fictive.	RÉSULTAT.
1			11			21		
2			12			22		
3			13			23		
4			14			24		
5			15			25		
6			16			26		
7			17			27		
8			18			28		
9			19			29		
10			20			30		

(*) On suppose que le pointage indirect est fait avec la ligne de mire latérale (page 280).

Ce carnet dont on remplit les colonnes pendant le tir est, comme nous l'avons dit, plus utile au commandant qu'au chef de pièce, pour juger à chaque instant des progrès du tir et faire faire une correction lorsqu'il la croit nécessaire.

Toutes les pièces sont pointées sur la crête du glacis, au point désigné par le commandant, avec les données du pointage consignées sur le carnet. On fixe alors les faux buts à côté des pièces et on note les hausses fictives.

Nous donnons dans le tableau suivant un exemple de l'ajustement du tir. Dans la colonne *hausses*, on inscrit seulement les corrections en plus ou en moins sur la première hausse fictive, correspondant au pointage initial commun. Dans la formation des fourchettes, les pièces tirent par ordre l'une après l'autre ; au troisième coup la fourchette d'une bande est

faite et on commence les groupes pour chaque pièce. Le signe — signifie un coup sur le glacis, le signe + sur le parapet et au delà, le signe 0 est un coup dans le fossé. Dans le tableau, on ne tient pas compte des corrections latérales.

1re PIÈCE.			2e PIÈCE.			3e PIÈCE.			4e PIÈCE.		
Nos	Hausses.	Résultats.	Nos	Hausses.	Résultats.	Nos	Hausses.	Résultats.	Nos	Hausses.	Résultats.
1	=	—	1	8	+	1	4	+	1	4	—
2	4	0	2	4	0	2	»	+	2	»	0
3	»	0	3	»	+	3	»	+	3	»	0
4	»	—	4	»	+	4	2	+	4	»	—
5	»	0	5	»	0	5	»	0	5	»	0
6	»	0	6	»	0	6	»	+	6	»	0
7	»	—	7	»	+	7	»	0	7	»	0
8	»	0	8	»	0	8	»	0	8	»	—
9	»	—	9	»	0	9	»	0	9	»	0
10	»	—	10	»	—	10	»	+	10	»	0
11	»	0	11	»	0	11	»	0			
						12	»	—			
						13	»	0			
Sur 10 coups avec la même hausse on a obtenu 4 coups courts, ne suffisant pas pour corriger.			Sur 10 coups avec la même hausse, il n'y a eu qu'un coup court, on corrige d'une demi-bande (diminuer la hausse fictive de 2mm).			Les 3 premiers coups avec la même hausse sont longs. On corrige de suite d'une moitié de bande (2mm); des 10 autres coups tirés, un seul est court on corrigera encore de 2mm.			Sur 10 coups, 3 courts. Bon tir.		

NOTES

NOTE I

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS EMPIRIQUES EN ÉQUATIONS RATIONNELLES

L'objet de la présente Note est la résolution du problème suivant :

Étant donné un certain nombre de portées correspondant à autant d'angles de projection, en admettant la résistance directement opposée au mouvement et proportionnelle à une puissance inconnue de la vitesse, en déterminer le coefficient et l'exposant.

§ 1

Les équations des pages 80-82 qui donnent y et θ dans l'hypothèse d'une retardation γv^n dirigée en sens contraire de la vitesse, conduisent immédiatement aux formules suivantes

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1+z+\frac{m-1}{m}z^2\frac{V^2\cos^2\varphi}{gx^2}(x\,\mathrm{tg}\,\varphi-y)$$

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m-1} = 1+\frac{m-1}{z}z\frac{V^2\cos^2\varphi}{gx}(\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{tg}\,\theta)$$

Divisant la première par la seconde, et résolvant par rapport à z, il vient

$$z=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{tg}\,\theta-\dfrac{gx}{V^2\cos^2\varphi}}{\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,\varphi-y}{x}-\dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{tg}\,\theta}{m}};$$

remplaçons maintenant z et m par les valeurs connues, c'est-à-

dire $z=(2n-2)cV^{n-2}x$ (1), $m=\frac{2n-2}{n-2}$, et posons, pour abréger, $cV^{n-2}=\frac{1}{H}$, $\frac{g}{V^2}=k$, il vient :

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{H}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\theta-\frac{kx}{\cos^2\varphi}}{n(x\operatorname{tg}\varphi-y)+(n-2)(x\operatorname{tg}\theta-y)}.$$

Cette équation est la base de la théorie que nous allons développer.

Quand l'expérience a fourni la valeur de la vitesse initiale, et un système d'angles de projections φ, ainsi que les portées x correspondantes, et que l'on veut déterminer au moyen de ces quantités, les valeurs les plus probables du coefficient c et de l'exposant n de la retardation cv^n, il n'est pas possible d'employer directement la méthode des moindres carrés, parce qu'on doit opérer sur une équation de forme transcendante, celle qui lie les angles aux portées. Il faut donc recourir à une méthode indirecte.

Si l'angle de projection n'est pas considérable, de nombreuses expériences ont prouvé que, dans l'air, l'équation de la trajectoire pouvait être remplacée avec une approximation suffisante par l'équation empirique suivante :

$$\text{(2)} \qquad y=x\operatorname{tg}\varphi-\frac{x^2}{2\cos^2\varphi}(k+ax+bx^2)$$

a et b étant deux quantités dépendantes de la vitesse initiale, de la valeur maximum de x, et sensiblement indépendantes de φ.

Si donc l'expérience a fourni une série de portées x pour une série correspondante d'angles φ, ceux-ci peuvent être donnés avec une approximation suffisante par l'équation

$$\text{(3)} \qquad \sin 2\varphi = kx+ax^2+bx^3$$

équation que l'on tire de (2) en y faisant $y=0$. Les coeffi-

(1) D'après les notations adoptées dans les pages précitées, on a $z=(2n-2)\beta\gamma V^{n-2}$, mais comme, dans la suite de l'ouvrage, nous donnons à β et à γ des significations différentes de celles que nous avons données à ces mêmes lettres, nous avons posé $\beta\gamma=c$, par suite, en faisant $\beta=1$, on a, pour valeur de la retardation, cv^n.

cients a et b peuvent alors être facilement déterminés par la méthode des moindres carrés.

Les coefficients a et b de l'équation (3) étant déterminés, il est facile d'obtenir les inclinaisons θ, en différenciant l'équation (2), on a ainsi :

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{x}{\cos^2\varphi}\left(k + \frac{3}{2}ax + 2bx^2\right).$$

§ 2.

Pour simplifier les calculs qui vont suivre, posons :

$$a = \frac{2}{3}k\alpha \quad , \quad b = \frac{1}{6}k\beta .$$

Les équations (2) et (4) prennent alors la forme,

$$(5) \qquad y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{kx^2}{2\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{2}{3}\alpha x + \frac{1}{6}\beta x^2\right),$$

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{kx^2}{\cos^2\varphi}\left(1 + \alpha x + \frac{1}{3}\beta x^2\right).$$

On tire de ces deux équations,

$$(7) \qquad \begin{cases} x\operatorname{tg}\varphi - y = \dfrac{kx^2}{2\cos^2\varphi}\left(1 + \dfrac{2}{3}\alpha x + \dfrac{1}{6}\beta x^2\right), \\ x\operatorname{tg}\theta - y = -\dfrac{kx^2}{2\cos^2\varphi}\left(1 + \dfrac{4}{3}\alpha x + \dfrac{1}{2}\beta x^2\right), \\ \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta - \dfrac{kx}{\cos^2\varphi} = \dfrac{kx^2}{\cos^2\varphi}\left(\alpha + \dfrac{1}{3}\beta x\right). \end{cases}$$

D'autre part, d'après l'équation (1), on a,

$$(8) \qquad n(x\operatorname{tg}\varphi - y) + (n-2)(x\operatorname{tg}\theta - y) = \mathrm{H}\left(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta - \frac{kx}{\cos^2\varphi}\right).$$

Remplaçant dans cette égalité $(x\operatorname{tg}\varphi - y)$, $(x\operatorname{tg}\theta - y)$, $(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta)$ par les valeurs (7) et réduisant, il vient :

$$(9) \qquad 1 + \frac{1}{3}(4-n)\alpha x + \frac{1}{6}(3-n)\beta x^2 = \mathrm{H}\left(\alpha + \frac{1}{3}\beta x\right).$$

Cette égalité devant toujours se vérifier quel que soit x, il faut

que l'on ait alors $\beta=0$, ce qui donne $n=4$, et $H=\frac{1}{\alpha}$, ou bien $\beta=\alpha^2$, ce qui donne $n=3$ et $H=\frac{1}{\alpha}$. En effet l'identification entre l'équation empirique et l'équation rationnelle n'a lieu que dans les deux cas de $n=3$ ou de $n=4$.

Si α et β ne satisfont pas aux conditions précédentes, l'équation (9) ne peut se vérifier pour toutes les valeurs de x. On peut toutefois chercher pour n et H des valeurs telles que la différence entre les deux membres de l'équation (9) ait une valeur très petite dans les limites des distances données par l'expérience.

Pour trouver plus facilement ces valeurs de n et de H, posons :

$$(10) \qquad x=\frac{3\alpha}{\beta}z \qquad n=3+\gamma\varepsilon \qquad H=\frac{\alpha}{\beta}(1-\gamma+\gamma\eta)$$

ε et η étant deux quantités inconnues, et γ une constante dépendant de α et de β, que nous allons déterminer.

Substituant dans l'équation (9), il vient :

$$\beta+(1-\gamma\varepsilon)\alpha^2 z-\frac{3}{2}\gamma\varepsilon\alpha^2 z^2=\alpha^2(1-\gamma+\gamma\eta)(1+z).$$

Déterminons maintenant γ de façon qu'il satisfasse à la relation $\beta=\alpha^2(1-\gamma)$, l'équation précédente se réduit à

$$(11) \qquad 2z-\varepsilon z(2+3z)-2\eta(1+z)=0.$$

Cette équation, de même que l'équation (9) ne peut être vérifiée avec des valeurs constantes de ε et de η pour toutes les valeurs de z ; en admettant donc la constance de ε et de η, on commettra, pour chaque valeur de z, une certaine erreur δ qui sera exprimée par

$$\delta=2z-\varepsilon z(2+3z)-2\eta(1+z).$$

Or, cette équation représente une parabole dont les coordonnées sont δ et z. Il faut donc déterminer cette parabole de façon qu'entre les valeurs expérimentales maxima et minima de z, elle s'écarte le moins possible de la droite $\delta=0$.

C'est maintenant que nous pouvons faire usage de la méthode des moindres carrés. Appelant X la distance maximum d'expérience et z' ce que devient z quand x devient X, la règle des

moindres carrés consiste à déterminer ε et η, de façon que l'intégrale

$$(12) \qquad \int_0^{z'} [2z - \varepsilon z(2+3z) - 2\eta(1+z)]^2 p_z dz$$

soit un minimum (p_z étant le poids correspondant à la distance z). Au premier abord il semble que la valeur la plus expéditive de p_z est l'unité, cependant un grand nombre d'expériences ont montré que la fonction p_z qui donne les meilleurs résultats est $p_z = z(z' - z)$.

Posant donc

$$(13) \qquad 2\mathrm{I} = \int_0^{z'} [\varepsilon z(2+3z) - 2\eta(1+z) - 2z]^2 (z'-z) z\, dz$$

nous avons :

$$(14) \qquad \frac{d\mathrm{I}}{d\varepsilon} = \int_0^{z'} [\varepsilon z(2+3z) - 2\eta(1+z) - 2z](z'-z)(2z^2+3z^3)dz = 0$$

$$(15) \qquad \frac{d\mathrm{I}}{d\eta} = \int_0^{z'} [\varepsilon z(2+3z) - 2\eta(1+z) - 2z](z-z')(2z+2z^2)dz = 0.$$

Ajoutons (14) et (15), il vient :

$$(16) \qquad \frac{d\mathrm{I}}{d\varepsilon} + \frac{d\mathrm{I}}{d\eta} = \int_0^{z'} [\varepsilon z(2+3z) - 2\eta(1+z) - 2z](z-z')(2z-3z^3)dz = 0.$$

On tire alors de cette équation et de l'équation (14), après avoir opéré les réductions

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\varepsilon} + \frac{d\mathrm{I}}{d\eta} = \frac{\varepsilon}{210}(70z'^4 + 63z'^5 - 43z'^6 - 45z'^7)$$
$$+ \frac{\eta}{30}(20z'^3 + 10z'^4 - 9z'^5 - 6z'^6) - \frac{1}{15}(5z'^4 - 3z'^6) = 0$$

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{70}(14z'^5 + 28z'^6 + 15z'^7)$$
$$+ \frac{\eta}{30}(10z'^4 + 15z'^5 + 6z'^6) - \frac{1}{5}(z'^5 + z'^6) = 0.$$

Supprimant les facteurs communs, et chassant les dénominateurs, il vient :

$$3\varepsilon z'(14 + 28z' + 15z'^2) + 7\eta(10 + 15z' + 6z'^2) = 42z'(1+z');$$
$$\varepsilon z'(70 + 63z' - 42z'^2 - 45z'^3) + 7\eta(20 + 10z' - 9z'^2 - 6z'^3) = 14z'(5 - 3z'^2).$$

Tirant de ces équations les valeurs de ε et de η, il vient :

$$\varepsilon = \frac{46\frac{2}{3} + 70z' + 14z'^2}{46\frac{2}{3} + 140z' + 139z'^2 + 48z'^3 + 6z'^4}$$

$$\eta = z'^2 \frac{14 + 24z' + 6z'^2}{46\frac{2}{3} + 140z' + 139z'^2 + 48z'^3 + 6z'^4}.$$

§ 3.

Au moyen de ces deux équations, nous avons calculé une première table des valeurs de ε et de η, correspondant à cinquante-quatre valeurs de z' comprises entre $-0{,}3$ et $+0{,}3$. Connaissant alors les valeurs de α et β et la distance maximum X, on a

$$z' = \frac{\beta}{3\alpha} X = \frac{4}{3} \frac{b}{a} X$$

et l'on peut calculer avec cette table n et H, au moyen des relations (10), c'est-à-dire

$$n = 3 + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) \varepsilon \qquad H = \frac{1}{\alpha}(1 - \eta) + \frac{\alpha}{\beta} \eta$$

ou

$$n = 3 + \varepsilon - \frac{3kb}{3\alpha^2} \varepsilon \qquad H = \frac{2}{3} \frac{k}{a}(1 - \eta) + \frac{1}{4} \frac{a}{b} \eta.$$

Mais ces derniers calculs peuvent encore être abrégés; dans la table, au lieu de faire figurer ε, η et $\frac{4}{3} \frac{b}{a}$ X, on y substitue cinq autres quantités fonctions de ces trois dernières, savoir

$$\frac{b}{a} X, \qquad A = 3 + \varepsilon, \qquad A' = \frac{8}{3} \varepsilon, \qquad B = \frac{2}{3}(1 - \eta), \qquad B' = \frac{1}{4} \eta$$

ou les logarithmes de ces quantités, car il n'est pas nécessaire de faire aucune interpolation, puisqu'on peut, lorsque la valeur exacte de $\log \pm \frac{b}{a}$ X n'est pas contenue dans la table, supposer sans inconvénient la distance maximum X augmentée ou diminuée de quelques centaines de mètres. Telle est la table XIV. Nous pouvons donc, en résumant ce qui précède, énoncer la proposition suivante.

Proposition I.

Ayant déterminé par la règle des moindres carrés les coefficients a *et* b *de l'équation empirique*

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3, \left[k = \frac{g}{V^2}\right]$$

la réduire à une équation rationnelle.

On calcule la valeur de $\log \pm \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} X$, *suivant que* b *est positif ou négatif (X représentant la valeur maximum de* x, *pour laquelle l'équation précédente est admissible). On cherche dans la table XIV les valeurs correspondantes de A, log A', log B, loj B'* (¹) *et au moyen de ces dernières, on calcule*

$$n = \mathrm{A} - \frac{kb}{a^2}\mathrm{A}' \qquad \mathrm{H} = \frac{k}{a}\mathrm{B} + \frac{a}{b}\mathrm{B}' \text{ (²)}$$

La retardation est

$$f(v) = cv^n, \qquad c = \frac{1}{\mathrm{HV}^{n-2}}$$

et les équations rationnelles du mouvement sont

$$\sin 2\varphi = \frac{k\mathrm{H}^2}{n(n-1)x}\left\{\left[1 + \frac{n-2}{\mathrm{H}}x\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} - \left[1 + \frac{2n-2}{\mathrm{H}}x\right]\right\}$$

(Cette équation reproduira les résultats de l'équation empirique)

$$\frac{g}{u^2} = k\left[1 + \frac{n-2}{\mathrm{H}}x\right]^{\frac{n-2}{2}}, \quad [v\cos\theta = u\cos\varphi];$$

$$t = \frac{\mathrm{H}}{(n-1)\mathrm{V}\cos\varphi}\left\{\left[1 + (n-2)\frac{x}{\mathrm{H}}\right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1\right\};$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{k\mathrm{H}^2}{2n(n-1)\cos^2\varphi}\left\{\left[1 + \frac{n-2}{\mathrm{H}}x\right]^{\frac{2n-2}{n-1}} - \left[1 + \frac{2n-2}{\mathrm{H}}x\right]\right\};$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{k\mathrm{H}}{n\cos^2\varphi}\left\{\left[1 + (n-2)\frac{x}{\mathrm{H}}\right]^{\frac{n}{n-2}} - 1\right\}.$$

Dans toutes ces équations, les valeurs de x, *H,* v, *V, sont exprimées par les mêmes unités que celles qui servent à exprimer* x *dans l'équation empirique.*

(¹) On ne doit pas interpoler; si, par exemple, on trouve

$$\log + \frac{b}{a}\mathrm{X} = 2{,}900$$

on prend (b étant positif)

$$\mathrm{A} = 3{,}85143, \qquad \log \mathrm{A}' = \bar{0}{,}35765$$
$$\log \mathrm{B} = \bar{1}{,}82253, \qquad \log \mathrm{B}' = \bar{4}{,}89886$$

(²) Faire attention au signe de b.

On a fait de nombreuses applications de la proposition précédente, et toujours avec succès, comme nous allons le vérifier par les exemples qui suivent.

Canon de 7° BR. — Les expériences sur les angles de projection de ce canon peuvent être représentées par l'équation suivante :

$$\sin 2\varphi = 0{,}0061283x + 0{,}00019018x^2 - 0{,}000000188x^3 \quad , \quad (V = 400m)\,[1]$$

Les distances sont exprimées en hectomètres. La distance maximum d'expérience était de 3 538 *m*. Par suite, nous poserons $X = 35{,}38$, il en résulte que l'on a

$$\log - \frac{b}{a} X = \bar{2},544.$$

La valeur de $\log - \frac{b}{a} X$ la plus rapprochée de cette dernière dans la table XIV est $\bar{2},528$: à cette valeur correspondent

$$A = 4{,}07142 \qquad \log A' = 0{,}45582$$
$$\log B = 9{,}82363 \qquad \log B' = 6{,}20695$$

par conséquent, on a,

$$-\frac{kb}{a^2} A' = 0{,}09099 \quad , \quad \frac{k}{a} B = 21{,}469 \quad , \quad \frac{a}{b} B' = -0{,}163 ,$$

et par suite,

$$n = 4{,}16241 \quad , \quad H = 21{,}306.$$

La valeur de la retardation moyenne de l'air est

$$f(v) = \frac{v^n}{HV^{n-2}} = 0{,}0023421\, v^{4{,}16241}$$

l'unité étant l'hectomètre.

Nous donnons ici le tableau comparatif des résultats de la formule empirique et de la formule rationnelle.

PORTÉES.	FORMULE empirique.	FORMULE RATIONNELLE.		
Mètres.	φ	φ	u	t
1 200	2°53′,2	2°53′,3	277ᵐ	3″,72
2 400	7°21′,5	7°21′,4	226ᵐ	8″,63
3 600	13°38′,3	13°38′,7	197ᵐ	14″,69

(1) Il s'agit ici des anciennes expériences qui sont les plus complètes.

On peut considérer l'accord comme parfait.

A la page suivante, nous indiquons la méthode à suivre pour calculer les valeurs rationnelles de u, φ, t, méthode qui peut servir pour tous les cas analogues.

Canon rayé russe de 24 livres (diamètre de l'obus 0,1524 m; poids 29,20 kg). — Le général Mayevski, au moyen des résultats d'expérience avec une charge de 2,866 kg, a calculé par la méthode des moindres carrés, les coefficients de l'équation empirique :

$$\sin 2\varphi = 0{,}0^{4}28758\,x + 0{,}0^{9}77903\,x^{2} - 0{,}0^{14}37363\,x^{3}$$

Le pied russe est pris pour unité et la distance maximum est 17 164 pieds (1).

En appliquant la proposition I, on obtient :

$$n = 4{,}75141 \quad , \quad H = 24287{,}32.$$

Au moyen de ces résultats, la formule rationnelle donne les angles correspondant aux portées de 6000 p, 12000 p, 18000 p, c'est-à-dire

$x = 6000\,p$	$12000\,p$	$18000\,p$
$\varphi = 5°46'$	$13°24'$	$24°14'$

La formule empirique donne pour les mêmes distances

$\varphi = 5°46'$	$13°24'$	$24°14'$.

(1) *Traité de balistique*, Paris 1872, p. 285.

TABLEAU.

$n = 4{,}16241$	x . . . . hectomètres	12	24	36
$\log n = 0{,}61934$	$N = 1 + \frac{n-2}{H}x$	2,2179	3,4358	4,6537
$\log(n-1) = 0{,}50002$ $\log(n-2) = 0{,}33494$		1,2179	1,2179	
$\log 2 = 0{,}30103$	$\log N$	0,34594	0,53608	0,66780
	$\log(\log N)$	9,53900	9,72919	9,82465
$\log \frac{2}{n-2} = 9{,}96609$	$\log \frac{2}{n-2}$	9,96609	9,96609	9,96607
$H = 21{,}306$	$\log\left(\frac{2}{n-2}\log N\right)$	9,50509	9,69528	9,79074
$\log H = 1{,}32850$ $C\log H = 8{,}67150$	$\frac{2}{n-2}\log N$	0,31996	0,49577	0,61765
$\log(n-2) = 0{,}33494$ $\log(x=12) = 1{,}07918$	$\log k$	7,78734	7,78734	7,78734
$\log \frac{n-2}{H}x = 0{,}08562$	$\log k N^{\frac{2}{n-2}}$	8,10730	8,28311	8,40499
$\frac{n-2}{H}x = 1{,}2179$	$\frac{g}{u'^2} = k N^{\frac{2}{n-2}}$	0,01280	0,01919	0,02541
	u'	277	228	197
$C\log H = 8{,}67150$ $\log 2 = 0{,}30103$	$\frac{2}{n-2}\log N$	0,31993	0,49577	0,61765
$\log(n-1) = 0{,}50002$	$2\log N$	0,69188	1,07206	1,33560
$\log(x=12) = 1{,}07918$ $\log \frac{2n-2}{H}x = 0{,}55173$	$\frac{2n-2}{n-2}\log N = \frac{2}{n-2}\log N + 2\log N$. . .	1,01184	1,56788	1,95325
$\frac{2n-2}{H}x = 3{,}5623$	$N^{\frac{2n-2}{n-2}}$	10,2764	36,9684	89,7946
	$1 + \frac{2n-2}{H}x$	4,5623	8,1246	11,6869
$\log k = 7{,}78734$		3,5623	3,5623	
$2\log H = 2{,}65700$ $C\log n = 9{,}38066$ $C\log(n-1) = 9{,}49998$	$N^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - \frac{2n-2}{H}x$	5,7141	28,8438	78,1087
$\log \frac{kH^2}{n(n-1)} = 9{,}32498$	$\log\left(N^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - \frac{2n-2}{H}x\right)$.	0,75695	1,46005	1,89270
	$\log \frac{kH^2}{n(n-1)}$	9,32498	9,32498	9,32498
	$C\log x$	8,92082	8,61979	8,44370
	$\log \sin 2\varphi = \log \frac{kH^2}{n(n-1)x}\left(N^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - \frac{2n-2}{H}x\right)$. .	9,00275	9,40482	9,66133
	φ	2°53′,3	7°21′,4	13°38′,7
$\log H = 1{,}32850$ $C\log V = 9{,}39794$ $C\log(n-1) = 9{,}49998$	$\frac{n-1}{n-2}\log N$	0,50592	0,78390	0,97662
$\log \frac{H}{(n-1)V} = 0{,}22612$	$N^{\frac{n-1}{n-2}}$	3,20565	6,08002	9,47581
	$\log\left(N^{\frac{n-1}{n-2}} - 1\right)$.	0,34354	0,70587	0,92818
	$\log \frac{H}{(n-1)V}$	0,22642	0,22642	0,22642
	$C\log\cos\varphi$.	0,00055	0,00859	0,01241
	$\log \frac{H}{V\cos\varphi}\left(N^{\frac{n-1}{n-2}} - 1\right)$.	0,57051	0,93588	1,16705
	$t = \frac{H}{V\cos\varphi}\left(N^{\frac{n-1}{n-2}} - 1\right)$.	3″,719	8″,627	14″,691

Canon de 8 *cm belge* (diamètre de l'obus 0,0796 *m* poids 4,277 *kg*). — Dans un opuscule du major Le Boulengé de l'artillerie belge, l'inventeur distingué du chronographe qui porte son nom, de la clepsydre et d'un télémètre de campagne, on trouve relatées un certain nombre d'expériences exécutées

dans le but de déterminer au moyen de la clepsydre électrique les durées de la trajectoire de 200 *m* en 200 *m* jusqu'à 2000 *m* (¹). Ces expériences, en ce qui regarde les angles de projection, laissent beaucoup à désirer, en ce sens qu'on n'a tiré que trois coups à chaque distance excepté à 1400 *m* où l'on n'en a tiré que deux, et à 200 *m*, où il en fut tiré quatre. En outre, on n'avait pas mesuré l'angle de relèvement. Nous avons cependant calculé au moyen de ces expériences, par la méthode des moindres carrés, l'équation suivante (x en hectomètres) :

$$\sin 2\varphi = 0{,}0065724x + 0{,}000199563x^2 - 0{,}0000013699x^3$$

en prenant pour angle de relèvement 16′, angle calculé par le major de Tilly (²).

En appliquant la proposition I à l'équation précédente, nous avons obtenu

$$n = 5{,}1337 \qquad H = 21{,}2707.$$

Nous donnons ici le tableau comparatif des résultats d'expériences et de ceux obtenus au moyen des formules.

DISTANCES.	EXPÉRIENCE.	FORMULE empirique.	FORMULE rationnelle.	HORLOGE.	FORMULE rationnelle.	DIFFÉRENCE.
x	φ	φ	φ	t	t	δt
2,00	0°24′	0°24′	0°24	0″,5497	0″,5407	—0″,0090
4,00	—	0°50′,5	0°50′,5	1″,1482	1″,1224	—0″,0258
6,00	1°30′	1°20′	1°20′	1″,7666	1″,7402	—0″,0264
8,00	1°51′	1°51′,5	1°51′,5	2″,3984	2″,3898	—0″,0086
10,00	2°27′,5	2°25′	2°25′	3″,0491	3″,0690	+0″,0199
12,00	3° 2′	3°1′,5	3°1	3″,7606	3″,7755	+0″,0149
14,00	3°37′,5	3°39′,5	3°39′,5	4″,4726	4″,5077	+0″,0351
16,00	4°13′	4°20′	4°20′	5″,2261	5″,2646	+0″,0385
18,00	5° 4′	5°2′5	5°2′,5	6″,0206	6″,0455	+0″,0249
20,00	5°49′	5°46′,5	5°47′	6″,7641	6″,8495	+0″,0834

L'accord entre la formule empirique et la formule rationnelle est parfait, comme toujours, relativement aux angles. Quant aux durées, les différences

(¹) *Études balistiques expérimentales*, Paris 1869, p. 40 et 41.
(²) *Balistique*, Bruxelles 1875, p. 97.

relevées entre les résultats et le calcul sont inférieures à 9/100 de seconde : différences néanmoins sensibles, étant donnée l'allure trop régulière des signes dont elles sont affectées, si les expériences sur les angles de projection méritaient beaucoup de confiance. Or il faut attribuer la majeure partie de ces différences à l'incertitude des données expérimentales, car il suffit de remarquer que la vitesse mesurée à 29 *m* a varié entre 370,91 *m* et 391,08 *m*, tandis que, comme le fait remarquer le major Le Boulengé, une variation de 7 à 8 *m* est, dans les cas ordinaires, tout à fait exceptionnelle.

C'est aussi à cette variation dans la vitesse initiale et au petit nombre de coups tirés qu'il faut attribuer l'anomalie grave qui résulte de l'ensemble des résultats fournis par la clepsydre. Le major Le Boulengé a trouvé que la meilleure équation pour représenter les durées observées était de la forme

$$t = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \text{ (1)}.$$

Il a admis avec juste raison le terme A indépendant de x, parce que la courbe des temps représentant les résultats donnés par la clepsydre (temps qui représentent les durées effectives de trajet) devait se ressentir de cette particularité, à savoir que la vitesse maximum du projectile n'a pas exactement lieu à la bouche de la pièce, mais un peu en avant, parce que les gaz continuent à agir encore sur le projectile après sa sortie de l'âme. Or, comme le point servant à mesurer la première durée était à 200 *m*, c'est-à-dire lorsque les temps suivent déjà l'allure des lois de la balistique extérieure, il en résulte que, reliant tous les temps par une courbe continue, celle-ci ne doit pas passer par l'origine.

Le major Le Boulengé a trouvé $A = -0,0253445$; ce qui indique que la courbe passe au-dessous de l'origine, et il considère ce fait comme un gage de la régularité des expériences. En réfléchissant plus attentivement à la forme que, grâce à la singularité dont nous avons parlé, devrait réellement avoir la courbe près de l'origine, l'illustre auteur se convaincra que le terme A aurait dû être positif si les résultats de l'expérience eussent été exacts. Cette remarque ne diminue du reste en rien la valeur de la clepsydre électrique, comme instrument de mesure des durées, nous reconnaissons sa supériorité et nous attribuons plutôt les anomalies constatées aux variations de vitesse initiale (2).

---

(1) *Études de balistique expérimentale*, p. 87.

(2) Comme autre exemple, nous prendrons le canon de 16c lourd de la marine française. Données d'expériences $V_0 = 600$. Les tables de tir établies à Gâvre permettent de représenter les portées par la formule

$$\sin 2\varphi = 0,002735\,x + 0,000032573\,x^2 + 0,000000627515\,x^3$$

les distances étant comptées en hectomètres. Cette formule est applicable jusqu'à

§ 4

Expériences du général Mayevski sur les projectiles sphériques de 24 livres.

Les exemples traités jusqu'ici démontrent la correspondance entre les résultats de la formule empirique et ceux de la formule rationnelle trouvée par la Proposition I. Les expériences dont nous avons tiré nos exemples n'ont pas été exécutées, en général, dans des conditions telles qu'elles puissent fournir une grande approximation dans l'appréciation analytique de la résistance, bien que nous ayons toujours trouvé que le degré de cette dernière est toujours entre les limites que les expériences directes lui ont assignées.

6000 m environ. Supposons que la distance expérimentée ait été de 5000 m. Nous supposerons $X = 50$, il en résulte

$$\log \frac{b}{a} X = \bar{2},98373.$$

La valeur la plus approchée de $\log \frac{a}{b} X$ dans la table XIV est 2,972, valeur à laquelle correspond

$$A = 3,83747 \qquad \log A' = 0,34894$$
$$\log B = 1,82411 \qquad \log B' = \bar{3},00221.$$

Par conséquent

$$\frac{kb}{a^3} A' = 0,35993 \qquad \frac{k}{a} B = 55,798 \qquad \frac{a}{b} B' = 0,52223$$

par suite

$$n = 3,4775 \qquad H = 56,320.$$

La valeur de la résistance de l'air sur l'unité de masse (retardation) est donc

$$f(v) = 0,001288\, v^{3,4775}$$

la vitesse étant exprimée en hectomètres.

En déterminant l'angle φ par la formule rationnelle, on trouve pour $X = 5000$ $\varphi = 6°30$ et par la formule empirique 6°31'. On trouve également pour le temps 11"85, et dans la table de tir 12"1. La vitesse u' est de 340 m. Nous donnons dans le tableau suivant la comparaison des résultats de la formule empirique et de la formule rationnelle :

FORMULE EMPIRIQUE.				FORMULE RATIONNELLE.			
φ	u	θ	t	φ	u	θ	t
6° 31'	»	9° 10'	12",1	6° 30'	339	9° 15'	11",85

La valeur de u n'étant pas indiquée dans les tables de Gâvre, nous ne l'avons pas fait figurer dans le tableau.

Au moyen de la relation $u \cos \varphi = v \cos \theta$, on trouve $v = 342$ m. En mettant cette

Afin de se faire une idée de l'approximation que, dans l'évaluation de la résistance, l'on peut obtenir en expérimentant sur les angles de projection, avec tout le soin nécessaire au but que l'on se propose, nous appliquerons la proposition I aux expériences faites par Mayevski en 1858 (¹).

Les tirs ont été faits avec des projectiles sphériques de 24 livres (diamètre 15 *cm*), ayant le moins d'excentricité possible, en employant des charges différentes, et des angles de projection tels que les ordonnées de la trajectoire pouvaient être mesurées par le passage des projectiles à travers des cadres réticulés, placés de distance en distance. Outre les valeurs des ordonnées, on mesurait à chaque coup la vitesse, à une petite distance de la pièce, au moyen de l'appareil Navez, et l'on déterminait la direction du projectile au départ au moyen d'un mince cadre de bois recouvert d'une feuille de plomb, placé à la distance de 5,217 sagènes (²). Chaque projectile était pesé et son diamètre moyen évalué par la mesure de 6 diamètres différents.

Nous donnons ici un extrait de ces expériences, relatives aux deux plus fortes charges.

---

valeur de v dans l'expression $f(v)$, on trouve que la résistance sur l'unité de masse est de 9,270 *m*, le projectile pesant 45 *kg*. La résistance totale qu'il éprouve de la part de l'air est donc

$$\frac{45}{9,81} \times 9,27 = 42,52 \text{ kg}$$

et comme la section droite est de 218 c^2 environ, la pression par c^2 sur l'ogive est de 0,199 *kg*.

On calcule l'abscisse du sommet et l'ordonnée par les formules données plus haut et l'on trouve

$$X_s = 2735 \text{ m} \qquad Y_s = 181.$$

La table de Gâvre donne

$$X_s = 2710 \qquad Y_s = 174$$

soit une différence en moins sur l'abscisse de 25 *m* et sur l'ordonnée de 7 *m*. On peut considérer l'accord comme parfait. Il faut d'ailleurs remarquer que les tables de tir qui donnent les angles de chute, et les coordonnées du sommet ne les donnent pas avec une grande approximation, car ces quantités ne sont déterminées que par des formules dans lesquelles on cherche surtout la simplicité du calcul.

(*Note du traducteur.*)

(¹) Le mémoire dans lequel sont décrites ces expériences est intitulé : *Sur l'expression de la résistance de l'air au mouvement des projectiles sphériques*, et se trouve reproduit dans les *Mélanges physiques et chimiques tirés du Bulletin physico-mathématique et du Bulletin de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. III, Saint-Pétersbourg, 1859, p. 538.

(²) 1 sagène = 7 pieds = 84 pouces = 2,1336 *m*; 1 livre = 0,4095 *kg*.

CHARGE : 8 LIVRES.	DISTANCES.	ORDONNÉES.	CHARGE : 5 LIVRES.	DISTANCES.	ORDONNÉES.
	Sagènes.	Pieds.		Sagènes.	Pieds.
Projectile.	5,217	1,116	*Projectile.*	5,217	1,301
	50	10,10		50	11,56
Poids 29,72 livres.	100	18,85	Poids 29,24	100	20.76
Diamètre 5,88 pouces.	150	24,67	Diamètre 5,85	150	26,27
Inclinaison du canon.	200	28,88	Inclinaison du canon.	200	28,49
1°15′	250	29,42	2°0′	250	27,02
Vitesse à 12,5 sagènes.	300	26,90	Vitesse à 12,5 sagènes.	300	19,69
1 673 pieds.	350	20,33	1 336 pieds.	350	9,49
	400	9,76		—	—
	450	— 5,47		—	—

Les résultats relatifs à la première charge ont été fournis par un tir de 22 coups et à la seconde de 23.

Pour déterminer l'angle de projection, nous avons fait passer une parabole ayant son axe vertical par la bouche de la pièce et par les sommets des deux premières ordonnées, et nous avons supposé que la direction initiale coïncidait avec la tangente à cette parabole. Nous avons ainsi obtenu pour la première trajectoire $\varphi = 1°45',5$ et pour la seconde $\varphi = 2°3'$. Quant aux vitesses initiales, le général Mayevski en donne deux pour la charge supérieure ; la première, consignée dans le mémoire où sont relatées les expériences, est de 1 731 pieds, soit 527,6 *m*, la seconde, indiquée dans son *Traité de balistique*, est de 522 *m* [1]. Nous avons adopté cette dernière, qui a été calculée par une formule plus exacte. Pour la charge inférieure, Mayevski a trouvé 1 367 pieds, soit $416^m,7$. C'est celle que nous avons adoptée, la seule du reste indiquée par le général, et qui correspond avec celle que l'on obtiendrait par les formules données dans son *Traité*.

Au moyen de ces données, nous avons calculé par la méthode des moindres carrés les formules suivantes :

Charge 8 livres :

$$y = 10,744x - 0,673364x^2 - 0,051106x^3 - 0,0015393x^4$$

Charge 5 livres :

$$y = 12,528x - 1,057290x^2 - 0,061176x^3 - 0,0024432x^4$$

l'unité est 50 sagènes pour les abscisses, et le pied pour les ordonnées [2].

(1) Page 107. Par la formule de Didion on obtiendrait 521 *m*.

(2) Dans ces formules, le coefficient de x est $350 \operatorname{tg}\varphi$, et celui de x^2, $\dfrac{(350)^2 g}{2 V^2 \cos^2\varphi}$, V étant exprimé en pieds, et $g = 32,216$ $(9^m,8192)$ gravité à Saint-Pétersbourg.

En appliquant à ces équations mises sous la forme (2) la proposition I, on trouve :

Charge 8 livres : $n = 2{,}96083$, $H = 8{,}77458$
Charge 5 livres : $n = 2{,}43485$, $H = 11{,}42132$

Le tableau suivant indique les résultats que l'on obtient par la formule empirique et la formule rationnelle :

CHARGE : 8 LIVRES.			CHARGE : 5 LIVRES.		
Distance.	Formule empirique.	Formule rationnelle.	Distances.	Formule empirique.	Formule rationnelle.
x	y	y	x	y	y
3 (1 050 p)	24^p,67	24^p,67	3 (1 050 p)	26^p,22	26^p,22
6 (2 100)	27 ,19	27 ,19	5 (1 750)	27 ,03	27 ,03
9 (3 050)	— 5 ,20	— 5 ,22	7 (2 450)	9 ,03	8 ,89

Le général Mayevski propose dans son *Traité*, pour les projectiles sphériques comme pour les projectiles oblongs, diverses formules de résistance suivant la valeur de la vitesse. En voulant les exprimer au moyen d'un seul terme, il a trouvé en moyenne $n = 2{,}86$, nombre qui, on le voit, est compris entre les deux valeurs de n trouvées par la proposition I ; en prenant pour n un nombre entier, il propose la formule suivante :

$$\rho = 0{,}00014\,\pi R^2 v^3$$

[unités : mètres et kilogr.] ([1]), la résistance sur l'unité de masse est donc :

$$f(v) = 0{,}0011 \frac{(2R)^2}{p} v^3$$

2R étant le diamètre du projectile en mètres, et p son poids en kilogr., formule qui concorde avec celle du major Welter (p. 10).

Pour ramener à la valeur unique $n = 3$ les deux valeurs de n trouvées plus haut, il faudrait modifier convenablement les valeurs de H, ce qu'il est facile de faire en s'appuyant sur une proposition que nous établirons dans la note II.

([1]) Lorsqu'on évalue la *force* résistante, on doit prendre le kilogr. de Pétersbourg, c'est-à-dire que, pour obtenir la résistance sur l'unité de masse, il faut multiplier la résistance effective ρ par $\frac{g}{p}$, en mettant pour g la gravité à Saint-Pétersbourg et pour p le poids du projectile obtenu par l'emploi de la balance, poids qui numériquement est constant en tout lieu.

NOTE II

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS RATIONNELLES EN ÉQUATIONS EMPIRIQUES

Dans la Note I, nous avons exposé une méthode qui permet, en partant des résultats d'expérience sur les angles de projection, de trouver rapidement et sans tâtonnements le coefficient et l'exposant qui entrent dans l'expression de la résistance, supposée proportionnelle à une puissance inconnue de la vitesse. La valeur de cet exposant contient naturellement plusieurs chiffres décimaux, dont le nombre ne peut être diminué, sans nuire sensiblement à l'approximation des formules, à moins de faire subir au coefficient une variation correspondante. Dans cette note, nous nous proposons de montrer comment, au moyen de deux tables, on peut calculer facilement la correction à faire subir au coefficient de résistance, pour que l'exposant ne contienne qu'un chiffre décimal, ou soit entier.

L'une des deux tables en question, peut même servir à résoudre le problème inverse de celui que nous avons résolu dans la première note, c'est-à-dire transformer les équations rationnelles en équations empiriques. Ce problème présente pratiquement l'avantage de rendre plus rapides les calculs numériques.

§ 1.

Les nécessités de démonstration nous obligent de traiter le second problème avant le premier.

Supposons la résistance sur l'unité de masse représentée par

cv^n, et posons $\frac{1}{cV^{n-2}} = H$: l'angle de projection φ correspondant à la distance x est donné par l'équation,

$$(1) \qquad \sin 2\varphi = \frac{kH^2}{n(n-1)x}\left\{\left[1+\frac{n-2}{H}x\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} - \left[1+\frac{2n-2}{H}x\right]\right\}$$

k étant égal à $\frac{g}{V^2}$. Il s'agit de déterminer a et b de façon que, jusqu'à une certaine limite de la distance, les angles de projection soient reproduits avec la plus grande approximation possible par l'équation :

$$(2) \qquad \sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3.$$

Les constantes qui entrent dans l'équation rationnelle dépendent de la résistance et sont au nombre de deux, n et H. Les valeurs des constantes a et b de l'équation empirique qui doivent remplacer n et H peuvent varier suivant l'extension que l'on veut donner à l'équation (2), c'est-à-dire suivant la distance maximum X, pour laquelle l'équation empirique doit reproduire l'équation rationnelle.

Les équations qui lient H et n à a et b sont (voir proposition I) :

$$(3) \qquad \begin{cases} n = A - \frac{kb}{a^2}A' \\ H = \frac{k}{a}B + \frac{a}{b}B' \end{cases}$$

équations dans lesquelles A, A', B, B' sont fonctions de z', c'est-à-dire de $\frac{4b}{3a}$ X. Si donc on pouvait résoudre ces équations par rapport à a et b, le problème serait résolu. Mais le degré des équations finales en a et b est trop élevé pour permettre leur résolution. Toutefois au moyen de quelques tables la résolution est rapide.

Dans les équations (3) posons $\frac{kb}{a^2} = F$, on a alors :

$$F = \frac{A-n}{A'} \qquad H = \frac{k}{a}\left(B + \frac{B'}{F}\right)$$

et comme $z' = \frac{4b}{3a}$ X, il vient :

$$\frac{H}{X} = \frac{3}{4z'}\frac{kb}{a^2}\left(B + \frac{B'}{F}\right) = \frac{3}{4z'}(BF + B') = \frac{3}{4z'}\left(\frac{A-n}{A'}B + B'\right)$$

On voit donc que, n étant donné, F et $\frac{H}{X}$ sont des fonctions de z' que l'on calcule facilement au moyen des valeurs de A, A', B, B', inscrites dans la table XIV. La table XV contient les valeurs de $\frac{H}{X}$ et de F, correspondant aux valeurs de z', ou mieux de $\frac{b}{a}$ X, pour les valeurs de n croissant de dixième en dixième depuis $n = 2$ jusqu'à $n = 6,1$.

Si l'on se donne H, n et X, on aura aussi $\frac{H}{X}$: au moyen de la table XV on obtient F et Z, et par conséquent

$$a = \frac{k}{H}\left(B + \frac{B'}{F}\right) \quad , \quad b = \frac{a^2 F}{k}.$$

Ayant a et b les valeurs de φ sont données par l'équation (2).

Il nous reste à faire voir comment on calcule les angles de chute ω et les vitesses, c'est-à-dire quelles sont les équations empiriques qui remplacent

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{kH}{n\cos^2\varphi}\left\{\left[1 + \frac{n-2}{H}x\right]^{\frac{n}{n-2}} - 1\right\}$$

et

$$v\cos\theta = \frac{V\cos\varphi}{\left(1 + \frac{n-2}{H}x\right)^{\frac{1}{n-2}}}.$$

Cette dernière équation en posant $\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi} = u$ devient

$$\frac{g}{u^2} = k\left(1 + \frac{n-2}{H}x\right)^{\frac{2}{n-2}}$$

De l'équation (1) on tire

$$\frac{d(x\sin 2\varphi)}{dx} = \frac{2kH}{n}\left\{\left[1 + \frac{n-2}{H}x\right]^{\frac{n}{n-2}} - 1\right\}$$

$$\frac{d^2(x\sin 2\varphi)}{dx^2} = 2k\left(1 + \frac{n-2}{H}x\right)^{\frac{2}{n-2}}$$

d'où

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2\cos^2\varphi}\frac{d(x\sin 2\varphi)}{dx}$$

$$\frac{g}{u^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2(x\sin 2\varphi)}{dx^2}$$

ou

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin 2\varphi - 2kx - 3ax^2 - 4bx^3}{2\cos^2\varphi} = -\frac{kx + 2ax^2 + 3bx^3}{2\cos^2\varphi}$$

$$\frac{g}{u^2} = k + 3ax + 6bx^2.$$

Cette dernière équation donne u, on en déduit la vitesse au moyen de la relation $v\cos\theta = u\cos\varphi$. Quant aux temps, on peut, si l'on veut les obtenir, les calculer avec une approximation suffisante au moyen d'une quadrature, c'est-à-dire par la formule

$$T = \Sigma\frac{\Delta x}{v\cos\theta} = \frac{1}{\cos\varphi}\Sigma\frac{\Delta x}{u}.$$

Nous pouvons donc, en résumé, énoncer la proposition suivante.

Proposition II.

Transformer les équations rationnelles du mouvement en équations empiriques.

La résistance sur l'unité de masse étant représentée par cv^n, *on calcule* $H = \frac{1}{cV^{n-2}}$ *en désignant par* V *la vitesse initiale, et on divise* H *par la distance maximum* X, *pour laquelle les équations empiriques doivent reproduire les résultats des équations rationnelles. On note les valeurs de* Z *et de* F *correspondant à* $\frac{H}{X}$ *dans la colonne de la table XV portant en tête la valeur de* n. *On forme*

$$k = \frac{g}{V^2}, \quad a = \frac{k}{H}\left(B + \frac{B'}{F}\right), \quad b = \frac{Fa^2}{k},$$

B et B' étant les valeurs correspondant à Z dans la table XIV.

L'équation des angles de projection devient

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3\,;$$

celle des inclinaisons

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{2kx + 3ax^2 + 4bx^3}{2\cos^2\varphi},$$

qui, pour les angles de chute, se réduit à

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{kx + 2ax^2 + 3bx^3}{2\cos^2\varphi}\,;$$

celle des vitesses est

$$\frac{g}{u^2} = k + 3ax + bx^2, \qquad v\cos\theta = u\cos\varphi$$

et celle des temps

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\cos\varphi}\,\Sigma\,\frac{\Delta x}{u}.$$

Application à n $= 6$. — Le général Mayevski, dans son *Traité de balistique,* donne quelques tables des valeurs de certaines fonctions, qui servent à calculer les angles de projection et de chute, et les vitesses, dans le cas de $n = 6$.

Mettons les équations rationnelles sous la forme

$$\sin 2\varphi = kx\,\mathfrak{P}(z) \qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{kx}{\cos^2\varphi}\,\mathfrak{J}(z)$$

$$\frac{g}{u^2} = k\,[\mathfrak{B}(z)]^2$$

On a :

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}z - 1}{\frac{15}{8}z^2} \qquad \mathfrak{J}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2}z}$$

$$\mathfrak{B}(z) = (1+z)^{\frac{1}{4}}$$

z étant égal à $\frac{4x}{\mathrm{H}}$ (¹).

En appliquant la proposition II au cas de $n = 6$, pour la transformation des équations rationnelles en équations empiriques, on voit immédiatement

(¹) *Traité de balistique,* tables XII, XIII, XIV.

que le problème consiste à trouver des valeurs de a et b, telles qu'entre certaines limites on ait, avec la plus grande approximation possible

$$\mathfrak{P}\left(\frac{4x}{H}\right) = 1 + \frac{a}{k}x + \frac{b}{k}x^2$$

$$\mathfrak{I}\left(\frac{4x}{H}\right) = 1 + \frac{3a}{2k}x + \frac{2b}{k}x^2$$

$$\mathfrak{B}\left(\frac{4x}{H}\right) = \left(1 + \frac{3a}{k}x + \frac{6b}{k}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\mathfrak{P}(z) = 1 + \frac{1}{4}\frac{aH}{k}z + \frac{1}{16}\frac{bH^2}{k}z^2$$

$$\mathfrak{I}(z) = 1 + \frac{3}{8}\frac{aH}{k}z + \frac{1}{8}\frac{bH^2}{k}z^2$$

$$\mathfrak{B}(z) = \left(1 + \frac{3}{4}\frac{aH}{k}z + \frac{3}{8}\frac{bH^2}{k}z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or la valeur maximum de $z = \frac{4x}{H}$ contenue dans les tables de Mayevski est 1.80. Nous effectuerons donc les transformations, en supposant que le maximum de x est celui pour lequel on a

$$\frac{4X}{H} = 1,80 \qquad \text{ou} \qquad \frac{H}{X} = 2,222.$$

Ceci posé dans la table XV (colonne $n = 6$), on trouve :

$$Z = -35 \quad , \quad F = -0,46997,$$

et dans la table XIV en regard de $Z = -35$,

$$B = 0,65888 \quad , \quad \log B' = \bar{3},46547.$$

Appliquant alors la proposition II, on a :

$$a = \frac{k}{H}(0,65888 - 0,00621) = \frac{k}{H}(0,65267),$$

$$b = \frac{Fa^2}{k} = -\frac{k}{H^2}(0,65267)^2(0,46997) = -\frac{k}{H^2}(0,20020),$$

d'où

$$\frac{aH}{k} = 0,65267 \quad , \quad \frac{bH^2}{k} = -0,20020.$$

En substituant, on obtient :

$$\mathfrak{P}(z) = 1 + 0{,}16317z - 0{,}01251z^2$$
$$\mathfrak{J}(z) = 1 + 0{,}24475z - 0{.}02502z^2$$
$$\mathfrak{B}(z) = (1 + 0{,}48950z - 0{,}075006z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Nous donnons ci-dessous le tableau comparatif des valeurs approximatives et des valeurs exactes données par les tables de Mayevski.

z	$\mathfrak{P}(z)$		$\mathfrak{J}(z)$		$\mathfrak{B}(z)$	
	Exacte.	Approximative.	Exacte.	Approximative.	Exacte.	Approximative.
0,45	1,0713	1,0709	1,1052	1,1051	1,0978	1,0978
0,90	1,1365	1,1367	1,1992	1,2000	1,1741	1,1746
1,35	1,1971	1,1975	1,2852	1,2848	1,2381	1,2345
1,80	1,2542	1,2532	1,3649	1,3595	1,2936	1,2798

Les plus grandes différences ont lieu pour les plus grandes valeurs de z, c'est-à-dire pour les plus grandes distances, elles sont respectivement :

0,0010   0,0054   0,0138

et elles vont en augmentant, en passant de $\mathfrak{P}(z)$ à $\mathfrak{J}(z)$ et de $\mathfrak{J}(z)$ à $\mathfrak{B}(z)$. La perte d'approximation provient des différentiations successives opérées sur les équations empiriques représentant les angles de projection, pour passer aux angles de chute et aux vitesses restantes. Il est facile de s'assurer que ce manque relatif d'exactitude n'a pas d'importance en pratique.

En effet, les différences *relatives* correspondant aux différences absolues sont inférieures à

$$\frac{8}{10000} \qquad \frac{4}{1000} \qquad \frac{11}{1000}$$

Si l'on se reporte aux équations qui donnent φ, θ, u, on reconnaît facilement que ces dernières différences équivalent la première et la troisième aux erreurs relatives que l'on aurait pu commettre soit sur l'angle de projection, soit sur la vitesse initiale, si l'on avait pris les valeurs approximatives de $\mathfrak{P}(z)$ et de $\mathfrak{B}(z)$, la seconde équivaut à la moitié de l'erreur relative que l'on commettrait sur l'angle de chute, si l'on prenait la valeur empirique de $\mathfrak{J}(z)$.

Supposons maintenant qu'à la distance à laquelle correspond $z = 1{,}80$,

il y aurait lieu de prendre pour angle de projection 20° (angle relativement grand), pour angle de chute 25°, et pour vitesse restante 200 m.

En employant les équations empiriques, on trouverait une erreur de 1′ sur l'angle de projection, et de 12′ sur l'angle de chute. L'erreur sur la vitesse serait de 2^{m},2. Ces erreurs sont tout à fait insignifiantes.

Application au cas de n = 2. — Tous les traités de balistique contiennent des tables des fonctions analogues à $\mathfrak{P}(z)$, $\mathfrak{J}(z)$, $\mathfrak{B}(z)$, pour $n = 2$. Dans ce cas, on a :

$$\sin 2\varphi = kx \frac{e^z - 1 - z}{\frac{1}{2}z^2} \qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{kx}{\cos^2\varphi}\frac{e^z - 1}{z}$$

$$\frac{g}{u^2} = k\left(e^{\frac{z}{2}}\right)^2, \qquad \text{où} \qquad z = \frac{2x}{H}$$

Proposons-nous de déterminer pour a et b des valeurs telles que l'on ait avec la plus grande approximation, entre certaines limites de x :

$$\mathfrak{P}\left(\frac{2x}{H}\right) = \frac{e^{\frac{2x}{H}} - 1 - \frac{2x}{H}}{\frac{2x^2}{H^2}} = 1 + \frac{a}{k}x + \frac{b}{k}x^2,$$

$$\mathfrak{J}\left(\frac{2x}{H}\right) = \frac{e^{\frac{2x}{H}} - 1}{\frac{2x}{H}} = 1 + \frac{3}{2}\frac{a}{k}x + \frac{2b}{k}x^2,$$

$$\mathfrak{B}\left(\frac{2x}{H}\right) = e^{\frac{x}{H}} = \left(1 + \frac{3a}{k}x + \frac{2b}{k}x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou bien

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{\frac{1}{2}z^2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{aH}{k}z + \frac{1}{4}\frac{bH^2}{k}z^2,$$

$$\mathfrak{J}(z) = \frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{3}{4}\frac{aH}{k}z + \frac{1}{2}\frac{bH^2}{k}z^2,$$

$$\mathfrak{B}(z) = e^{\frac{z}{2}} = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{aH}{k} + \frac{3}{2}\frac{bH^2}{k}z^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La valeur maximum de z, contenue dans la table XV est celle qui correspond à

$$\frac{H}{X} = 2{,}733 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2X}{H} = 0{,}73$$

D'après la table XV (colonne $n = 2$) on trouve en regard de $\frac{H}{X} = 2{,}773$

$$Z = 60 \quad , \quad F = 0{,}93278$$

et dans la table XIV pour $Z = 60$,

$$B = 0{,}65394 \qquad \log B' = 7{,}67863$$

En appliquant donc la proposition II, on a :

$$a = \frac{k}{H}(0{,}65394 + 0{,}00516) = \frac{k}{H}(0{,}65918)$$

$$b = \frac{k}{H^2}(0{,}65910)^2(0{,}93278) = \frac{k}{H^2}(0{,}40521)$$

ou

$$\frac{aH}{k} = 0{,}65910 \qquad \frac{bH^2}{k} = 0{,}40521$$

En substituant, on obtient :

$$\mathfrak{P}(z) = 1 + 0{,}32955z + 0{,}1013z^2$$
$$\mathfrak{J}(z) = 1 + 0{,}49433z + 0{,}2026z^2$$
$$\mathfrak{B}(z) = (1 + 0{,}98856z + 0{,}6078z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Nous donnons ci-dessous le tableau comparatif de ces valeurs approchées et des valeurs fournies par les tables balistiques.

z	$\mathfrak{P}(z)$		$\mathfrak{J}(z)$		$\mathfrak{B}(z)$	
	Exactes.	Approximatives.	Exactes.	Approximatives.	Exactes.	Approximatives.
0,2	1,0701	1,0700	1,1070	1,1070	1,1052	1,1054
0,4	1,1478	1,1480	1,2296	1,2301	1,2214	1,2218
0,6	1,2340	1,2342	1,3702	1,3695	1,3499	1,3461
0,8	1,3298	1,3285	1,5319	1,5252	1,4918	1,4781

§ 2

Réduction du degré de la résistance.

Soit

(2) $$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3$$

l'équation empirique correspondant au degré n et au coeffi-

cient H. Nous nous proposons de transformer cette équation en une autre

$$\sin 2\varphi = kx + a'x^2 + b'x^3$$

avec la plus grande approximation possible, a' et b' étant des coefficients tels, qu'en appliquant la proposition I, on obtienne au lieu de n, un autre nombre donné peu différent du premier. Soit n' cet autre nombre et H′ la nouvelle valeur de H. Si n' diffère peu de n, il en est de même de H. Nous avons, par conséquent, dans la valeur de $\frac{H}{X}$ une valeur approchée de $\frac{H'}{X}$, et nous pouvons supposer $\frac{H}{X}$, égal à $\frac{H'}{X}$, à la condition toutefois (et cela peut se faire sans inconvénient en pratique) d'admettre pour la distance maximum X, qui doit vérifier l'équation précédente, une augmentation ou une diminution proportionnelle à l'augmentation ou à la diminution de H′ par rapport à H.

Connaissant une valeur approchée de $\frac{H'}{X}$, la table XV (colonne n') donne la valeur de F, ou de son égal $\frac{kb'}{a'^2}$. Mais cette seule relation ne suffit pas pour déterminer a' et b'.

Nous trouverons au moyen de la règle des moindres carrés une autre relation. Celle-ci consiste à déterminer a' et b' de façon que l'on ait :

$$\int_0^X [(a'-a)x^2 + (b'-b)x^3]^2\, dx = \text{minimum}$$

a' et b' étant liés par la relation,

$$\frac{kb'}{a'^2} = \text{F}.$$

Cette dernière équation, en posant :

$$b' = b(1+p) \quad , \quad a' = a(1+q) \quad , \quad \frac{a^2\text{F}}{kb} = f,$$

et en négligeant q^2, quantité très petite par rapport à l'unité, devient :

$$\frac{1+p}{1+2q} = f.$$

Cette équation est identiquement satisfaite en posant :

$$p = (f - 1)(1 - 2R) \quad , \quad q = \frac{(1-f)R}{f}.$$

En remplaçant sous le signe intégrale, la parenthèse devient :

$$[aqx^2 + bpx^3]^2 = \frac{(f-1)^2}{f^2}[aRx^2 - bf(1-2R)x^3]^2$$
$$= \frac{(f-1)^2}{f^2}\left[aRx^2 - \frac{a^2F}{k}(1-2R)x^3\right]^2.$$

Faisons maintenant $u = \frac{aFx}{k}$, la dernière expression devient :

$$\frac{(f-1)^2 k^4}{a^2 f^2 F^4}[Ru^2 - (1-2R)u^3]^2.$$

Par l'abandon du coefficient constant, l'équation se réduit à

$$\int_0^U du\,[Ru^2 + (2R-1)u^3]^2 = \text{minimum},$$

U représentant la valeur de u pour $x = X$, c'est-à-dire

$$U = \frac{aFX}{k}$$

Nous avons donc :

$$\int_0^U du\,[Ru^2 + (2R-1)u^3](u^2 + 2u^3) = 0,$$
$$R\int_0^U du\,(u^2 + 2u^3)^2 = \int_0^U u^3\,du\,(u^2 + 2u^3),$$
$$R = \frac{1}{2}\,\frac{35U + 30U^2}{42 + 70U + 30U^2}.$$

Pour établir une table donnant les valeurs de cette fonction, nous l'avons partagée en deux parties ; nous avons indiqué par P les valeurs de R correspondant à U positif ($F > o$), et par Q les valeurs numériques de R correspondant à U négatif ($F < o$). La table XVI contient 24 valeurs de log P et autant de log Q, correspondant en total à 48 valeurs de $\log U = \log \pm \frac{aFX}{k}$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

Proposition III.

Ayant déterminé au moyen de la proposition I la résistance de l'air, pour arrondir le nombre n, *c'est-à-dire pour le transformer en un autre nombre ne contenant qu'une décimale, on procède comme il suit.*

On divise la valeur de H calculée par la proposition I par la plus grande valeur, X, de la distance.

Dans la colonne de la table XV portant en tête la valeur arrondie de n, *on cherche, et l'on note, les valeurs de F et de Z correspondant à la valeur la plus rapprochée de* $\frac{H}{X}$. *On calcule ensuite le log* $\pm \frac{FX\mathrm{a}}{\mathrm{k}}$, *et l'on cherche dans la table XVI la valeur correspondante de P ou de Q* (1) *suivant que F est positif ou négatif. Dans le premier cas, on forme la quantité*

$$a' = a - a\mathrm{P} + a\mathrm{P}\frac{kb}{a^2\mathrm{F}}$$

et dans le second

$$a' = a + a\mathrm{Q} - a\mathrm{Q}\frac{kb}{a^2\mathrm{F}} \text{ (2)}.$$

On calcule enfin

$$\mathrm{H} = \frac{k}{a'}\left(\mathrm{B} + \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{F}}\right),$$

B et B' étant les valeurs que l'on trouve dans la table XIV en regard de Z déjà trouvé dans la table XV. La résistance de l'air sur l'unité de masse est alors :

$$f(v) = \left(\frac{k}{g}\right)^{\frac{\mathrm{n}-2}{2}} \frac{v^{\mathrm{n}}}{\mathrm{H}}$$

(n *degré arrondi de la résistance*).

Nous appliquerons cette proposition à la réduction à $n = 3$ des deux valeurs de n calculées au moyen de la proposition I, d'après les expériences de Mayevski (note I, page 325).

(1) On ne doit pas interpoler.
(2) Faire attention au signe de b et de F.

Nous avons pour les charges, supérieure et inférieure,

$$\frac{H}{X} = \frac{8,775}{9} = 0,975,$$

$$\frac{H}{X} = \frac{11,421}{7} = 1,632.$$

Les valeurs correspondantes de Z et de F dans la colonne $n = 3$ de la table XV sont :

$$Z = 40 \quad , \quad F = 0,375,$$
$$Z = 60 \quad , \quad F = 0,375,$$

et comme on a respectivement :

$$k = 0,067334 \quad , \quad a = 0,051106 \quad , \quad b = +0,0015393 \quad , \quad X = 9,$$
$$k = 1,05729 \quad , \quad a = 0,061176 \quad , \quad b = +0,0024432 \quad , \quad X = 7,$$

il en résulte,

$$\log \frac{aFX}{k} = 9,40850,$$

$$\log \frac{aFX}{k} = 9,18152.$$

F étant positif, nous chercherons dans la table XVI les valeurs de $\log P$ correspondant à ces logarithmes ; nous avons ainsi :

$$\log P = 9,18495,$$
$$\log P = 9,00198.$$

La charge supérieure donne donc :

$$a' = 0,0151106 - 0,007824 + 0,008280 = 0,051562$$

et la charge inférieure,

$$a' = 0,061176 - 0,006146 + 0,011311 = 0,066341.$$

Les valeurs de B et de B′ tirées de la table XIV correspondant aux valeurs trouvées de Z, c'est-à-dire $Z = 60$ et $Z = 40$, sont respectivement :

$$B = 0,65394 \quad , \quad \log B' = 7,67863,$$
$$B = 0,66037 \quad , \quad \log B' = 7,37322.$$

On a donc :

$$H = \frac{k}{a'}\left(B + \frac{B'}{F}\right) = 8,7062,$$

$$H = \frac{k}{a'}\left(B + \frac{B'}{F}\right) = 10,6248.$$

La retardation de l'air est pour chaque trajectoire

$$\left.\begin{aligned} f(v) &= \left(\frac{2k\cos^2\varphi}{g}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{v^n}{H} = 0{,}023473\, v^3, \\ f(v) &= \left(\frac{2k\cos^2\varphi}{g}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{v^n}{H} = 0{,}024098\, v^3. \end{aligned}\right\} \text{(unité 50 sagènes)}$$

En introduisant les poids et les diamètres 2R des projectiles, et en rapportant au kilogr. et au mètre, on a :

$$f(v) = 0{,}001125\,\frac{(2R)^2}{p}\,v^3 \quad , \quad f(v) = 0{,}001112\,\frac{(2R)^2}{p}\,v^3,$$

On remarquera l'accord des deux résultats entre eux, et avec ceux obtenus par le général Mayevski et le major Welter (page 10).

Il nous reste finalement à examiner, si en supposant la résistance proportionnelle au cube de la vitesse et en prenant pour H les dernières valeurs trouvées, il y a concordance entre les résultats des formules et celles de l'expérience.

L'équation de la trajectoire dans le cas de la résistance proportionnelle au cube est

$$y = x\,\text{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{2x}{3H} + \frac{1}{6}\frac{x^2}{H^2}\right).$$

On a donc pour les deux charges

$$y = 10{,}744x - 0{,}67336x^2 - 0{,}051562x^3 - 0{,}0014806x^4,$$
$$y = 12{,}528x - 1{,}05729x^2 - 0{,}066341x^3 - 0{,}0015610x^4,$$

en prenant pour unité des y le pied, et des x 50 sagènes.

Le tableau suivant donne les résultats comparatifs entre l'expérience et ces formules.

DISTANCE.	CHARGE : 8 LIVRES.		CHARGE : 5 LIVRES.	
	Expérience.	Résistance cubique.	Expérience.	Résistance cubique.
Sagènes.	Ordonnées.	Ordonnées.	Ordonnées.	Ordonnées.
50	10^p,10	10^p,02	11^p,56	11^p,40
100	18 ,85	18 ,36	20 ,76	20 ,27
150	24 ,67	24 ,66	26 ,27	26 ,15
200	28 ,68	28 ,52	28 ,43	28 ,55
250	29 ,42	29 ,52	27 ,02	26 ,94
300	26 ,90	27 ,17	19 ,69	20 ,75
350	20 ,33	20 ,82	9 ,49	9 ,29
400	9 ,76	10 ,39	—	—
450	— 5 ,47	— 5 ,15	—	—

Nous conclurons de ce qui précède qu'au moyen d'expériences exécutées sur les angles de projection, on peut obtenir la résistance de l'air aussi exactement qu'avec celles qui ont pour objet la détermination de la perte de vitesse.

De plus les expériences du premier genre permettent de mesurer cette résistance le long d'un arc de trajectoire, aussi grand qu'on le veut, tandis que dans celles du second, ces arcs ne peuvent guère avoir une très grande extension (¹). Il s'ensuit que, pour les projectiles oblongs, la résistance mesurée se rapporte nécessairement au cas où l'axe du projectile coïncide avec la direction de la vitesse, tandis que celle que l'on obtient au moyen des expériences de la première espèce a pour condition essentielle de reproduire les angles de projection.

Comme second exemple (²) prenons le canon de 16 cm lourd de la marine française (page 324) pour lequel nous avons trouvé $H = 56{,}320$, $n = 3{,}4774$ et $X = 50$, et cherchons à réduire n à $n = 3{,}5$, nous avons :

$$\frac{H}{X} = 1{,}1264$$

(¹) L'intervalle entre les deux points qui ont servi à mesurer la vitesse des projectiles dans les expériences de Mayevski était de 150 à 254 m. (*Traité de balistique*, p. 38.)

(²) Note du traducteur.

Les valeurs correspondantes de Z et de F dans la colonne $n = 3,5$ de la table XV sont :

$$Z = 25 \qquad F = 0,15112$$

et comme on a

$$k = 0,002725 \qquad a = 0,000032573 \qquad b = 0,000000627515$$

il en résulte

$$\log \frac{aFX}{k} = \bar{2},95578$$

Comme F est positif, cherchons dans la table XVI la valeur de $\log P$ correspondant à ce logarithme, et nous avons :

$$\log P = \bar{2},83119$$

Par conséquent

$$a' = 0,000032576 - 0,00000220 + 0,000002356 = 0,000032732$$

Les valeurs de B et de B′ correspondantes dans la table XIV sont pour $Z = 25$.

$$B = 0,66398 \qquad \log B' = \bar{3},00221$$

Par suite :

$$H = \frac{k}{a'}\left(B + \frac{B'}{F}\right) = 55,832$$

La retardation dans la trajectoire est donc

$$f(v) = \left(\frac{2k\cos^2\varphi}{g}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{v^n}{H} = 0,00006364\, v^{3,5}$$

(*Note du traducteur.*)

§ 3

Méthode abrégée par l'emploi de la table XV *bis*.

Toutes les applications qui demandent l'emploi de la table XVI peuvent être faites plus rapidement qu'il n'est indiqué dans les propositions II et III, par une addition à la table XV. En ajoutant en effet, dans cette table, une colonne donnant $B + \frac{B'}{F}$ correspon-

dant à Z, $\frac{H}{X}$, F, il ne serait plus nécessaire de recourir à la table XIV; et connaissant F et $B + \frac{B'}{F}$, le calcul de a et b deviendrait très rapide. La construction de cette table exigeant un travail assez long, quoique facile, nous y avons renoncé et nous nous sommes bornés à calculer une autre table, qui peut en pratique remplacer la table XV et rendre les calculs plus rapides. Cette table, intitulée table XV bis, n'est autre que la table XV limitée en général à la dernière valeur indiquée dans chaque colonne, avec l'addition de la valeur de $B + \frac{B'}{F}$, que par abrégé nous avons représentée par h. Dans la valeur de $\frac{H}{X}$, X ne représente donc plus la distance maximum expérimentale, ou la distance à laquelle il suffit que les équations transformées reproduisent les valeurs données par les formules rationnelles, et réciproquement, mais la limite maximum de x jusqu'à laquelle on peut pousser la transformation. Bien que grâce à l'extension de la table XV, nous ayons pu pour certaines valeurs de n pousser cette limite plus loin que celle permise par la table XV *bis*, nous n'avons pas toutefois en général tenu compte des valeurs de $\frac{X}{H}$ supérieures à 2. En effet, dans les questions pratiques la valeur maximum de $\frac{X}{H}$ est presque toujours très inférieure à ce nombre.

En employant la table XV *bis*, on suppose implicitement que la distance maximum de tir soit celle qui est donnée par le rapport $\frac{X}{H}$, c'est-à-dire supérieure en général à la distance réelle. En étendant donc son emploi à des distances supérieures à celles qui sont nécessaires, les équations transformées sont nécessairement moins approchées que celles que l'on peut obtenir par l'emploi de la table XV. Mais pour la pratique, l'approximation est toujours suffisante.

En résumé, les propositions II et III (Pages 332 et 340) sont abrégées comme il suit.

Proposition II *bis*.

En supposant la résistance proportionnelle à une puissance connue de la vitesse, pour transformer les équations du mouvement en équations empiriques on opère comme il suit :

La retardation étant représentée par cv^n, *on calcule* $H = \frac{1}{cV^{n-2}}$, *en appelant V la vitesse initiale, et on divise par H la distance maximum, pour laquelle les équations empiriques doivent reproduire les résultats des équations rationnelles. Si le quotient est inférieur, égal, ou peu supérieur à la valeur de* $\frac{X}{H}$ *indiquée dans la colonne* n *de la table XV bis, on note les valeurs correspondantes de* h *et de F, et l'on calcule* $k = \frac{g}{V^2}$.

L'équation des angles de projection est transformée en

$$\sin 2\varphi = kx\left[1 + \frac{hx}{H} + F\left(\frac{hx}{H}\right)^2\right];$$

celle des inclinaisons en

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{kx}{\cos^2\varphi}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{hx}{H} + 2F\left(\frac{hx}{H}\right)^2\right]$$

qui devient pour les angles de chute :

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2\sin 2\varphi - kx\left[1 - F\left(\frac{hx}{H}\right)^2\right]}{2\cos^2\varphi};$$

celle des vitesses en

$$\frac{g}{u^2} = k\left[1 + \frac{3hx}{H} + 6F\left(\frac{hx}{H}\right)^2\right] \qquad v\cos\theta = u\cos\varphi$$

et on aura pour les durées :

$$T = \frac{1}{\cos\varphi}\Sigma\frac{\Delta x}{u}$$

Dans certains cas, il y a avantage à calculer de suite

$$a = \frac{h}{H} \qquad b = F\left(\frac{h}{H}\right)^2$$

et à appliquer ensuite les formules de la proposition II (p. 332).

Proposition III *bis*.

La retardation étant représentée par cv^n, *on demande de la transformer en une autre* $c'v^{n'}$ *dont l'exposant, voisin de* n, *soit exprimé par un nombre ne contenant qu'un chiffre décimal.*

Soit

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3$$

l'équation empirique qui reproduit jusqu'à la distance X les angles de projection obtenus par la formule rationnelle dépendant de la résistance cv^n.

On note les valeurs de F et de h contenues dans la table XV bis pour la valeur n'; *on calcule log* $\pm \frac{FXa}{k}$, *et on cherche dans la table XVI la valeur correspondante de P ou de Q suivant que F est positif ou négatif. On forme dans le premier cas,*

$$a' = a - a\mathrm{P} + a\mathrm{P}\frac{kb}{a^2\mathrm{F}}$$

dans le second,

$$a' = a + a\mathrm{Q} - a\mathrm{Q}\frac{kb}{a^2\mathrm{F}}$$

On calcule enfin

$$\mathrm{H}' = \frac{kh}{a^2}$$

et la valeur de c' *est alors donnée par* $\frac{1}{H'V^{n-2}}$. *L'équation empirique qui reproduit les angles de projection donnés par la résistance* $c'v^{n'}$ *est alors :*

$$\sin 2\varphi = kx\left[1 + \frac{hx}{\mathrm{H}'} + \mathrm{F}\left(\frac{hx}{\mathrm{H}'}\right)^2\right].$$

NOTE III

AUTRES TRANSFORMATIONS

---

§ 1.

L'objet de cette note est d'établir des propositions analogues à celles contenues dans les deux notes précédentes, dans l'hypothèse où la résistance sur l'unité de masse est représentée par une expression de la forme

$$qv^2\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right).$$

Étant donné un certain nombre de portées correspondant à un même nombre d'angles de projection, et en supposant la retardation représentée par

$$qv^2\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right)$$

déterminer q *et* r.

Les équations rationnelles du mouvement (ordonnée et inclinaison) sont les suivantes

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} y &= x\,\mathrm{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\varphi}\left[\left(1+\frac{V^2}{r^2}\right)F(z)-\frac{V^2}{r^2}\right] \\ \mathrm{tg}\theta &= \mathrm{tg}\varphi - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}\left[\left(1+\frac{V^2}{r^2}\right)F_1(z)-\frac{V^2}{r^2}\right] \end{aligned}\right.$$

Équations dans lesquelles on a

$$z=2\beta qx \qquad F(z)=\frac{e^z-1-z}{\frac{1}{2}z^2} \qquad F_1(z)=\frac{e^z-1}{z}$$

Elles se déduisent sans difficultés des formules générales du chapitre VI, section I. La quantité β (voir p. 51) est comprise entre

deux limites dont l'une est supérieure, et l'autre inférieure à l'unité Nous prendrons $\beta = 1$.

Posons pour abréger

$$k = \frac{g}{V^2}, \qquad k_1 = \frac{g}{r^2},$$

nous avons

$$(2) \qquad y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{(k+k_1)\,x^2\,F(2qx) - k_1 x^2}{2\cos^2\varphi},$$

$$(3) \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{(k+k_1)\,x\,F_1(2qx) - k_1 x}{\cos^2\varphi},$$

$$(4) \qquad \frac{g}{u^2} = (k+k_1)\,e^{2qx} - k_1.$$

L'équation (2) donne

$$2(x\,\mathrm{tg}\,\varphi - y) = \frac{(k+k_1)\,x^2\,F(2qx) - k_1 x^2}{\cos^2\varphi} = \\ = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left[(k+k_1)\frac{e^{2qx} - 2qx - 1}{2q^2} - k_1 x^2\right],$$

et l'équation (3)

$$\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\theta = \frac{(k+k_1)\,x F_1(2qx) - k_1 x}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left[(k+k_1)\frac{e^{2qx}-1}{2q} - k_1 x\right].$$

Retranchons cette dernière de la précédente, multipliée par q, il vient

$$2q(x\,\mathrm{tg}\,\varphi - y) - (\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\theta) = -\frac{1}{\cos^2\varphi}[kx + qk_1 x^2],$$

et finalement

$$q = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\theta - \dfrac{kx}{\cos^2\varphi}}{2(x\,\mathrm{tg}\,\varphi - y) + \dfrac{k_1 x^2}{\cos^2\varphi}}$$

équation analogue à l'équation (1) de la Note I.

Supposons maintenant que l'on ait déterminé expérimentalement les coefficients a et b de l'équation empirique,

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3$$

En posant $a = \frac{2}{3}k\alpha$, $b = \frac{1}{6}k\beta$, nous avons

$$2(x\,\mathrm{tg}\,\varphi - y) = \frac{kx^2}{\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{2}{3}\alpha x + \frac{1}{6}\beta x^2\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\theta - \frac{kx}{\cos^2\varphi} = \frac{kx^2}{\cos^2\varphi}\left(\alpha + \frac{1}{3}\beta x\right)$$

et par conséquent

$$\frac{1}{q}=\frac{k\left(1+\frac{2}{3}\alpha x+\frac{1}{6}\beta x^2\right)+k_1}{k\left(\alpha+\frac{1}{3}\beta x\right)}$$

d'où

$$1+\frac{k_1}{k}+\frac{2}{3}\alpha x+\frac{1}{6}\beta x^2=\frac{1}{q}\left(\alpha+\frac{1}{3}\beta x\right).$$

Cette équation ne pouvant pas se vérifier identiquement pour toutes les valeurs de x, il est nécessaire de déterminer k_1 et q, en sorte que la différence des deux membres soit toujours très petite.

Posons :

$$x=\frac{3\alpha}{\beta}z \quad , \quad 1+\frac{k_1}{k}=\frac{\alpha^2}{\beta}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \frac{1}{q}=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1+\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\right):$$

nous aurons après réduction

$$2z-\varepsilon z(2+3z)-2\eta(1+z)=0.$$

Cette équation est identique à l'équation (11) de la note I. En appliquant donc la méthode des moindres carrés, nous tombons sur les mêmes équations que celles que nous avons trouvées à la fin du § 3 de la même note.

Dans la table XIV, on ne trouve pas les valeurs de ε et de η, mais celles de fonctions de ces quantités pour différentes valeurs z' ou bien de $\frac{b}{a}$X. Ces valeurs sont les suivantes :

$$A=3+\varepsilon, \qquad A'=\frac{8}{3}\varepsilon, \qquad B=\frac{1}{3}(1-\eta), \qquad B'=\frac{1}{4}\eta:$$

On a donc

$$q=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon-\eta}\right)=\frac{3}{2}\frac{b}{a}\left(\frac{A'}{A-2-4B'}\right),$$

$$k_1+k=\frac{k\alpha^2}{\beta}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)=\frac{a^2}{b}\frac{A-2}{A'}.$$

Dans la la table XVII se trouvent les valeurs de

$$\frac{3}{2}\frac{A'}{A-2-4B'}=G, \qquad G\frac{A-2}{A'}=G_1$$

on en tire immédiatement, quand on connaît $\frac{b}{a}$ X :

$$q = \frac{b}{a} G, \qquad k_1 = \frac{a^2}{b} \frac{G_1}{G} - k = \frac{a}{q} G_1 - k,$$

ainsi qu'il est dit dans la proposition suivante.

Proposition IV

Étant donné un certain nombre de portées correspondant au même nombre d'angles de projection, et en supposant la retardation exprimée par un binôme de la forme $\mathrm{q}\mathrm{v}^2\left(1 + \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}^2}\right)$, *on se propose de déterminer* q *et* r.

Après avoir déterminé par la règle des moindres carrés, les coefficients a *et* b *de l'équation*

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3 \qquad \left(k = \frac{g}{V^2}\right)$$

on calcule les valeurs de $\log \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} X$, *X étant la distance maximum qui vérifie l'équation précédente : l'on cherche dans la table XVII les valeurs correspondantes de* $\log G$ *et de* $\log G_1$.

On aura

$$q = \frac{b}{a} G \qquad k_1 = \frac{a}{q} G_1 - k \qquad r = V\sqrt{\frac{k}{k_1}}$$

et la valeur de $\frac{1}{\mathrm{q}}$ *sera exprimée avec les unités de* x, *et la valeur de* r *avec les unités de V.*

Les équations rationnelles du mouvement seront les suivantes :

$$\sin 2\varphi = (k + k_1)\, xF(z) - k_1 x$$

(*Cette équation reproduit les résultats de l'équation empirique*)

$$\frac{g}{u^2} = (k + k_1)\, e^z - k_1$$

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{(k + k_1)\, x^2}{2\cos^2\varphi} F(z) + \frac{k_1 x^2}{2\cos^2\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{(k + k_1)\, x}{\cos^2\varphi} F_1(z) + \frac{k_1 x}{\cos^2\varphi};$$

équations dans lesquelles on a

$$z = 2qx, \qquad F(z) = \frac{e^z - 1 - z}{\frac{1}{2}z^2}, \qquad F_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

Observation. — *Toutes les fois que l'équation déterminée d'après les règles des moindres carrés est celle d'une trajectoire, de la forme*

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - (kx^2 + ax^3 + bx^4)$$

les règles pour déterminer q, k_1 *et* r *ne subissent aucune modification.*

Mais dans les équations rationnelles, on devra remplacer k *par* $2k\cos^2\varphi$ *et* k_1 *par* $2k_1\cos^2\varphi$.

Application. — Pour pouvoir appliquer cette proposition, il faut que b soit positif dans l'équation empirique. Les expériences du général Mayevski citées au § 3 de la note I fournissent des équations offrant cette particularité. Nous allons donc lui appliquer la proposition IV. Nous n'avons pas l'intention, dans cette application, de faire de nouvelles recherches sur la résistance des projectiles sphériques, car nous avons déjà suffisamment discuté ce problème dans la note II. Notre but ici se bornera à donner une preuve de l'exactitude de la proposition IV.

Charge 8 livres : ($\varphi = 1°45',5$, $V = 522$ *m*)

$$y = 10,744x - 0,67336x^2 - 0,051106x^3 - 0,0015393x^4$$

Charge 5 livres : ($\varphi = 2°3'$, $V = 416,7$ *m*)

$$y = 12,528x - 1,05729x^2 - 0,061176x^3 - 0,0034432x^4$$

L'unité est 50 sagènes pour les abscisses, et le pied pour les ordonnées; le coefficient de x est donc 350 $\operatorname{tg}\varphi$, et celui de x^2 est $k = \frac{(350)^2 g}{2V^2\cos^2\varphi}$, V est exprimé en pieds ainsi que $g = 32^p,216$ (= 9,8192 *m* pesanteur à Saint-Pétersbourg).

La distance maximum était pour la charge de 8 livres $X = 9$ ou 450 sagènes, pour la charge de 5 livres $X = 7$ ou 350 sagènes.

Nous avons dans ces deux cas :

$$\log\frac{b}{a}X = 9,43309 \qquad \log\frac{b}{a}X = 9,44648$$

La table XVII donne pour ces deux valeurs les mêmes valeurs de G et G_1, c'est-à dire

$$\log G = 0,18441$$
$$\log G_1 = 0,18450$$

On a donc pour chaque cas

$$q = \frac{b}{a} G = 0,046053 \qquad q = \frac{b}{a} G = 0,061064$$

$$k + k_1 = \frac{a}{q} G_1 = 1,69712 \qquad k + k_1 = \frac{a}{q} G_1 = 1,532127$$

$$k_1 = 1,02378 \qquad k_1 = 0,47484$$

Nous ne déterminerons pas les valeurs de r qui nous sont inutiles dans le cas présent, notre but étant simplement d'établir la comparaison entre les valeurs de y données par les équations empiriques qui précèdent, et les équations rationnelles obtenues. Ces dernières sont

Charge 8 livres :

$$y = 10,744x + 1,02378x^2 - 1,69712x^2 F(2qx)$$

Charge 5 livres :

$$y = 12,528x + 0,47484x^2 - 1,53213x^2 F(2qx)$$

La comparaison entre les résultats des formules des deux genres est établie dans le tableau suivant.

CHARGE : 8 LIVRES.			CHARGE : 5 LIVRES.		
Distance.	Formule empirique.	Formule rationnelle.	Distances.	Formule empirique.	Formule rationnelle.
x	y	y	x	y	y
3 (1 050 p)	$24^p,67$	$24^p,66$	3 (1 050 p)	26,22	26,22
6 (2 100)	27 ,19	27 ,22	5 (1 750)	27,03	27,06
9 (3 050)	— 5 ,20	— 5 ,20	7 (2 450)	9,03	9,01

§ 2.

Étant donné un certain nombre de portées correspondant à autant d'angles de projection, et en supposant la retardation représentée par

$$qv^2\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right)$$

déterminer r *quand on connaît* q.

Supposons qu'on ait déterminé les coefficients a et b de l'équation

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3$$

au moyen de la règle des moindres carrés. Nous la transformerons d'abord en une autre de même forme

$$\sin 2\varphi = kx + a'x^2 + b'x^3$$

contenant les coefficients a' et b' satisfaisant à la double condition de reproduire avec la plus grande approximation possible les angles de projection φ donnés par la première équation, et qu'en appliquant la proposition IV on obtienne pour q la valeur donnée.

Soit X la portée maximum expérimentale. Nous avons :

$$q\text{X} = \frac{b'}{a'}\text{GX}.$$

Or dans la table XVII la colonne qX a été calculée en multipliant précisément les valeurs de $\frac{b}{a}$ X par G : connaissant donc les valeurs de q et de X, on a celle de G, qui par conséquent peut être regardée comme connue, et par suite la valeur de $\frac{b'}{a'}$ qui sera $= \frac{q}{\text{G}}$. Le problème se réduit donc à celui de la transformation du trinôme

$$kx + ax^2 + bx^3$$

en un autre $kx + a'x^2 + \frac{a'q}{\text{G}}x^3$, tel que leur différence pour toutes les valeurs de x, depuis 0 jusqu'à X, soit la plus petite possible. En appliquant la méthode des moindres carrés, il s'agit de déterminer a' par la condition suivante :

$$\int_0^{\text{X}} \left[(a' - a)x^2 + \left(\frac{a'q}{\text{G}} - b\right)x^3\right]^2 p_x\,dx = \text{minimum},$$

p_x étant le poids correspondant à la distance x. Pour obtenir des équations plus simples, nous poserons :

$$p_x = \frac{qx^3}{\text{G}x^2 + qx^3} = 1 - \frac{\text{G}}{\text{G} + qx}.$$

Ce poids, comme on le voit, augmente avec la distance x, mais sa variation depuis 0 jusqu'à X reste très faible à cause de la faible valeur de $q\mathrm{X}$ par rapport à G.

En différentiant par rapport à a', on a:

$$\int_0^{\mathrm{X}} dx \left[(a'-a)\,x^2 + \left(\frac{a'q}{\mathrm{G}} - b\right)x^3\right] p_x \left(x^2 + \frac{q}{\mathrm{G}}\,x^3\right) = 0,$$

et en mettant pour p_x sa valeur,

$$\int_0^{\mathrm{X}} dx \left[(a'-a)\,x^2 + \left(\frac{a'q}{\mathrm{G}} - b\right)x^3\right] x^3 = 0,$$

d'où

$$a' \int_0^{\mathrm{X}} x^3\,dx \left(x^2 + \frac{q}{\mathrm{G}}\,x^3\right) = \int_0^{\mathrm{X}} (a x^2 + b x^3)\,x^3\,dx,$$

$$a' = \frac{7a + 6b\mathrm{X}}{7 + 6\dfrac{q\mathrm{X}}{\mathrm{G}}} = a\left(\frac{7\mathrm{G}}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}}\right) + \frac{b}{q}\left(\frac{6\mathrm{G}q\mathrm{X}}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}}\right).$$

Les quantités K et K_1 dont les logarithmes sont donnés dans la table XVII représentent précisément

$$\frac{7\mathrm{G}}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}}, \quad \frac{7\mathrm{G}q\mathrm{X}}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}}.$$

Posant donc

$$a' = a\mathrm{K} + \frac{b}{q}\,\mathrm{K}_1, \quad b' = \frac{a'q}{\mathrm{G}},$$

on a l'équation

$$\sin 2\varphi = kx + a'x^2 + b'x^3,$$

à laquelle, en appliquant la proposition IV, on obtient pour q la valeur donnée. On aura en vertu de cette proposition

$$k_1 = \frac{a'}{q}\,\mathrm{G}_1 - k = \frac{a}{q}\left(\frac{7\mathrm{G}\mathrm{G}_1}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}}\right) + \frac{b}{q}\left(\frac{6\mathrm{G}\mathrm{G}_1 q\mathrm{X}}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}}\right).$$

Or les quantités E, E_1 dont les logarithmes sont donnés dans la table XVII représentent les quantités

$$\frac{7\mathrm{G}\mathrm{G}_1}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad \frac{6\mathrm{G}\mathrm{G}_1 q\mathrm{X}}{7\mathrm{G} + 6q\mathrm{X}}$$

Par conséquent, la valeur de q X étant donnée, la table XVII permet de calculer

$$k_1 = \frac{a}{q} E + \frac{b}{q^2} E_1 - k,$$

et ensuite

$$r = V \sqrt{\frac{k}{k_1}}.$$

D'où la proposition V.

Proposition V

Étant donné un certain nombre de portées correspondant au même nombre d'angles de projection, et en supposant la résistance sur l'unité de masse représentée par

$$qv^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right)$$

on demande de déterminer r *connaissant* q.

On détermine par la règle des moindres carrés, les coefficients a *et* b *de l'équation*

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3$$

on calcule q*X, X étant la distance maximum à laquelle satisfait l'équation précédente : on cherche dans la table XVII les valeurs de* log *E et* log *E_1 ; et l'on a*

$$k_1 = \frac{a}{q} E + \frac{b}{q^2} E_1 - k \qquad r = V \sqrt{\frac{k}{k_1}}.$$

Observation. — *Si l'équation empirique trouvée par l'emploi de la méthode des moindres carrés représente celle de la trajectoire*

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - (kx^2 + ax^3 + bx^4)$$

la règle pour trouver k_1 *et* r *reste la même. Mais dans les équations rationnelles du* § *1, on devra toujours poser* $2k \cos^2\varphi$ *et* $2k_1 \cos^2\varphi$ *à la place de* k *et de* k_1.

Nous ferons une application de ce qui précède, en reprenant les expériences de Mayevski, ou les deux équations qui les représentent, et nous nous proposons ici de trouver les deux valeurs de k_1 ou de r, correspon-

dant à une même valeur de q, que nous prendrons égale à une moyenne de celles trouvées par la proposition IV. Ces deux dernières sont 0,046053 et 0,061064 ; prenons

$$q = 0{,}0540585.$$

Nous avons pour la charge de 8 livres ($X = 9$) et pour la charge de 5 livres ($X = 7$), respectivement :

$$qX = 0{,}48653 \qquad qX = 0{,}37841$$

La table donne

$$\begin{aligned} \log E &= 0{,}08510 & \log E &= 0{,}10453 \\ \log E_1 &= 9{,}67969 & \log E_1 &= 9{,}60102 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} k_1 &= 1{,}15003 + 0{,}25913 & k_1 &= 1{,}43961 + 0{,}33362 \\ &\quad - 0{,}67334 = 0{,}72862 & &\quad - 1{,}05729 = 0{,}71594 \\ r &= 522\sqrt{\frac{k}{k_1}} = 501{,}8 & r &= 416{,}7\sqrt{\frac{k}{k_1}} = 506{,}4 \end{aligned}$$

Il faut remarquer la petite différence entre les valeurs de r, quand on prend 0,0540585 pour valeur unique de q. On voit donc qu'il est possible de représenter la résistance de l'air sur les deux trajectoires différentes par une formule unique, en faisant légèrement varier la valeur indiquée de q. Cherchons cette valeur unique de q qui doit donner une même valeur pour r.

Comme la quantité q est proportionnelle au carré du diamètre $2R$ du projectile, et inversement proportionnelle à son poids p, nous poserons

$$q = \beta \frac{(2R)^2}{p}$$

et l'inconnue à déterminer est β. Nous obtiendrons sa valeur en égalant les deux valeurs de r.

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{kV^2}\left[\frac{aE}{\beta}\frac{p}{4R^2} + \frac{bE_1}{\beta^2}\frac{p^2}{16R^4} - k\right] \\ &= \frac{1}{k'V'^2}\left[\frac{a'E}{\beta}\frac{p'}{4R'^2} + \frac{bE'_1}{\beta^2}\frac{p'^2}{16R'^4} - k'\right]. \end{aligned}$$

Les quantités marquées du signe ′ se rapportent à la seconde charge, les autres à la première. Les projectiles tirés avec les deux charges n'étaient pas parfaitement égaux ; pour la plus grande charge, on avait en moyenne

$2R = 5,88$ pouces, $p = 29,72$ livres, pour la plus petite, $2R' = 5,85$ $p = 29,34$. En réduisant en mètres et en kilogr. [1], on a

$$\log \frac{4R^2}{p} = \bar{3},26319 \quad , \quad \log \frac{4R'^2}{p} = \bar{3},26427.$$

Les équations précédentes deviennent:

$$\frac{1848744}{\beta} + \frac{11944100}{\beta^2} - 36699,41 = \frac{2306751}{\beta} + \frac{15725700}{\beta^2} - 57590,78$$

ou

$$(20891,37)\beta^2 - (458007)\beta - 3781600 = 0.$$

Cette équation est satisfaite par

$$\beta = 28,31,$$

on a donc :

$$q = 28,31 \frac{4R^2}{p} \quad , \quad r = 480^m.$$

Il nous reste à comparer les valeurs de y obtenues expérimentalement ou par les formules empiriques, et les valeurs obtenues par les formules rationnelles. En remplaçant par chacune des charges les valeurs respectives de $\frac{4R^2}{p}$, et en se rappelant que l'on a $k_1 = \frac{V^2}{r^2} k_1$ nous avons :

Charge : 8 livres.

$$q = 0,051887 \qquad k = 0,79633 \qquad k + k_1 = 1,46967$$
$$y = 10,744x + 0,79633x^2 - 1,46967x^2 F(2qx).$$

Charge : 5 livres.

$$q = 0,052024 \qquad k_1 = 0,79675 \qquad k + k_1 = 1,85404$$
$$y = 12,528x - 0,79675x^2 - 1,85404x^2 F(2qx).$$

Le tableau suivant donne la comparaison des résultats.

CHARGE : 8 LIVRES.				CHARGE : 5 LIVRES.			
Distance.	Expérience.	Formule empirique.	Formule rationnelle.	Distance.	Expérience.	Formule empirique.	Formule rationnelle.
x	y	y	y	x	y	y	y
3 (1050 p)	24^p,67	24^p,67	24^p,69	3 (1050 p)	26^p,27	26^p,22	26^p,19
6 (2100)	26 ,90	27 ,19	27 ,30	5 (1750)	27 ,02	27 ,03	27 ,00
9 (3150)	— 5 ,47	— 5 ,20	— 5 ,30	7 (2450)	9 ,49	9 ,03	9 ,16

[1] Un pouce = 0,0254 m. 1 livre = 0,4095 kg.

Notre intention n'est pas de donner une nouvelle formule de résistance dans le cas des projectiles sphériques. Nous remarquerons cependant que l'examen du tableau précédent tandis qu'il fournit une nouvelle preuve de l'exactitude de la proposition V, il montre que les résultats des expériences de 1858, où les vitesses étaient comprises entre 520 et 420 *m*, concordent très bien avec la formule suivante de la résistance de l'air rapportée à l'unité de masse,

$$f(v) = 0,265 \frac{4R^2}{p} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{480^2}\right)$$

en prenant pour unité de longueur le mètre, et pour unité de poids le kilogramme [1].

§ 3

En supposant la retardation représentée par $qv^2\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right)$ *transformer les équations rationnelles en équations empiriques.*

La solution de ce problème s'obtient au moyen de la proposition IV. En effet la table XVII donne immédiatement les valeurs de G et G_1 correspondant à qX, X étant la distance maximum à laquelle on devra étendre la transformation qui fait l'objet du problème.

En appliquant les équations de la proposition IV, c'est-à-dire

$$q = \frac{b}{a}G \quad , \quad k_1 = \frac{a}{q}G_1 - k \quad , \quad r = V\sqrt{\frac{k}{k_1}} ,$$

on a immédiatement

$$k_1 = \frac{kV^2}{r^2} = \frac{g}{r^2} \quad , \quad a = q\frac{(k+k_1)}{G_1} \quad , \quad b = \frac{aq}{G} .$$

D'où la proposition suivante :

Proposition VI

En supposant la résistance sur l'unité de masse représentée par $qv^2\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right)$ *transformer les équations rationnelles en équations empiriques.*

---

[1] Quand 2R est exprimé en mètres et p en kilogrammes, si l'on pose $q = 28,31\frac{4R^2}{p}$, on a $\frac{1}{q}$ exprimé en prenant pour unité 50 sagènes = 106,08 *m*. Si on veut exprimer $\frac{1}{q}$ en mètres, on a donc :

$$q = \frac{28,31}{106,68}\frac{4R^2}{p} = 0,265\frac{4R^2}{p} .$$

Calculer la valeur de qX, X *étant la distance maximum pour laquelle les équations empiriques doivent reproduire les résultats des équations rationnelles; chercher dans la table XVII les valeurs correspondantes de* log G *et de* log G_1. *Déterminer les quantités*

$$k = \frac{g}{V^2} \quad , \qquad k_1 = \frac{g}{r^2},$$

$$a = q\frac{(k + k_1)}{G_1} \quad , \qquad b = \frac{aq}{G}.$$

L'équation des angles de projection devient alors

$$\sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3,$$

celle de l'inclinaison

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{2kx + 3ax^2 + 4bx^3}{2\cos^2\varphi},$$

qui pour les angles de chute devient

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2\sin 2\varphi - kx + bx^3}{2\cos^2\varphi},$$

celle des vitesses

$$\frac{g}{u^2} = k + 3ax + 6bx^2.$$

Dans le *Traité* de Mayevski, pour les projectiles oblongs ayant une vitesse inférieure à 325 *m*, on propose la formule suivante pour exprimer la résistance :

$$\rho = 0{,}12\,\pi R^2 v^2 \left(1 + \frac{v^2}{488^2}\right).$$

En rapportant à l'unité de masse, on a :

$$f(v) = 0{,}092542\,\frac{4\,R^2}{p}\,v^2\left(1 + \frac{v^2}{488^2}\right).$$

Afin de prouver l'exactitude de cette formule, Mayevski l'a appliquée à plusieurs exemples, qui lui ont servi à former une table dont nous avons extrait la partie suivante, qui se rapporte aux plus grandes distances.

CANON DE 24 *livres.*				CANON LÉGER DE 203 *mm.*			
Distance.		Angles de projection.		Distance.		Angles de projection.	
Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Fournis par l'expérience.	Sagènes.	Mètres.	Calculés.	Fournis par l'expérience.
Charge : 2,686 *kg* Vitesse initiale : 324 *m.*				Charge : 7,780 *kg* (poudre prismatique) Vitesse initiale : 316 *m.*			
2 450	5 227	22°48′	22°23′	2 563	5 468	22° 2′	23° 0′
1 500	3 200	11° 4′	11°11′	1 859	3 966	14° 0′	14° 0′
900	1 920	5°57′	6° 7′	1 000	2 134	6°42′	6°38′
500	1 067	3° 6′	3° 7′	500	1 067	3°10′	3°10′

En appliquant à ces exemples la proposition VI, on a :

Canon de 24 livres.

$$2R = 0{,}1524\ m \qquad p = 29{,}20\ kg$$

$$\log\left[q = 0{,}092542\,\frac{4R^2}{p}\right] = \bar{5}{,}86691$$

$$k = \frac{g}{V^2} = 0{,}0^4 93535 \qquad k_1 = \frac{g}{488^2} = 0{,}0^4 41231$$

Distance maximum $X = 5227\ m$.

$$\log qX = \bar{1}{,}58519$$

La table XVII donne

$$\log G_1 = 0{,}18107 \qquad \log G = 0{,}21130$$

d'où

$$\log\left[a = \frac{q(k+k_1)}{G_1}\right] = \bar{9}{,}81544$$

$$\log\left[b = \frac{aq}{G}\right] = \overline{13}{,}47108$$

$$\sin 2\varphi = 0{,}0^4 93535x + 0{,}0^8 65380x^2 + 0{,}0^{13} 29586x^3$$

$$x = 5227\ m, \qquad \varphi = 22°37'$$

$$x = 3200 \qquad \varphi = 11°\ 3'$$

$$x = 1920 \qquad \varphi = 5°55'$$

$$x = 1067 \qquad \varphi = 3°\ 5'$$

Canon de 203 *mm*.

$$2R = 0{,}2032\ m \qquad p = 78{,}62\ kg$$

$$\log\left[q = 0{,}092542\,\frac{4R^2}{p}\right] = \bar{5}{,}68665$$

$$k = \frac{g}{V^2}\,0{,}0^4 98332\ k_1 = \frac{g}{488^2} = 0{,}0^4 41231$$

Distance maximum $X = 5468\ m$.

$$\log qX = \bar{1}{,}42448$$

D'après la table XVII, on trouve

$$\log G_1 = 0{,}17843 \quad , \quad \log G = 0{,}23952\,,$$

d'où

$$\log\left[a = \frac{q(k+k_1)}{G_1}\right] = \bar{9}{,}65300$$

$$\log\left[b = \frac{aq}{G}\right] = \overline{13}{,}10013$$

$$\sin 2\varphi = 0{,}0^4 98332\,x + 0{,}0^8 44978\,x^2 + 0{,}0^{12} 12593\,x^3$$

$$\begin{aligned} x &= 5468 & \varphi &= 21^\circ 56' \\ x &= 3966 & \varphi &= 13^\circ 58' \\ x &= 2134 & \varphi &= 6^\circ 42' \\ x &= 1017 & \varphi &= 3^\circ 10' \end{aligned}$$ (1)

---

(1) Bien que les différences entre ces valeurs de φ et celles qui ont été calculées par Mayevski au moyen des formules rationnelles soient insignifiantes en pratique, le fait n'en mérite pas moins théoriquement une courte explication qui donne lieu à une légère objection à la méthode de Mayevski. Voici comment il indique le moyen de calculer φ, quand on connait la distance a du but (*Traité de balistique*, Paris, 1872, p. 255) :

« L'angle de projection ($\varphi - z$) rapporté à la ligne qui va de la bouche à feu au « but est donné par la formule (n° 93)

$$\sin(\varphi - z) = \frac{ga}{2V^2}\,P(z, V_0^2).$$

« *Le point de chute étant à la hauteur de la bouche à feu, on a* (n° 90)

$$\sin 2\varphi = \frac{ga}{V^2}\,P(z, V_0^2).$$

« A l'aide des deux dernières formules, on calcule d'abord la valeur approchée de φ, en posant

$$z = \frac{a}{c} \quad , \quad V_0^2 = \frac{V^2}{r^2},$$

« et puis, s'il le faut, une valeur plus précise en cherchant α qui correspond à la « valeur trouvée de φ et en posant

$$z = \frac{\alpha a}{c} \quad , \quad V_0^2 = \frac{\alpha^2 V^2 \cos^2\varphi}{r^2} \text{ ».}$$

Or nous voulons bien admettre qu'en posant $z = \frac{a}{c}$ $\left(\frac{1}{c}\right.$ correspond à notre nota-

§ 4.

Application au tir indirect.

Les propositions établies dans les notes I, II, III peuvent servir de base pour l'établissement d'un système de tables de tir indirect. Les expériences consistent, comme nous l'avons dit, en ceci. Tirant avec deux charges inférieures à celle établie pour le tir de plein fouet, on obtient les angles de projection et tous les autres éléments correspondant à chacune des charges, et à trois distances généralement inférieures à 2000 *m*. Pour appliquer les résultats obtenus aux charges et aux distances intermédiaires, la méthode indiquée page 198 peut être avantageusement remplacée par la suivante.

En établissant pour toutes les charges expérimentées les équations de la forme

$$(1) \qquad \sin 2\varphi = kx + ax^2 + bx^3$$

on cherche au moyen de la proposition I (page 318) les valeurs de n et de H. Si les valeurs de n ne se suivent pas d'une façon régulière, comme cela peut arriver avec des bouches à feu dont le tir est peu précis, on prend la valeur moyenne de n, ou bien l'on choisit parmi toutes les valeurs de cette

---

tion $2\varphi\Big)$ et $V_0^2 = \frac{V^2}{r^2}$, la valeur de φ obtenue soit seulement approchée, mais l'affirmation que la seconde valeur de φ est plus approchée que la première nous parait gratuite. Nous ne trouvons en effet aucune démonstration de ce fait dans le traité de Mayevski, et il nous semble bien difficile d'en donner une.

Notre proposition correspond précisément à la première valeur de φ, et nous n'avons aucune raison pour la supposer moins approchée que la seconde. Nous donnons ici les résultats qui ont été obtenus par la première approximation indiquée par Mayevski, c'est-à-dire au moyen de la formule

$$\sin 2\varphi = \frac{gx}{V^2} P\left(\frac{x}{c}, \frac{V^2}{r^2}\right)$$

Canon de 24 *livres*.

$x = 5297$	$\varphi = 22°38'$
$x = 3200$	$\varphi = 11°\ 2'$
$x = 1920$	$\varphi = 5°57'$
$x = 1067$	$\varphi = 3°\ 5'$

Canon de 203 *mm*.

$x = 5468$	$\varphi = 21°36'$
$x = 3966$	$\varphi = 13°57'$
$x = 2134$	$\varphi = 6°42'$
$x = 1067$	$\varphi = 3°10'$

Ces résultats peuvent bien être considérés comme identiques à ceux que nous avons donnés aux pages 361 et 362 et qui ont été obtenus en employant la proposition VI.

quantité celle qui est fournie par les expériences les plus complètes qui naturellement seront celles qui ont été faites pour le tir de plein fouet et en négligeant les chiffres décimaux qui suivent le premier. Si la bouche à feu possède une précision suffisante, les valeurs de n affectent une allure régulière et on peut les régulariser au moyen d'une courbe. La proposition III (page 340) donne alors les nouvelles valeurs de H correspondant pour chaque courbe aux valeurs choisies pour n; on régularise ces valeurs de H au moyen d'une courbe, et l'on obtient ainsi celles qui correspondent aux autres charges.

Au moyen de ces valeurs de H, et de la valeur ou des valeurs de n, on peut établir les équations rationnelles correspondant à toutes les charges expérimentées ou autres quelconques. Mais afin d'éviter la complication des équations, on peut les remplacer par des équations empiriques, en faisant usage de la proposition II (page 332).

Pour les charges adoptées dans les expériences sur le tir indirect, le signe de b dans les équations (1) est généralement positif. Dans ce cas, au lieu de transformer ces dernières en équations rationnelles, basées sur l'hypothèse d'une retardation de la forme cv^n, il est plus commode de les transformer en équations rationnelles basées sur l'hypothèse d'une retardation

$$qv^2\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right).$$

Ayant donc établi les équations (1) pour les charges expérimentales, et en supposant les valeurs de b positives, on cherche, en appliquant la proposition IV (page 351) celles de q pour chaque charge. On prend la moyenne q_m des valeurs de q, et l'on adopte cette valeur pour toutes les charges. En appliquant alors la proposition V (page 356) on détermine les valeurs de r (ou de k_1) pour les charges expérimentées. On réunit tous les r (ou k_1) par une courbe et on obtient ainsi les équations rationnelles satisfaisant non seulement aux charges expérimentales mais encore à celles qui doivent figurer dans les tables de tir. Ces équations peuvent, pour la facilité des calculs, se transformer en équations empiriques au moyen de la proposition VI (page 359).

Le travail peut être considérablement abrégé en prenant :

$$q_m = 0{,}093\,\frac{a^2}{p}$$

(voir page 11) et en continuant comme il a été dit plus haut.

NOTE IV

THÉORÈMES SUR LA RÉSISTANCE OBLIQUE

---

§ 1.

Nous supposerons dans cette note que le mouvement est un simple mouvement de translation et que la résistance élémentaire est proportionnelle à une puissance de la vitesse.

Soit une aire plane égale à l'unité et $\rho = Cv^n$ la résistance qu'elle éprouve quand elle se meut avec la vitesse v dirigée suivant la normale.

Si la vitesse v fait un angle ε avec la normale extérieure, la résistance est $\rho \cos^n \varepsilon$. En la décomposant suivant la direction de la vitesse et suivant une perpendiculaire à cette direction, nous avons pour la première force (*Force retardatrice*)

$$R = \rho \cos^{n+1} \varepsilon$$

et pour l'autre composante

$$\rho \cos^n \varepsilon \sin \varepsilon$$

laquelle fait un angle obtus avec la normale extérieure au plan. Nous appellerons *Force déviatrice* la composante de la résistance perpendiculaire à la vitesse et faisant un angle aigu avec la normale extérieure, et nous la représenterons par D. Nous aurons donc

$$D = -\rho \cos^n \varepsilon \sin \varepsilon = \frac{1}{n+1} \frac{dR}{d\varepsilon}.$$

Menons un plan parallèle à la direction de la vitesse, et soit i l'angle que ce plan fait avec D : la projection de la force déviatrice sur ce dernier est $D \cos i$.

Soit ON la normale à la surface considérée, OV la direction de la vitesse, VOV' le plan sur lequel on projette D (fig. 54).

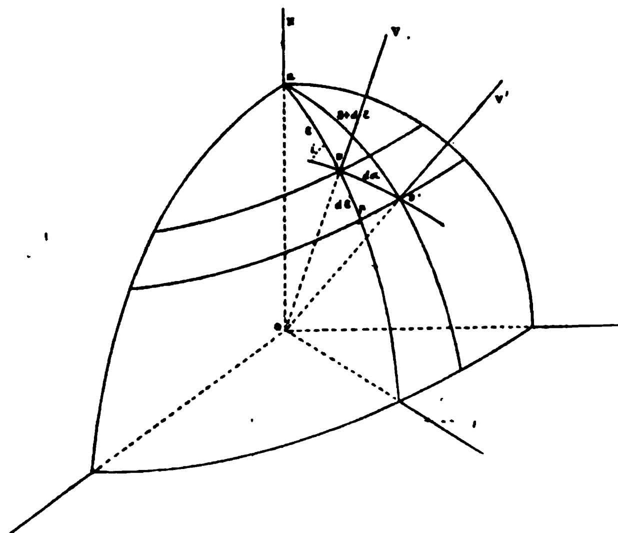


Fig. 54.

Traçons la sphère de rayon 1 ayant o pour centre : celle-ci rencontre les trois droites ON, OV, OV' aux trois points n, v, v' qui déterminent un triangle sphérique dans lequel on a

$$\overline{nv} = \iota$$

et l'angle formé par $\overline{nv}$ avec le prolongement de $\overline{v'v}$ est i. En supposant vv' infiniment petit, nous poserons

$$vv' = d\alpha,$$

en considérant OV' comme un déplacement de OV, par rapport à une droite fixe placée sur le plan VOV'.

Par v' traçons un arc de cercle $v'p$ perpendiculaire sur le prolongement de nv ; dans le petit triangle rectangle pvv', nous avons

$$vp = d\iota = d\alpha \cos i$$

d'où

$$\cos i = \frac{d\iota}{d\alpha}.$$

Donc :

$$D \cos i = \frac{1}{n+1} \frac{dR}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{n+1} \frac{dR}{d\alpha}.$$

Le quotient $\frac{dR}{d\alpha}$ est donc la dérivée de R par rapport à α, en convenant que la direction de la vitesse est définie par l'angle α qu'elle fait avec une droite fixe OA située dans le plan sur lequel on projette D. Nous représenterons cette projection par D_α.

Quant au sens de l'action de D, c'est-à-dire de

$$\frac{1}{n+1} \frac{dR}{d\alpha}$$

nous le considérerons comme positif, ainsi que cela se voit sur la figure, quand la force D_α considérée comme positive fait un angle aigu avec la droite OA.

§ 2

Considérons maintenant une surface quelconque continue, ou discontinue, et décomposons-la en éléments plans dS, et soit ε l'angle que la normale extérieure à dS fait avec la direction de la vitesse.

La résistance élémentaire est :

$$\rho\, dS \cos^n \varepsilon,$$

et la force retardatrice totale

(1) $$R = \rho \int dS \cos^n \varepsilon,$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments de la surface exposée à l'action de la résistance. Nous avons indiqué une intégrale simple, au lieu d'une intégrale double, parce que dS peut être considéré comme un élément du premier ordre, c'est-à-dire égal à la somme de tous les éléments plans sur lesquels la normale est inclinée de ε sur la direction de la vitesse.

La force déviatrice élémentaire est :

$$\frac{\rho}{n+1} dS \frac{d \cos^{n+1} \varepsilon}{d\varepsilon},$$

et la projection de celle-ci sur un plan quelconque parallèle à la vitesse

$$\frac{\rho}{n+1} dS \frac{d \cos^{n+1} \varepsilon}{d\alpha},$$

$d\alpha$ étant le déplacement angulaire, supposé ou virtuel, de la vitesse dans ce plan. La force déviatrice totale estimée suivant ce plan est donc :

(2) $$D_\alpha = \frac{\rho}{n+1} \int dS \frac{d \cos^{n+1} \varepsilon}{d\alpha}.$$

Si les limites de la surface soumise à la résistance sont indépendantes de α, on a évidemment :

(3) $$\int dS \frac{d \cos^{n+1} \varepsilon}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int dS \cos^{n+1} \varepsilon,$$

et par conséquent

(4) $$D_\alpha = \frac{1}{n+1} \frac{dR}{d\alpha}.$$

Mais ce cas n'est pas le cas général, parce que la surface exposée à la résistance ne comprend que les points pour lesquels on a $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Si donc le corps renferme des points, pour lesquels on a $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$, les éléments correspondants doivent être exclus de l'intégration, et la limite de la surface exposée est une ligne donnée par l'équation :

$$\cos \varepsilon = 0.$$

Afin de faire voir comment l'équation précédente est encore applicable même dans ce cas, appelons S la surface exposée, qui correspond à une valeur donnée de α, S′ celle qui correspond à $\alpha + d\alpha$, S″ la portion commune à S et à S′. Appelons en outre R et R″ les valeurs de l'intégrale (1) quand elle est limitée à la surface S entière ou à la seule surface S″, R′ la valeur de R correspondant à $\alpha + d\alpha$, et limitée par conséquent à la surface S′. On a

$$R = R'' + (S - S'') K$$

$$R' = R'' + \frac{dR''}{d\alpha} d\alpha + (S' - S'') K'$$

K et K′ désignant des valeurs moyennes entre toutes celles que $\rho \cos^n \varepsilon$ prend entre les limites $S - S''$ et $S' - S''$. Mais ces deux surfaces sont infiniment petites, puisque S, S′, S″ diffèrent infiniment peu l'une de l'autre. De plus, $\cos^n \varepsilon$ dans l'intérieur de $S - S''$ et de $S' - S''$ est également infiniment petit puisque ces surfaces sont adjacentes au contour $\cos \varepsilon = o$; on a par conséquent

$$R' - R = \frac{dR''}{d\alpha} d\alpha + I^2$$

I^2 désignant un infiniment petit du second ordre. Quand, maintenant, nous passons de α à $\alpha + d\alpha$, l'accroissement de R, c'est-à-dire $R' - R$ est $\frac{dR}{d\alpha} d\alpha$, on a donc

$$\frac{dR}{d\alpha} d\alpha = \frac{dR''}{d\alpha} d\alpha + I^2.$$

Le premier terme du second membre représente la variation de R″, ou, ce qui revient au même, la valeur de la variation de R dans les limites de la surface, quand on ne tient compte que de ε. Cette valeur est donc égale à

$$\rho \int^{\prime} dS \frac{d \cos^n \varepsilon}{d\alpha}.$$

Le second terme I^2 représente la variation de R par rapport aux limites, mais comme il est du second ordre, on peut le négliger. L'équation (4) s'applique donc également au cas où les limites de la surface dépendent de α.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Dans une surface quelconque la force déviatrice évaluée dans un plan quelconque parallèle à la vitesse est proportionnelle à la dérivée de la force retardatrice par rapport à l'angle que fait la vitesse avec une droite placée dans ce plan.

Dans le cas d'un projectile oblong, la force déviatrice est toujours dans le plan méridien parallèle à la vitesse : par conséquent l'on peut énoncer le théorème suivant :

Pour les projectiles oblongs, la résistance totale étant décomposée en deux forces, l'une (retardatrice) en sens inverse de la vitesse, l'autre (déviatrice) perpendiculaire à cette dernière, et dirigée vers la partie

indiquée par la pointe du projectile, la force déviatrice est la dérivée de la force retardatrice relativement à l'obliquité divisée par n + 1. *La force déviatrice pousse donc le projectile vers la partie indiquée par la pointe ou vers la partie opposée, suivant que la force retardatrice croît ou décroît avec l'obliquité.*

Il est facile de voir que dans le cas où la résistance élémentaire est représentée par

$$\rho = C_0 + C_1 v + C_2 v^2 + \ldots\ldots + C_n v^n$$

et la force retardatrice par

$$R = R_0 + R_1 v + R_2 v^2 + \ldots\ldots + R_n v^n$$

la force déviatrice évaluée dans un plan quelconque parallèle à la vitesse est

$$D = \frac{dR_0}{d\alpha} + \frac{1}{2}\frac{dR_1}{d\alpha} v + \frac{1}{3}\frac{dR_2}{d\alpha} v^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1}\frac{dR_n}{d\alpha} v^n.$$

Comme application de ce qui précède, considérons la surface convexe d'une hémisphère et admettons la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. En appelant r le rayon de la sphère, la force retardatrice a pour valeur

$$R = \frac{\rho\pi r^2}{8}(2 + 3\cos\alpha - \cos^3\alpha)$$

α étant l'angle que fait la vitesse avec l'axe de l'hémisphère. On a donc immédiatement

$$\frac{dR}{d\alpha} = -\frac{\rho\pi r^2}{8}(3\sin\alpha - 3\cos^2\alpha\sin\alpha) = -\frac{3}{8}\rho\pi r^2 \sin^3\alpha$$

et par suite,

$$D = -\frac{\rho\pi r^2}{8}\sin^3\alpha = -\frac{\rho\pi r^2}{32}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha).$$

Le signe moins indique que la force déviatrice fait un angle obtus avec l'axe.

§ 3.

En revenant à une surface quelconque, par un point arbitraire O (que nous appellerons le pôle) menons des droites parallèles à

toutes les directions que peut prendre la vitesse relativement à la surface supposée fixe, ou parallèle à la première position. Prenons sur ces droites en partant du pôle, des longueurs proportionnelles aux forces retardatrices R, correspondant à ces directions.

Le lieu géométrique des extrémités de ces segments est une surface qu'on pourrait appeler surface retardatrice.

Traçons une sphère de rayon R_1, cette sphère coupe la surface retardatrice suivant une courbe que l'on peut appeler *courbe de niveau*. En effet, tous les rayons vecteurs de cette courbe étant égaux sont les directions de la vitesse représentant des forces retardatrices égales. On peut ainsi obtenir une infinité de lignes de niveau correspondant à une infinité de valeurs de R.

Menons par le pôle un plan tangent à une courbe de niveau. Soit M le point de contact, la force déviatrice correspondant à la vitesse de direction OM, projetée sur le plan tangent est nulle, puisqu'en passant du rayon vecteur OM au rayon vecteur infiniment voisin de la ligne de niveau, la force retardatrice ne change pas, et par suite la dérivée est nulle.

Par suite, la force déviatrice est dirigée suivant la normale au plan tangent.

Si la sphère qui donne la courbe de niveau devient tangente à la surface retardatrice, ou la rencontre en un seul point, le rayon vecteur au point de contact est un maximum ou un minimum : par conséquent lorsque la vitesse sera dans cette direction, la force déviatrice sera nulle.

Si la surface en mouvement est de révolution, la surface retardatrice l'est également, les lignes de niveau sont des cercles parallèles, les trajectoires orthogonales deviennent des lignes méridiennes et le rayon vecteur maximum ou minimum coïncide avec l'axe.

Dans le cas d'un hémisphère, en supposant la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, la génératrice de la surface retardatrice a pour équation polaire :

$$R = \frac{\rho\pi r^2}{8}(2 + 3\cos\alpha - \cos^3\alpha).$$

Posons

$$\frac{dR}{d\alpha} = -\frac{3\rho\pi r^2}{32}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha) = 0,$$

on a

$$\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad R_0 = \frac{\rho\pi r^2}{2}.$$

Afin de savoir si cette valeur est un maximum ou un minimum, remarquons que pour $\alpha = o$, on a

$$\frac{d^2R}{d\alpha^2} = -\frac{9\rho\pi r^2}{32}(\cos\alpha - \cos 3\alpha) = 0,$$

$$\frac{d^3R}{d\alpha^3} = +\frac{9\rho\pi r^2}{32}(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha) = 0,$$

$$\frac{d^4R}{d\alpha^4} = +\frac{9\rho\pi r^2}{32}(\cos\alpha - 9\cos 3\alpha) = -\frac{9\rho\pi r^2}{4}.$$

Par conséquent R_0 est un maximum.

§ 4.

Résistance sur un hémisphère.

Considérons enfin la résistance exercée sur la surface convexe d'un hémisphère (fig. 55), se déplaçant dans une direction OV faisant avec l'axe l'angle δ. La portion de la surface soumise à la résistance s'obtiendra en menant par le centre O un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse.

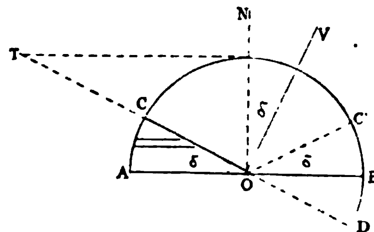


Fig. 55.

Soit OBC la portion soumise à la résistance de l'air. Cette résistance peut être considérée comme étant la différence entre celle qui agirait sur l'hémisphère entier CBD, et celle qui agirait sur le segment OBD. Admettons que nous connaissions la résistance exercée sur OBD, et désignons-la par $\rho_{\cdot} F_n(\delta)$ (¹).

Remarquons maintenant que l'angle formé par les deux plans OB, OD, qui limitent le segment, étant δ, $\rho_{\cdot} F_n(\pi)$ représente la ré-

(¹) Nous mettons le mot résistance à la place de force retardatrice pour abréger, aucune équivoque n'étant possible.

sistance à laquelle est soumise tout l'hémisphère, par conséquent la résistance sur OBC est

$$\rho_n [F_n(\pi) - F_n(\delta)].$$

Mais $\rho_n F_n(\delta)$ représente également la résistance exercée sur le segment OAC, dans le cas où il se déplacerait suivant l'axe ON. Si donc nous menons le plan OC′ symétrique de OC,

$$\rho_n F_n(\pi - \delta)$$

représentera la résistance exercée sur AOC′, si ce segment se déplaçait suivant ON, et cette résistance est évidemment égale à celle que subit le segment OBC se déplaçant suivant OV.

Nous avons donc

$$F_n(\pi - \delta) = F_n(\pi) - F_n(\delta).$$

Deux méthodes se présentent donc pour déterminer la force retardatrice agissant sur OBC, quand on connaît $\rho_n F_n(\delta)$; soit en la posant égale à

$$\rho_n [F_n(\pi) - F_n(\delta)]$$

ou à

$$\rho_n F_n(\pi - \delta).$$

Déterminons donc $\rho_n F_n(\delta)$ en la considérant comme étant la résistance exercée sur le segment AOC, se déplaçant suivant ON.

Nous avons comme toujours :

$$F_n(\delta) = \int dS \cos^{n+1} \varepsilon,$$

en désignant par dS l'élément du premier ordre, dont l'inclinaison sur ON est ε. Appelons r le rayon de la sphère, cet élément peut être égalé à une surface cylindrique de hauteur $rd\varepsilon$ ayant pour base un arc de cercle ayant pour rayon $r \sin \varepsilon$ et dont l'ouverture sera indiquée par $2L$.

Nous avons donc :

$$dS = 2r^2 L d\varepsilon \sin \varepsilon.$$

La valeur de L est donnée par l'équation

$$(5) \qquad \operatorname{tg} \varepsilon \cos L = \operatorname{cotg} \delta$$

car en achevant la sphère, et en menant du point n, sur ON, les tangentes aux deux cercles qui limitent L, et en les prolongeant

jusqu'à la rencontre en T et T' du plan OC, la première devient la projection de la seconde, on a donc :

$$\overline{nT}\cos L = \overline{nT'},$$

mais

$$nT = r\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \quad , \quad nT' = r\,\mathrm{cotg}\,\delta,$$

d'où

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos L = \mathrm{cotg}\,\delta.$$

Ceci posé, nous avons

$$F_n(\delta) = 2r^2\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\delta} L\,d\varepsilon \sin\varepsilon \cos^{n+1}\varepsilon = -\frac{2r^2}{n+2}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} L\,d\cos^{n+2}\varepsilon,$$

et en intégrant par parties

$$\int L\,d\cos^{n+2}\varepsilon = L\cos^{n+2}\varepsilon - \int \cos^{n+2}\varepsilon\,dL.$$

En passant aux limites et en observant que l'on a :

pour $$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \delta \quad , \quad L = 0,$$

et pour $$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \cos\varepsilon = 0 \quad , \quad L = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$F_n(\delta) = \frac{2r^2}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dL\cos^{n+2}\varepsilon.$$

D'autre part l'équation (5) donne :

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos L}{\sqrt{\mathrm{cotg}^2\delta + \cos^2 L}},$$

par suite en posant pour abréger

$$\mathrm{cotg}\,\delta = a,$$

on a

$$F^n(\delta) = \frac{2r^2}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dL\,\frac{\cos^{n+2}L}{(a^2+\cos^2 L)^{\frac{n+2}{2}}}. \tag{6}$$

Au lieu d'intégrer, multiplions par a^{n+2} et différentions par rapport à a, nous avons d'abord

$$F_n(\delta)\,a^{n+2} = \frac{2r^2}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dL\cos^{n+2}L}{\left(1+\frac{\cos^2 L}{a^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}},$$

et comme

$$\frac{d}{da}\frac{1}{\left(1+\frac{\cos^2 L}{a^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}}=\frac{(n+2)\,a^{n+1}\cos^2 L}{(a^2+\cos^2 L)^{\frac{n+4}{2}}},$$

on a

$$\frac{d}{da}[F_n(\delta)\,a^{n+2}]=2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^{n+1}\cos^{n+4}L\,dL}{(a^2+\cos^2 L)^{\frac{n+4}{2}}},$$

et par conséquent

(7) $$\frac{d[F_n(\delta)a^{n+2}]}{(n+4)\,a^{n+1}\,da}=\frac{2r^2}{n+4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n+4}L\,dL}{(a^2+\cos^2 L)^{\frac{n+4}{2}}}.$$

En comparant (6) et (7), on trouve que pour passer de la première à la seconde, il suffit de changer n en $n+2$. On a donc,

(8) $$F_{n+2}(\delta)=\frac{\delta[F_n(\delta)\,a^{n+2}]}{(n+4)\,a^{n+1}da}.$$

On tire de celle-ci

$$F_{n+2}(\delta)=\frac{n+2}{n+4}F_n(\delta)+\frac{dF_n(\delta)}{da}\frac{a}{n+4},$$

ou, en mettant pour a sa valeur $\cot g\,\delta$,

(9) $$F_{n+2}(\delta)=\frac{n+2}{n+4}F_n(\delta)-\frac{\sin\delta\cos\delta}{n+2}\frac{dF_n(\delta)}{d\delta}.$$

Remarquons maintenant que $\rho_n F_n(\delta)$ représente la résistance sur le segment supplémentaire OBD. Pour obtenir la résistance sur OBC, il suffit de remplacer δ par $\pi-\delta$, on a alors :

$$F_{n+2}(\pi-\delta)=\frac{n+2}{n+4}F_n(\pi-\delta)-\frac{\sin\delta\cos\delta}{n+4}\frac{dF_n(\pi-\delta)}{d\delta}.$$

En supposant maintenant que $\rho^n F^n(\delta)$ représente la résistance sur OBC, la formule (9) ne se modifie pas.

Ayant déterminé la résistance pour une valeur quelconque de n, il est donc facile de trouver les résistances pour $n+2$, $n+4$, etc., au moyen de simples différentiations. Pour l'obtenir pour tous les nombres entiers, il suffit donc de la connaître pour $n=o$ et pour $n=-1$. Pour $n=o$, on a :

$$F_0(\delta)=\int dS\cos\varepsilon,$$

et pour $n = -1$:

$$F_{-1}(\delta) = \int dS.$$

Or $\int dS \cos\varepsilon$ n'est autre chose que la projection du segment OBC sur un des plans qui lui servent de limite, c'est-à-dire la somme de l'un des demi-cercles et de la projection de l'autre sur le premier. $\int dS$ représente en outre la surface du segment. Nous avons donc

$$F_0(\delta) = \frac{\pi r^2}{2}(1 + \cos\delta),$$
$$F_{-1}(\delta) = 2r^2(\pi - \delta).$$

Ces formules combinées avec la formule (9) donnent en partant de $n = o$,

$$F_2(\delta) = \frac{\pi r^2}{8}\left[2 + 3\cos\delta - \cos^3\delta\right],$$

$$F_4(\delta) = \frac{\pi r^2}{48}\left[8 + 15\cos\delta - 10\cos^3\delta + 3\cos^5\delta\right],$$

$$F_6(\delta) = \frac{\pi r^2}{128}\left[16 + 35\cos\delta - 35\cos^3\delta + 21\cos^5\delta - 5\cos^7\delta\right]$$

. . . .

et en partant de $n = -1$, on trouve :

$$F_1(\delta) = \frac{2r^3}{8}\left[\pi - \delta + \sin\delta\cos\delta\right],$$

$$F_3(\delta) = \frac{2r^3}{15}\left[3\pi - 3\delta + 3\sin\delta\cos\delta + 2\sin^3\delta\cos\delta\right],$$

$$F_5(\delta) = \frac{2r^3}{105}\left[15(\pi - \delta) + 15\sin\delta\cos\delta + 10\sin^3\delta\cos\delta + 8\sin^5\delta\cos\delta\right]$$

. . . .

Connaissant la force retardatrice $\rho_n F_n(\delta)$, la force déviatrice est immédiatement fournie par l'équation

$$D = \frac{\rho_n}{n+1}\frac{dF_n(\delta)}{d\delta}.$$

Il est évident que si la résistance élémentaire est de la forme

$$\rho = C_0 + C_1 v + C_2 v^2 + \ldots\ldots + C_n v^n,$$

la force retardatrice sur un hémisphère est

$$C_0 F_0(\delta) + C_1 v F_1(\delta) + \ldots\ldots + C_n v^n F_n(\delta),$$

et la force déviatrice

$$C_0 F'_0(\delta) + \frac{C_1 v}{2} F'_1(\delta) + \ldots\ldots + \frac{C_n v^n}{n+1} F'_n(\delta).$$

NOTE V

LE POTENTIEL DE LA RÉSISTANCE

Les formules connues qui permettent de calculer la résistance d'un fluide au mouvement d'une surface ne peuvent servir que dans le cas d'une simple translation. Nous nous proposons dans cette note de trouver les expressions de la résistance, lorsque le corps est animé à la fois d'un mouvement de translation et de rotation autour d'un axe quelconque. Dans le cas le plus général, ces expressions sont au nombre de six, correspondant aux trois composantes de la force de résistance, et aux trois composantes du couple de résistance : mais, ces expressions peuvent être obtenues par les dérivations partielles d'une seule intégrale. C'est à cette intégrale que nous avons donné le nom de *potentiel de la résistance*.

§ 1.

Le mouvement, quel qu'il soit, d'un corps rigide peut toujours se décomposer en trois mouvements de translation suivant trois axes orthogonaux, et en trois mouvements de rotation autour de ces mêmes axes.

Soient u, v, w les trois composantes de la vitesse de translation suivant les trois axes orthogonaux Ox, Oy, Oz, et p, q, r les trois composantes de la vitesse angulaire autour de ces mêmes axes : il s'agit de déterminer les composantes de la vitesse absolue d'un point quelconque (x, y, z) du corps.

Aux trois composantes de translation u, v, w communes à tous

les points du mobile, il faut ajouter celles qui proviennent du mouvement de rotation.

Nous supposerons que p, q, r sont positifs, lorsqu'un observateur placé successivement le long de chaque axe voit le corps tourner dans les sens yz, zx, xy. Ceci posé, en vertu de la vitesse angulaire p, le corps tournant autour de Ox, les vitesses du point (x, y, z) parallèles à

$$Ox \quad , \quad Oy \quad , \quad Oz$$

seront

$$o \quad , \quad -pz \quad , \quad py.$$

Semblablement, les vitesses du même point suivant les mêmes axes, dépendant de q et r, seront

$$\begin{array}{ccc} qz & , \quad o & , \quad -qx \\ -ry & , \quad rx & , \quad o. \end{array}$$

Les vitesses absolues suivant les trois axes seront donc,

$$\begin{aligned} &u + qz - ry, \\ &v + rx - pz, \\ &w + py - qx. \end{aligned}$$

Sans rien changer au mouvement du corps, l'axe de rotation peut être transporté parallèlement à lui-même : la vitesse angulaire ne change ni en valeur, ni en direction, la vitesse de translation seule est modifiée. Soient a, b, c les coordonnées d'un point du nouvel axe de rotation, et soient u' v' w' les composantes de la nouvelle vitesse de translation. Comme la vitesse absolue de chaque point ne change pas, on aura pour la vitesse parallèle à l'axe des x,

$$u + qz - ry = u' + q(z - c) - r(y - b)$$

d'où :

$$u' = u + qc - rb,$$

et de même pour les deux autres vitesses,

$$\begin{aligned} v' &= v + ra - pc, \\ w' &= w + pb - qa. \end{aligned}$$

Parmi toutes les positions que peut occuper l'axe résultant de rotation, il en existe une pour laquelle la vitesse de translation devient parallèle à l'axe de rotation. Les coordonnées d'un point

quelconque de cet axe, connu sous le nom d'*axe central,* sont données par les équations

$$a = \frac{qw - rv}{\omega^2} + Sp,$$

$$b = \frac{ru - pw}{\omega^2} + Sq,$$

$$c = \frac{pv - qu}{\omega^2} + Sr,$$

S étant une quantité indéterminée, et ω la vitesse angulaire : Les composantes de la nouvelle vitesse de translation sont données par les relations

$$\frac{u'}{p} = \frac{v'}{q} = \frac{w'}{r} = \frac{pu + qv + rw}{\omega^2}.$$

Par analogie, dans un système de forces appliquées à un corps solide, parmi toutes les directions que peut avoir la force résultante, il en est une pour laquelle l'axe du couple résultant devient parallèle à cette résultante.

Appelons X, Y, Z les composantes de la force résultante, et L, M, N les composantes du couple résultant, relatives à une origine quelconque, les coordonnées d'un point quelconque de l'axe du couple, appelé également *axe central,* sont données par les relations

$$a = \frac{NY - MZ}{R^2} + SX,$$

$$b = \frac{LZ - NX}{R^2} + SY,$$

$$c = \frac{MX - LY}{R^2} + SZ,$$

S étant une quantité indéterminée, et R la force résultante. Les composantes du nouveau couple sont données par les équations

$$\frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z} = \frac{LX + MY + NZ}{R^2}.$$

Il est presque superflu de remarquer que l'axe central des vitesses est indépendant de la constitution du solide, ainsi que de sa surface, tandis que l'axe central des forces, quand celles-ci sont le résultat d'une résistance, est bien indépendant de la constitution intérieure du solide, mais non de sa forme.

§ 2.

Soit dS l'élément de surface d'un corps de forme quelconque, w la vitesse absolue de l'élément projeté sur la normale extérieure, $dS\,f(\mathrm{w})$ la résistance sur dS, agissant normalement à dS. Posons :

$$\int_0^{\mathrm{w}} f(\mathrm{w})\,d\mathrm{w} = \mathrm{F}(\mathrm{w})\,;$$

nous appelons *potentiel de la résistance* l'expression

$$\mathrm{U} = \int dS\,\mathrm{F}(\mathrm{w}),$$

l'intégrale s'étendant à tous les points de la surface pour lesquels on a $\mathrm{w} > o$.

Ceci posé, nous commencerons par démontrer le théorème suivant :

I. *Les dérivées partielles*

$$(1) \qquad \mathrm{R}_x = -\frac{d\mathrm{U}}{du}\ ,\quad \mathrm{R}_y = -\frac{d\mathrm{U}}{dv}\ ,\quad \mathrm{R}_z = -\frac{d\mathrm{U}}{dw}$$

représentent les composantes de la force résistante suivant les trois axes, et les dérivées partielles

$$(2) \qquad \mathrm{L}_x = -\frac{d\mathrm{U}}{dp}\ ,\quad \mathrm{L}_y = -\frac{d\mathrm{U}}{dq}\ ,\quad \mathrm{L}_z = -\frac{d\mathrm{U}}{dr}$$

représentent les trois composantes du couple résistant.

Soit en effet α, β, γ, les angles formés par la normale extérieure avec les trois axes, normale sur laquelle on compte la vitesse w. Nous avons :

$$\mathrm{w} = (u + qz - ry)\cos\alpha + (v + rx - pz)\cos\beta + (w + py - qx)\cos\gamma.$$

On tire de cette équation,

$$\frac{d\mathrm{w}}{du} = \cos\alpha\ ,\quad \frac{d\mathrm{w}}{dv} = \cos\beta\ ,\quad \frac{d\mathrm{w}}{dw} = \cos\gamma,$$

$$\frac{d\mathrm{w}}{dp} = y\cos\gamma - z\cos\beta = y\frac{d\mathrm{w}}{dw} - z\frac{d\mathrm{w}}{dv},$$

$$\frac{d\mathrm{w}}{dq} = z\cos\alpha - x\cos\gamma = z\frac{d\mathrm{w}}{du} - x\frac{d\mathrm{w}}{dw},$$

$$\frac{d\mathrm{w}}{dr} = x\cos\beta - y\cos\alpha = x\frac{d\mathrm{w}}{dv} - y\frac{d\mathrm{w}}{du}.$$

D'autre part, la résistance sur dS étant $dSf(w)$ ou $dSF'(w)$, en la multipliant successivement par $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$, nous avons les composantes élémentaires suivant les trois axes, c'est-à-dire

$$-dSF'(w)\frac{dw}{du}\quad,\quad -dSF'(w)\frac{dw}{dv}\quad,\quad -dSF'(w)\frac{dw}{dw}$$

ou encore

$$-dS\frac{dF(w)}{du}\quad,\quad -dS\frac{dF(w)}{dv}\quad,\quad -dS\frac{dF(w)}{dw}.$$

Les composantes du couple résistant provenant de la résistance exercée sur l'élément dS sont :

$$-dSF'(w)\left(y\frac{dw}{dw}-z\frac{dw}{dv}\right)=-dSF'(w)\frac{dw}{dp},$$
$$-dSF'(w)\left(z\frac{dw}{du}-x\frac{dw}{dw}\right)=-dSF'(w)\frac{dw}{dq},$$
$$-dSF'(w)\left(x\frac{dw}{dv}-y\frac{dw}{du}\right)=-dSF'(w)\frac{dw}{dr},$$

ou

$$-dS\frac{dF}{dp}\quad,\quad -dS\frac{dF}{dq}\quad,\quad -dS\frac{dF}{dr}.$$

En intégrant, les composantes totales de la force résistante sont :

$$-\int dS\frac{dF}{du}\quad,\quad -\int dS\frac{dF}{dv}\quad,\quad -\int dS\frac{dF}{dw}$$

et celles du couple

$$-\int dS\frac{dF}{dp}\quad,\quad -\int dS\frac{dF}{dq}\quad,\quad -\int dS\frac{dF}{dr}.$$

Pour passer de ces expressions aux expressions (1) et (2) que nous voulons démontrer, il suffit de prouver qu'en désignant par t l'une quelconque des six quantités u, v, w, p, q, r, l'on a toujours,

$$\frac{d}{dt}\int dS\,.\,F=\int dS\frac{dF}{dt}\cdot$$

Cette égalité est évidente, lorsque les limites de l'intégrale sont indépendantes de t, mais, dans le cas général, la surface à laquelle

s'applique l'intégrale dépend de t, car elle a pour contour limite la ligne définie par $w = o$, ligne qui dépend des six quantités u, v, w, p, q, r.

Appelons S la surface qui correspond à une valeur donnée de t, S', celle qui correspond à $t + dt$, S'' la portion commune à S et S'. Appelons en outre U et U'', les valeurs que prend le potentiel $\int d\mathrm{S}\,\mathrm{F}(w)$, quand il est borné à la surface S et à la surface S'', et U' la valeur correspondant à $t + dt$, et limitée par conséquent à la surface S'.

Nous avons :

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}'' + (\mathrm{S} - \mathrm{S}'')\,\mathrm{K}$$

$$\mathrm{U}' = \mathrm{U}'' + \frac{d\mathrm{U}''}{dt}\,dt + (\mathrm{S}' - \mathrm{S}'')\,\mathrm{K}'$$

K et K' étant des valeurs moyennes parmi toutes celles que F (w) prend entre les limites de S — S'' et de S' — S''. Ces deux dernières surfaces sont infiniment petites, puisque S, S', S'' diffèrent infiniment peu l'une de l'autre. D'autre part F (w) dans l'intérieur de S — S'' et de S' — S'' est également infiniment petit, puisque ces surfaces sont adjacentes au contour $w = o$, et dans le voisinage de ce contour w et par conséquent F (w) est infiniment petit.

Il en résulte par conséquent que l'on a,

$$\mathrm{U}' - \mathrm{U} = \frac{d\mathrm{U}''}{dt}\,dt + \mathrm{I}^2,$$

en désignant par I^2 un infiniment petit du second ordre.

Maintenant lorsqu'on passe de t à $t + dt$, l'augmentation de U, c'est-à-dire U' — U est $\frac{d\mathrm{U}}{dt}\,dt$, par suite :

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt}\,dt = \frac{d\mathrm{U}''}{dt}\,dt + \mathrm{I}^2 \cdot$$

Le premier terme du second membre représente la variation de U'', c'est-à-dire la variation de U en considérant comme fixes les limites de la surface, c'est-à-dire la variation de U par rapport seulement à F, il est par suite égal à

$$\int d\mathrm{S}\,\frac{d\mathrm{F}}{dt}\,dt \cdot$$

Le second terme I^2 représente la variation de U par rapport seulement aux limites, mais, comme il est du second ordre, on peut le supprimer sans nuire à l'exactitude, donc :

$$\frac{dU}{dt} = \int dS \frac{dF}{dt}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Observation. — Les équations (1) et (2) supposent que les six quantités par rapport auxquelles sont prises les dérivées de U ne sont pas nulles. Si l'une d'elles le devenait, il serait nécessaire de la laisser figurer dans les équations avec la lettre qui la représente et de l'annuler seulement après avoir fait la dérivation. Si par exemple la vitesse de translation était dans le plan xy, on aurait :

$$R_z = -\left(\frac{dU}{dw}\right)_w = 0.$$

§ 3.

Soit V la vitesse de translation, et soit θ l'angle qu'elle fait avec l'axe des z, φ celui que fait avec l'axe des x la projection de V sur le plan xy, angle compté dans le sens xy. Nous avons :

$$u = V \cos\varphi \sin\theta \quad , \quad v = V \sin\varphi \sin\theta \quad , \quad w = V \cos\theta.$$

Ceci posé, on peut démontrer le théorème suivant.

II. *Si l'on suppose que le potentiel soit exprimé en fonction de V, φ et θ, la résultante de la résistance peut être décomposée en trois forces rectangulaires :*

$$R_v = \frac{dU}{dV} \quad , \quad R_\theta = \frac{dU}{Vd\theta} \quad , \quad R_\varphi = \frac{dU}{V \sin\theta\, d\varphi}.$$

La première est dirigée en sens contraire de V, la seconde est dans le plan Vz, et fait un angle aigu avec l'axe des z, et la troisième est dirigée relativement à R_v et à R_θ, comme Ox l'est par rapport à Oz et à Oy (¹).

(¹) Cela signifie que lorsque R_v et R_θ coïncideront avec Ox et Oy, R_φ coïncidera alors avec Ox.

Les angles que R_v fait avec les axes étant les suppléments de ceux que V fait avec les mêmes axes, nous avons :

$$R_v = -R_x \cos\varphi \sin\theta - R_y \sin\theta \sin\varphi - R_z \cos\theta$$
$$= \frac{dU}{du}\frac{du}{dV} + \frac{dU}{dv}\frac{dv}{dV} + \frac{dU}{dw}\frac{dw}{dV} = \frac{dU}{dV}.$$

Quant à la composante R_θ, il suffit de remarquer que les cosinus de sa direction s'obtiennent au moyen de ceux de V, en remplaçant θ par son complément, et φ par $\pi + \varphi$, on a ainsi :

$$R_\theta = -R_x \cos\varphi \cos\theta - R_y \sin\varphi \cos\theta + R_z \sin\theta$$
$$= \frac{1}{V}\left(\frac{dU}{du}\frac{du}{d\theta} + \frac{dU}{dv}\frac{dv}{d\theta} + \frac{dU}{dw}\frac{dw}{d\theta}\right) = \frac{dU}{V d\theta}.$$

En ce qui concerne la valeur de R_φ, observons que cette composante étant perpendiculaire au plan Vz, elle fait avec Oz, Ox, Oy, les angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varphi, \varphi$; par conséquent

$$R_\varphi = -R_x \sin\varphi + R_y \cos\varphi = \frac{1}{V \sin\theta}\left[\frac{dU}{du}\frac{du}{d\varphi} + \frac{dU}{dv}\frac{dv}{d\varphi}\right]$$
$$= \frac{1}{V \sin\theta}\frac{dU}{d\varphi}.$$

Si l'on suppose que ω représente la vitesse angulaire résultante de p, q, r, et que la position de ω soit déterminée par les angles θ' et φ' analogues à ceux qui déterminent V, on démontre d'une manière analogue le théorème suivant :

III. *Quand le potentiel est exprimé en fonction de ω, θ' et φ', le couple de résistance peut être décomposé en trois autres perpendiculaires entre eux :*

$$L_\omega = \frac{dU}{d\omega} \quad , \quad L_{\theta'} = \frac{dU}{\omega d\theta'} \quad , \quad L_{\varphi'} = \frac{dU}{\omega \sin\theta' d\varphi'}.$$

Le premier est dirigé en sens inverse de ω, le second est dans le plan ωz, et fait un angle aigu avec Oz, et le troisième est dirigé relativement à L_ω et $L_{\theta'}$, comme Ox l'est relativement à Oz et Oy.

§ 4

Surfaces de révolution.

Soit une surface de révolution rapportée à trois axes orthogonaux $x, y, z,$ ce dernier étant supposé coïncider avec l'axe de la surface et dirigé de façon à faire un angle aigu avec la vitesse de translation. Soit $\rho = \psi(z)$ l'équation de la génératrice, et φ l'angle formé par le méridien passant par le point $x, y, z,$ avec l'axe des x (dans le sens xy). Nous avons :

(3) $$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi$$

Désignons par λ, l'angle que la normale extérieure à la surface fait avec l'axe des z, angle défini analytiquement par :

(4) $$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{dz}{d\rho} = -\frac{1}{\psi'(z)}$$

Les cosinus de la direction de cette normale seront :

$$\sin\lambda\cos\varphi \quad , \quad \sin\lambda\sin\varphi \quad , \quad \cos\lambda$$

et l'on aura

$$\mathrm{w} = (u + qz - ry)\cos\varphi\sin\lambda + (v + rx - pz)\sin\varphi\sin\lambda + (w + py - qx)\cos\lambda$$

ou

(5) $$\mathrm{w} = w\cos\lambda + \cos\varphi\left[u\sin\lambda + q\,(z\sin\lambda - \rho\cos\lambda)\right] + \sin\varphi\left[v\sin\lambda - p\,(z\sin\lambda - \rho\cos\lambda)\right].$$

w étant indépendant de r, il en sera de même du potentiel : par conséquent $\frac{dU}{dr} = o$. D'où le théorème:

IV. — *Quel que soit le mouvement d'une surface de révolution, l'axe du couple résistant est toujours perpendiculaire à l'axe de la surface.*

Représentons les quantités comprises entre les parenthèses dans l'expression de w par

$$\Delta\cos\Phi \quad , \quad \Delta\sin\Phi,$$

on a :

(6) $$\mathrm{w} = w\cos\lambda + \Delta\cos(\Phi - \varphi)$$

Δ est indépendant de φ, et a pour valeur :

$$\Delta = \sqrt{(u \sin\lambda - qm)^2 + (v \sin\lambda - pm)^2}, \tag{7}$$

en posant pour abréger :

$$z \sin\lambda - \rho \cos\lambda = m. \tag{8}$$

Nous supposerons Δ toujours positif.

L'élément de surface soumis à la résistance, en appelant ds un élément de la génératrice, est $dS = \rho\, d\varphi\, ds$.

Par suite le potentiel est :

$$U = \int \rho\, ds \int d\varphi\, F\left[w \cos\lambda + \Delta \cos(\Phi - \varphi)\right].$$

Si nous posons $\varphi - \Phi = L$, et par conséquent dL à la place de $d\varphi$ (la seconde intégrale ne se rapportant pas à λ), on a :

$$U = \int \rho\, ds \int dL\, F\left[w \cos\lambda + \Delta \cos L\right] \tag{9}$$

et les intégrales doivent être prises pour tous les points satisfaisant à l'inégalité,

$$w \cos\lambda + \Delta \cos L > 0$$

ou bien

$$\cos L > -\frac{w \cos\lambda}{\Delta}. \tag{10}$$

Cette inégalité montre qu'en général il sera nécessaire de partager la surface en deux portions suivant les valeurs extrêmes que prend

$$\frac{w \cos\lambda}{\Delta}.$$

La première portion comprend tous les points de la surface pour lesquels on a $-\frac{w \cos\lambda}{\Delta} < -1$. En tous ces points, L peut prendre toutes les valeurs possibles et l'intégration s'étendra donc de $-\pi$ à $+\pi$.

La seconde portion comprend tous les points pour lesquels $\frac{w \cos\lambda}{\Delta}$ est compris entre -1 et $+1$. Si dans ce cas, on pose

$$\frac{-w \cos\lambda}{\Delta} = \cos L_1.$$

l'intégration pour toutes les valeurs de λ s'étend de $L = -L_1$ à

$L = L_1$, puisque pour toutes les valeurs de L comprises entre ces limites, on vérifie l'inégalité (10).

§ 5

Dans le cas d'une surface de révolution, comme on a

(10)' $$w = w \cos\lambda + \Delta \cos L,$$

le potentiel se présente sous la forme :

(11) $$U = \int dS F(w \cos\lambda + \Delta \cos L),$$

et en nous reportant à ce que nous avons dit au § 2, nous pouvons écrire :

$$\frac{dU}{dt} = \int dS \frac{dF}{dt} = \int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{d\Delta}{dt},$$

où t représente une quelconque des quantités u, v, p, q. Donc en se rappelant la valeur de Δ, nous avons :

(12) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dU}{du} &= \int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{u\sin\lambda + qm}{\Delta}\sin\lambda, \\ \frac{dU}{dv} &= \int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{v\sin\lambda - pm}{\Delta}\sin\lambda, \\ \frac{dU}{dp} &= -\int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{v\sin\lambda - pm}{\Delta}m, \\ \frac{dU}{dq} &= \int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{u\sin\lambda + qm}{\Delta}m, \\ \frac{dU}{dw} &= \int dS \frac{dF}{dw} \quad , \quad \frac{dU}{dr} = 0. \end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

(13) $$\int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{\sin^2\lambda}{\Delta} = A \quad , \quad \int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{m^2}{\Delta} = B \quad , \quad \int dS \frac{dF}{d\Delta}\frac{m\sin\lambda}{\Delta} = C,$$

nous avons :

$$\frac{dU}{du} = Au + Cq \quad , \quad \frac{dU}{dv} = Av - Cp,$$

$$\frac{dU}{dp} = Bp - Cv \quad , \quad \frac{dU}{dq} = Bq + Cu,$$

$$\frac{dU}{du}\frac{dU}{dp} + \frac{dU}{dv}\frac{dU}{dq} = (Au + Cq)(Bp - Cv) + (Av - Cp)(Bq + Cu)$$
$$= (AB - C^2)(pu + qv),$$

D'où le théorème suivant :

V. — *Si l'axe de rotation et la vitesse de translation se trouvent sur deux méridiens perpendiculaires l'un à l'autre, la résistance peut être ramenée à une force unique.*

Dans ce cas, en effet, on a $pu + qv = o$.

On a également :

$$u\frac{dU}{dv} - v\frac{dU}{du} + p\frac{dU}{dq} - q\frac{dU}{dp} = 0.$$

D'où cet autre théorème :

VI. — *Si la force résultante est dans le même méridien que la vitesse, l'axe du couple résultant est dans le méridien de l'axe de rotation.*

§ 6

Si on transporte l'axe de rotation, et si on le fait passer par un point dont les coordonnées sont a, b, c, nous avons vu que les composantes u, v, w de la vitesse de translation deviennent u', v', w', liées aux premières par les relations :

$$\begin{aligned} u &= u' - qc + rb \\ v &= v' - ra + pc \\ w &= w' - pb + qa. \end{aligned}$$

Le potentiel U ne change pas de valeur, mais change seulement de forme. En représentant par U' la nouvelle forme de U, nous avons :

$$\frac{dU'}{du'} = \frac{dU}{du}, \quad \frac{dU'}{dv'} = \frac{dU}{dv}, \quad \frac{dU'}{dw'} = \frac{dU}{dw}$$

$$\frac{dU'}{dp} = \frac{dU}{dp} + \frac{dU}{dv}c - \frac{dU}{dw}b,$$

$$\frac{dU'}{dq} = \frac{dU}{dq} + \frac{dU}{dw}a - \frac{dU}{du}c,$$

$$\frac{dU'}{dr} = \frac{dU}{dr} + \frac{dU}{du}b - \frac{dU}{dv}a.$$

Reprenons maintenant les équations relatives à une surface de révolution. En effectuant les substitutions précédentes, et en posant $a=b=o$ il vient :

$$\frac{dU'}{du'}=A(u'-qc)+Cq=Au'+(C-Ac)q$$

$$\frac{dU'}{dv'}=A(v'+pc)-Cp=Av'-(C-Ac)p$$

$$\frac{dU'}{dp}=(B-2Cc+Ac^2)p-(C-Ac)v'$$

$$\frac{dU'}{dq}=(B-2Cc+Ac^2)q+(C-Ac)u'.$$

D'où l'on voit qu'en transportant l'origine, mais en la conservant sur l'axe, les quantités A, B, C deviennent d'autres quantités A', B', C' liées aux premières par les relations

$$A'=A \quad , \quad C'=C-Ac \quad . \quad B'=B-2Cc+Ac^2,$$
$$A'B'-C'^2=AB-C^2,$$

et si $c=\frac{C}{A}$, on a

$$C'=0 \quad , \quad B'=\frac{AB-C^2}{A}.$$

Déterminons donc le nouveau centre de façon que l'on ait $C-Ac=o$, il vient :

$$\frac{dU'}{du'}=Au' \quad , \quad \frac{dU'}{dv'}=Av',$$
$$\frac{dU'}{dp}=B'p \quad , \quad \frac{dU'}{dq}=B'q.$$

Ces équations donnent ce théorème :

VII. — *Il existe sur l'axe un centre relativement auquel la force résultante se trouve sur le même méridien que la vitesse de translation, et le couple résistant sur le même méridien que l'axe de rotation.*

Comme il y a une origine pour laquelle on a $C'=o$, nous pouvons imaginer que le potentiel U avec les constantes A et B corresponde à cette origine ; alors les composantes transversales de la

force résistante et du couple résistant, rapportées à un autre point de l'axe de la surface, sont données par les relations :

$$\frac{dU'}{du'} = Au' - Acq \quad , \qquad \frac{dU'}{dv'} = Av' + Acp ,$$

$$\frac{dU'}{dp} = (B + Ac^2)p + Acv' \quad , \qquad \frac{dU'}{dq} = (B + Ac^2)q - Acu' .$$

§ 7

Lorsque la surface de révolution possède un mouvement de translation simple, ou combiné avec une rotation autour de l'axe, il suffit de poser dans les formules (7 — 12) $p = o$ $q = o$; si l'on suppose en outre que l'axe des x soit dans le méridien contenant la vitesse, on a $v = o$, $\Delta = u \sin\lambda$. Et comme l'équation (8) donne

$$\frac{dF}{d\Delta} = \frac{dF}{dw}\frac{dw}{d\Delta},$$

en se reportant à la première équation du § 2, on a

$$\frac{dF}{dw} = f(w \cos\lambda + u \sin\lambda \cos L) = f(V \cos\varepsilon),$$

V étant la vitesse de translation, et δ son inclinaison sur l'axe des z, et $\cos\varepsilon = \cos\delta \cos\lambda + \sin\delta \sin\lambda \cos L$.

Donc les équations (12) se réduisent aux suivantes :

$$\frac{dU}{dw} = \int dS f(V \cos\varepsilon) \cos\lambda,$$

$$\frac{dU}{du} = \int dS f(V \cos\varepsilon) \cos L \sin\lambda,$$

$$\frac{dU}{dq} = \int dS f(V \cos\varepsilon)(z \sin\lambda - \rho \cos\lambda) \cos L.$$

Les deux premières donnent les composantes de la résistance suivant l'axe de figure, et suivant une perpendiculaire à cet axe, la troisième représente le couple de résistance. La distance du centre de résistance à l'origine est :

$$\frac{dU}{dq} : \frac{dU}{du}$$

Exercice.

Dans une surface de révolution, limitée par deux plans perpendiculaires à l'axe, le centre de résistance est fixe si la surface est entièrement soumise à la résistance, et si la résistance élémentaire est proportionnelle à la vitesse ou au carré de la vitesse.

NOTE VI

SUR LES ANGLES DE PORTÉE MAXIMUM

Jusque dans ces derniers temps, on avait toujours admis que les angles de projection qui donnent les portées maxima dans l'air, étaient plus petits que 45°. Quelques expériences ayant jeté quelque doute sur l'exactitude de cette hypothèse, en 1877 (1), le colonel Astier (2) de l'artillerie française est parvenu à démontrer qu'il était possible d'avoir des angles de portée maximum supérieurs à 45°, quand la résistance est proportionnelle à la cinquième puissance de la vitesse. Depuis cette époque, nous n'avons pas connaissance d'autres recherches sur cette question. Dans cette note on démontrera qu'il est toujours possible d'obtenir des angles de portée maximum supérieurs à 45°, quand la résistance est représentée par un seul terme, et croît suivant une puissance de la vitesse supérieure à 3,4142(3), ou quand elle contient plusieurs termes proportionnels

(1) *Revue d'artillerie*, 1877.

(2) Nous ne ferons qu'indiquer ici les conclusions du colonel.

1° Quand la résistance du milieu croit porportionnellement à la vitesse, l'angle de portée maximum est l'angle λ pour lequel l'angle de projection et l'angle de chute sont complémentaires.

2° Suivant que la résistance croît plus vite ou moins vite, l'angle de portée maximum est supérieur ou inférieur à λ.

3° Si $f(v) = av^n$ est la retardation, l'angle de portée maximum est toujours inférieur à 45° quand n est égal à 3 ou < 3. Si n est supérieur à 3, l'angle de portée maximum peut être supérieur à 45° pour les petites valeurs de a.

4° Pour les projectiles oblongs la résistance croît plus vite que le carré de la vitesse; l'angle de portée maximum est donc toujours $> \lambda$. L'exposant n se rapproche en général de 3 : cependant pour des vitesses comprises entre 280^m et 360^m n atteint la valeur 6. On conçoit que dans certaines conditions de vitesse initiale et pour des valeurs très petites de a (c'est le cas de gros projectiles), l'angle de plus grande portée puisse être supérieur à 45°, même en supposant la densité de l'air constante dans toutes les couches traversées par le projectile. (*Note du traducteur.*)

(3) $2 + \sqrt{2} = 3,4142....$

à des puissances supérieures à cette limite. Nous démontrerons également que si les termes de la résistance polynôme ont des exposants dont les uns sont plus petits, les autres plus grands que 3,4142, les angles de portée maximum peuvent être supérieurs, égaux, ou inférieurs à 45°, suivant la valeur de la vitesse de projection.

Nous donnons enfin une formule ([1]) au moyen de laquelle, quelle que soit la forme de la résistance, on peut reconnaître si, lorsqu'elle est très petite, la portée maximum exige un angle plus grand ou plus petit que 45°.

Les équations du mouvement dans un milieu résistant peuvent se réduire aux deux suivantes, qui se déduisent, la première de l'expression de la force vive horizontale, la seconde de celle de la force centrifuge :

$$(1)\quad d(v\cos\theta) = -c\Psi(v)\,dx \quad , \qquad (2)\quad g\,dx = -v^2 d\theta$$

x est l'abscisse horizontale, v la vitesse, θ son inclinaison, $cv\Psi(v)$ la retardation, ou le rapport de la résistance à la masse du point. En éliminant dx entre les deux équations et en intégrant l'équation résultante, la deuxième donnerait θ ou v en fonction de x.

L'intégration ne peut s'effectuer, comme nous l'avons dit, que dans deux cas, indiqués par d'Alembert ; c'est-à-dire quand on a :

$$v\Psi(v) = a + bv^n \qquad \text{ou} \qquad v\Psi(v) = a + b\log v.$$

Pour traiter le cas général, de l'équation (2) nous tirons :

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi - g\int_0^x \frac{dx}{(v\cos\theta)^2}$$

φ étant l'inclinaison initiale. En appelant y l'ordonnée, il vient :

$$(4)\qquad y = x\operatorname{tg}\varphi - g\int_0^x dx\int_0^x \frac{dx}{(v\cos\theta)^2}.$$

Mais d'après l'équation (1), on a :

$$\frac{1}{(v\cos\theta)^2} = \frac{1}{(V\cos\varphi)^2}\left[1 + \frac{2c}{V\cos\varphi}\int_0^x \left(\frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta}\right)^3 \Psi(v)\,dx\right],$$

([1]) C'est la formule (12).

V étant la vitese initiale. Posons :

$$\int_0^x \left(\frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta}\right)^3 \Psi(v)\,dx = F(x),$$

et substituons dans l'équation (4), il vient :

$$(7)\qquad y = x\,\text{tg}\varphi - \frac{g}{V^2\cos^2\varphi}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2c}{V\cos\varphi}\int_0^x dx \int_0^x F(x)\,dx\right].$$

La portée X est la valeur de x, autre que o, qui correspond à $y = o$. On a donc entre X et φ la relation

$$(8)\qquad \frac{V^2\sin 2\varphi}{gX} = 1 + \frac{4c}{VX^2\cos\varphi}\int_0^X dx \int_0^x F(x)\,dx$$

L'angle de portée maximum est donné en dérivant l'équation précédente par rapport à φ et à X, et en posant $dX = o$, on a ainsi :

$$(9)\qquad \frac{2V^2\cos 2\varphi}{gX} = \frac{4c}{VX^2}\int_0^X dx \int_0^x dx\left[F(x)\frac{\text{tg}\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dF(x)}{d\varphi}\right]$$

Nous nous bornerons ici à rechercher si l'angle de portée maximum est $> 45°$ ou $< 45°$, quand la résistance est très petite.

Quand $c = o$, on a $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Posons $\varphi = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$, ε et c tendant ensemble vers o, on a :

$$(10)\qquad \lim\frac{\varepsilon}{c} = -\lim\frac{g}{V^2 X\cos\varphi}\int_0^X dx \int_0^x dx\left[F(x)\,\text{tg}\varphi + \frac{dF(x)}{d\varphi}\right].$$

On voit donc que pour une résistance très petite, l'angle de portée maximum sera $>$ ou $< 45°$ suivant que le second membre de l'égalité précédente sera positif ou négatif.

Quand $c = o$, on a quel que soit φ :

$$(11)\quad \begin{cases} X = \dfrac{V^2\sin 2\varphi}{g}, \quad v\cos\theta = V\cos\varphi, \quad \text{tg}\theta = \text{tg}\varphi - \dfrac{gx}{V^2\cos^2\varphi} \\ v^2 = V^2\left(1 - \dfrac{2gx}{V^2}\text{tg}\varphi + \dfrac{g^2x^2}{V^4\cos^2\varphi}\right), \\ F(x) = \int_0^x \Psi(v)\,dx \\ \dfrac{dF}{d\varphi} = \int_0^x \dfrac{\Psi'(v)}{v}\dfrac{v\,dv}{d\varphi}dx = -V^2\int_0^x \dfrac{\Psi'(v)}{v}\left(\dfrac{gx}{V^2\cos^2\varphi} - \dfrac{g^2x^2}{V^4\cos^2\varphi}\text{tg}\varphi\right)dx. \end{cases}$$

Faisons maintenant $\varphi = \frac{\pi}{4}$, dans le binôme placé sous le dernier signe $\int$ de l'équation (10) et $V \cos\varphi = V_1$; il en résulte :

$$\lim \left[F(x) + \frac{dF(x)}{d\varphi} \right] = \int_0^{x} \Psi(v)\,dx - 2V_1^2 \int_0^{x} \frac{\Psi'(v)}{v} \left(\frac{gx^2}{V_1^2} - \frac{g^2x^2}{2V^4} \right) dx$$

Il convient maintenant d'exprimer ces fonctions au moyen de θ.

Les équations (11) donnent :

$$v = \frac{V_1}{\cos\theta}\ ,\quad \frac{gx}{V_1^2} = 1 - \operatorname{tg}\theta\ ,\quad \frac{gx}{V_1^2} - \frac{g^2x^2}{2V_1^4} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{2} = \frac{\cos 2\theta}{2\cos^2\theta}.$$

par suite :

$$(12)\quad \lim \frac{\varepsilon}{c} = \frac{4V_1}{g} \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \left[\Psi\left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right) - \Psi'\left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right) \frac{V_1}{\cos\theta} \cos 2\theta \right].$$

Il ne reste plus qu'à effectuer l'intégration, qui dépend de la forme de Ψ et ne présente pas de difficultés; on l'obtiendra, en général, au moyen de quadratures, mais si Ψ est une fonction algébrique et entière de v, l'intégration est bien facile.

Soit $c\nu\,\Psi(v) = cv^n$, on a :

$$\Psi\left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right) = \left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right)^{n-1}\ ,\quad \Psi'\left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right) = (n-1)\left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right)^{n-2},$$

$$\Psi\left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right) - \Psi'\left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right)\frac{V_1}{\cos\theta}\cos 2\theta = \left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right)^{n-1} [1 - (n-1)\cos 2\theta]$$

$$= \left(\frac{V_1}{\cos\theta}\right)^{n-1} [n - (2n-2)\cos^2\theta]$$

$$\lim \frac{\varepsilon}{a} = \frac{4V_1^n}{g} \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \left(\frac{n\,d\theta}{\cos^{n+1}\theta} - \frac{(2n-2)}{\cos^{n-1}\theta}\,d\theta \right).$$

Posons maintenant :

$$(13)\qquad \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^{r+1}\theta} = \xi_r(\theta)$$

On en déduit facilement :

$$(14)\qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^{n-1}\theta} = -\xi_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\xi_n$$

par conséquent :

(15) $$\lim \frac{\varepsilon}{c} = \frac{4V_1^n}{g}[(2n-2)\xi_n - n\xi_{n+2}].$$

mais on a :

(16) $$\xi_{n+2}(\theta) = \frac{1}{n+2}\left[\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\cos^{n+1}\theta} + (n+1)\xi_n(\theta)\right];$$

par suite, en substituant et réduisant, on a finalement :

(17) $$\lim \frac{\varepsilon}{c} = \frac{4V_1^n}{g}\frac{(n^2+n-4)\xi_n - n\sqrt{2^{n+1}}}{n+2}$$ [1]

Si l'on fait successivement $n = 1, 2, 3, 4, 5$, on trouve en posant :

(18) $$B_n = (n^2+n-4)\xi_n - n\sqrt{2^{n+1}}$$

$B_n = -4$, $-3,3612$, $-1,3333$, $2,4592$, $8,5333$.

On voit donc, d'après ces chiffres, que les résistances proportionnelles à la 4ᵉ et à la 5ᵉ puissance de la vitesse admettent des angles de portée maximum supérieurs à 45°.

Pour $n = 3,4142$, on trouve :

$$B_n < 0,0001 \quad \text{et} \quad B_n > -0,0003.$$

Or $2 + \sqrt{2} = 3,4142...$, par suite, la valeur de n qui annule B_n si elle n'est exactement $2 + \sqrt{2}$ est très voisine de cette valeur. Nous la représenterons par ν.

Nous allons maintenant démontrer que si B_n est positif pour un nombre entier n, il l'est également pour tous les nombres supérieurs à n. Il suffit pour cela de prouver que le binôme $B_{n+2} - B_n$ est positif pour tous les nombres supérieurs à celui-là, car s'il en est ainsi, comme B_4 et B_5 sont positifs, B_6 et B_7 et tous les B d'indice supérieur seront également positifs.

D'après l'équation (18), en se reportant à l'équation (16), on a :

$$B_{n+2} - B_n = \frac{\xi_n(3n^2+9n+10) - (n+6)\sqrt{2^{n+1}}}{n+2}.$$

---

[1] Comme on a $\xi_n = \int_0^1 (1+x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx$, quand n est impair, ξ_n est un nombre rationnel; quand n est pair, la valeur de ξ_n se déduit de celle de $\xi_2 = 1,1478$ au moyen de la formule (16).

Mais si B_n est positif (et il l'est pour $n=4$ et $n=5$), on a :

$$\xi_n > \frac{n\sqrt{2^{n+1}}}{n^2+n-4};$$

par suite en substituant dans l'égalité précédente, il vient :

$$B_{n+2} - B_n > \frac{n\sqrt{2^{n+1}}(3n^2+9n+10) - (n^2+n-4)(n+6)\sqrt{2^{n+1}}}{(n+2)(n^2+n-4)}$$

et finalement :

$$(19) \quad B_{n+2} - B_n > \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{(n+2)(n^2+n-4)}(2n^3+2n^2+8n+24) > 0.$$

Il est donc démontré que B_n est positif pour tous les nombres entiers > 3. Pour étendre le théorème à toutes les valeurs non entières supérieures à ν, remarquons que l'inégalité précédente se vérifie quel que soit n, qu'il soit entier ou non. Pour démontrer donc que B_n est positif pour toutes les valeurs de n supérieures à ν, il suffit de prouver qu'il est positif pour tous les nombres compris entre ν et $\nu+2$.

Dérivant B_n par rapport à n, on a :

$$B'_n = (2n+1)\xi_n + (n^2+n-4)\xi'_n - (1+n\log 2)\sqrt{2^{n+1}}.$$

Mais

$$\frac{d}{dn}\int\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = -\int\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}\log\cos\theta = -\xi(\theta)\log\cos\theta - \int\xi(\theta)\,\text{tg}\,\theta\, d\theta$$

et en passant aux limites, et représentant par α un nombre compris entre 1 et $\frac{1}{2}$; il vient :

$$\begin{aligned}\xi'_n &= \xi_n\log\sqrt{2} - \alpha\int_0^{\frac{\pi}{4}}\xi(\theta)\,\text{tg}\,\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\ &= \xi_n\log\sqrt{2} - \frac{\alpha}{2n+4}\left[(n+3)\xi_n - \sqrt{2^{n+1}}\right].\end{aligned}$$

Substituons dans l'expression de B'_n et posons $\alpha=1$, il vient :

$$\begin{aligned}B'_n > &\left[(2n+1) + (n^2+n-4)\left(\log\sqrt{2} - \frac{n+3}{2n+4}\right)\right]\xi_n\\ &- \left(1 + n\log\sqrt{2} - \frac{n^2+n-4}{2n+4}\right)\sqrt{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Multiplions l'équation (18) par

$$\frac{1}{n}\left(1+n\log\sqrt{2}-\frac{n^2+n-4}{2n+4}\right),$$

et retranchons de l'inégalité précédente, on obtient :

$$(20)\qquad B'_n-\frac{B_n}{n}\left(1+n\log\sqrt{2}-\frac{n^2+n-4}{2n+4}\right)>\frac{8-n}{n}\xi_n$$

Au moyen de cette relation, il est facile de démontrer que B_n entre $n=\nu$ et $n=\nu+2$ est positif. En effet, entre ces limites, le second membre est certainement positif. Quant à B_n, il est nul pour $n=\nu$, et par suite pour cette valeur de n, B'_n est positif, donc B_n est encore positif pour toutes les valeurs de n légèrement supérieures à ν. Quand n augmente, si B_n diminuait, il ne pourrait atteindre 0, puisque quand il approche de 0, B'_n est supérieur à $\frac{8-n}{n}\xi_n$, c'est-à-dire positif, et par suite B_n de ce point commencerait encore à augmenter. Donc B_n est positif entre $n=\nu$ et $n=\nu+2$.

Nous pouvons donc conclure que les résistances proportionnelles à des puissances entières ou fractionnaires de la vitesse, supérieures à 3,4142, admettent des angles de portée maximum supérieurs à 45°.

Soit

$$(21)\qquad cv\Psi(v)=c(Pv^p+Qv^q+Rv^r+\ldots)$$

on en tire :

$$(22)\qquad \lim\frac{\varepsilon}{c}=\frac{4}{g}\left(\frac{PB_p}{p+2}V_1^p+\frac{QB_q}{q+2}V_1^q+\frac{RB_r}{r+2}V_1^r+\ldots\right)$$

Dans cette expression, les termes, suivant qu'ils ont des exposants supérieurs ou inférieurs à la limite ν, seront de même signe ou de signe contraire que les termes correspondants dans l'expression de la résistance $cv\psi(v)$. Les termes extrêmes de (21) sont certainement positifs, puisque quelle que soit la valeur de la vitesse, très petite ou très grande, la résistance est positive. Si donc le dernier terme de la résistance a un exposant supérieur à ν, on peut être assuré qu'il y aura des valeurs de V qui donnent des angles de portée maximum supérieurs à 45°; si la résistance comprend,

en outre, dès termes ayant des exposants inférieurs à ν, cette résistance admettra, suivant les valeurs de V, des angles de portée maximum supérieurs, égaux et inférieurs à 45°.

Soit enfin $cv\Psi(v)$ une fonction quelconque, mais développable en série convergente, suivant les puissances de v, ayant tous ses termes positifs, et telle que la série (22) soit aussi convergente, la résistance ainsi définie admettra des angles de portée maximum égaux ou inférieurs à 45°, suivant les valeurs de la vitesse initiale.

NOTE VII

FORCE DÉVIATRICE

Le mouvement d'un projectile oblong se compose d'une rotation et d'une translation, et la considération de l'une ne peut rigoureusement pas être séparée de celle de l'autre. Plusieurs auteurs ont tenté le problème, mais aucun ne l'a considéré dans toute sa généralité. Saint-Robert (¹), Mayevski (²), Magnus de Sparre (³), ont, il est vrai, tenu compte de l'angle que l'axe de figure fait avec la tangente à la trajectoire, mais dans l'expression de la résistance, ils ont supposé l'axe de figure comme coïncidant avec l'axe instantané de rotation. Les expressions de la résistance données dans la note V peuvent fournir un moyen de reconnaître si les forces résultant de la non-coïncidence des deux derniers axes en question sont négligeables vis-à-vis de celles qui proviennent de l'angle formé par l'axe de figure et la tangente à la trajectoire.

De Sparre a traité en particulier le problème dans le cas du tir tendu, c'est-à-dire dans le cas où ce dernier angle est très petit, et Mayevski (⁴), en suivant la même méthode, a obtenu pour la dérivation :

$$(1) \qquad Z = H\Omega C x \left[\frac{B(u) - B(U)}{D(u) - D(U)} - M(U)\right]$$

(¹) *Mémoires scientifiques*. Turin, 1872, vol. I.
(²) *Traité de balistique*. Saint-Pétersbourg, 1872.
(³) *Du Mouvement des projectiles oblongs dans le tir de plein fouet*. Paris, 1875.
(⁴) *De la Solution des problèmes du tir tendu*. Pétersbourg, 1882 (en russe).

expression dans laquelle H est une constante dépendant des paramètres du projectile, Ω la vitesse angulaire initiale et

$$M(u) = -\int \frac{du}{u^2 F(u)} \qquad B(u) = -\int M(u) \frac{u\,du}{F(u)} \text{ (1)}$$

tandis que les expressions représentant la projection de la trajectoire sur le plan de tir, Mayevski les met sous la forme suivante (2) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{C}{\alpha}[D(u) - D(U)] \\ \frac{y}{x} &= \mathrm{tg}\varphi - \frac{C\alpha}{2}\left[\frac{A(u) - A(U)}{D(u) - D(U)} - J(U)\right] \\ \mathrm{tg}\theta &= \mathrm{tg}\varphi - \frac{C\alpha}{2}[J(u) - J(U)] \\ t &= C[T(u) - T(U)] \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules $u = \alpha v \cos\theta$, $U = \alpha V \cos\varphi$, α est une valeur moyenné de $\sec\theta$, et les fonctions D, A, J, T, sont celles qui ont été définies pages 48 et 49. En partant des égalités précédentes, nous allons déterminer la force *dérivatrice*, c'est-à-dire la force perpendiculaire au plan de tir, qui doit être ajoutée à la résistance ordinaire opposée à la vitesse pour que la dérivation soit exprimée par la formule (1), ce qui nous conduira à un résultat nouveau et singulier.

En appelant Z la force dérivatrice rapportée à l'unité de masse, les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f(v)\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -f(v)\frac{dy}{ds} - g,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -f(v)\frac{dz}{ds} + Z.$$

Éliminons $f(v)$ entre la première et la troisième, il vient :

$$Z = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dz}{dx}.$$

(1) Krupp a publié une table des valeurs de M(u) et B(u) : *Ballistische Formeln von Mayevski nach Siacci*. Essen, 1883.

(2) Ce sont les équations que nous avions données d'abord en 1880. (*Nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro.*)

Des formules (2) on tire d'autre part :

$$dx = \frac{C}{\alpha} dD(u) = -\frac{C}{\alpha} \frac{u\,du}{F(u)},$$

$$dt = C\,dT(u) = -C \frac{du}{F(u)},$$

et de la formule (1)

$$z = \frac{HC^2}{\alpha} \{B(u) - B(U) - M(U)[D(u) - D(U)]\},$$

$$dz = \frac{HC^2}{\alpha} \{dB(u) - M(U)\,dD(u)\},$$

$$= -\frac{HC^2}{\alpha} \{M(u) - M(U)\} \frac{u\,du}{F(u)}.$$

Divisant *dz* par *dx* et par *dt*, il vient :

$$\frac{dz}{dx} = HC[M(u) - M(U)],$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{HC}{\alpha}[M(u) - M(U)]\,u.$$

Différentions encore cette dernière équation, et divisant par *dt*, on a :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{HC}{\alpha}[M(u) - M(U)] \frac{du}{dt} + \frac{HC}{\alpha} u \frac{dM(u)}{dt}.$$

Reportons-nous aux valeurs de $\frac{dz}{dx}$ de $M(u)$ et de dt, et remarquons que nous avons en outre,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\alpha d(v \cos\theta)}{dt} = \frac{\alpha d^2x}{dt^2},$$

il en résulte

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dz}{dx} + \frac{H}{\alpha u}.$$

Par suite,

$$Z = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dz}{dx} = \frac{H\Omega}{\alpha u}.$$

Il résulte donc de (1) que :

La force dérivatrice est directement proportionnelle à la vitesse angulaire, et inversement proportionnelle à la vitesse de translation.

NOTE VIII

SUR LA SOLUTION EXACTE DU PROBLÈME BALISTIQUE POUR TOUTE FORME DE RÉSISTANCE (¹)

§ 1.

La *Table balistique* avec les formules qui s'y rapportent (section I, chapitre IV) n'est pas *toute* la solution du problème balistique. Elle en est toutefois une grande partie, qui est déjà suffisante dans la plupart des cas pratiques. Pour la compléter, il faudrait déterminer les fonctions β qui entrent dans ces formules. Ce n'est pas une question facile, mais c'est une question d'analyse; or l'analyse, qui a résolu des problèmes bien plus difficiles et complexes, a bien de puissance pour résoudre encore celui-ci, si l'on ne donne pas trop d'importance à l'économie des calculs. L'économie des calculs ne doit pas trop compter dans cette question, si l'on parvient à en présenter les résultats aux praticiens dans une table, où ils puissent puiser les nombres nécessaires à la solution des problèmes du tir.

Nous présentons un essai de ces calculs dans cette note. Nous ne nous flattons pas de donner la solution définitive d'un problème qui, même dans les cas plus particuliers, a résisté à beaucoup d'efforts, mais il nous semble d'avoir ouvert une voie à la solution générale et d'avoir même fait quelques pas dans cette voie.

Il va sans dire que cette voie se trouve dans la région des séries, car les formules balistiques impliquent inévitablement des fonctions transcendantes, qui ne sont au fond que des expressions abrégées de séries. Nous allons donc montrer comme on peut

(¹) D'après le texte français de l'auteur.

calculer ces fonctions β au moyen de séries ordonnées suivant les puissances descendantes du coefficient balistique. Nous commencerons par le β *principal,* celui qui donne la solution exacte du problème : « *Deux des trois quantités étant données, la vitesse initiale, l'angle de projection et la portée, déterminer l'autre.* »

§ 2.

Les formules du tir qui se rapportent à ce problème sont :

$$(1) \qquad \frac{\delta i \beta_1}{C} X = D(u) - D(V) \quad , \quad \frac{\delta i \beta_2}{C} \sin 2\varphi = \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)$$

dans lesquelles nous avons posé β_1 et β_2, au lieu d'une seule quantité β, parce qu'elles représentent deux quantités différentes. Pour β nous entendrons maintenant la quantité variable :

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta} \frac{F(v)}{F(u)} \frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi} \quad , \quad \left(u = \frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right).$$

à laquelle β_1 et β_2 sont liées au moyen des relations,

$$\beta_1 = \frac{\int_0^X \beta\, dx}{X} \quad , \quad \beta_2 = \frac{\int_0^X \beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta\, d\, \mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,\varphi \int_0^X \beta\, dx} \text{ (1)}.$$

Ces deux quantités représentent deux valeurs moyennes de la variable β dans les limites o et X de l'abscisse, valeurs différant l'une de l'autre, si peu différentes qu'elles soient, et qui ne peuvent donc pas être remplacées par une quantité unique, sans que l'une ou l'autre des équations (1), ou toutes les deux à la fois ne donnent des inexactitudes. En éliminant u entre les deux équations (1), l'équation résultante contient donc X, φ, V, β_1 et β_2, et les deux dernières quantités sont, nous venons de le dire, des fonctions différentes de X, φ et V ; or on peut concevoir une fonction $\overline{\beta}$ qui, mise dans les équations (1) à la place de β_1 et de β_2, ne change

(1) On obtient facilement ces deux relations en partant des équations (3) (4) de la page 48 (Chapitre IV, Section I), qui donnent $\int_\varphi^\theta \beta\, d\, \mathrm{tg}\,\theta$, $\int_0^x \beta\, dx$ et $\int_0^X \beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta\, d\, \mathrm{tg}\,\theta$, et en éliminant ensuite les quantités D (u), A (u), J (u) au moyen des équations (1) ci-dessus.

pas l'équation résultant de l'élimination de u entre ces mêmes équations, et qui donnera par conséquent la solution exacte du problème : « *Deux des quantités X, V, φ, étant données, trouver l'autre.* »

Pour arriver à la valeur de $\overline{\beta}$, la voie la plus naturelle est la suivante : Établir deux relations entre X, φ, V, en laissant dans l'une β variant suivant la loi

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta} \frac{F(v)}{F(u)} \frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi},$$

et en considérant dans l'autre β comme constant et égal à $\overline{\beta}$, comparer ensuite les deux équations obtenues. En éliminant l'une des trois quantités (V, par exemple) on trouvera une équation donnant $\overline{\beta}$ en fonction de φ et de X. Telle est la méthode que nous allons suivre.

Une relation exacte entre X, φ, V, applicable à n'importe quelle forme de la résistance, ne peut être établie que par des séries. Les séries essayées jusqu'ici pour résoudre le problème balistique sont divergentes dans presque tous les cas ; mais on n'a pas encore éprouvé des séries ordonnées suivant les puissances décroissantes du coefficient balistique. Le développement de ces séries exige quelque travail, mais nous avons tout lieu de penser que la série exprimant $\overline{\beta}$ est convergente.

La première équation à intégrer est (chapitre II, page 26) :

$$gd(v\cos\theta) = vf(v)\,d\theta = \frac{\delta_y i}{C} vF(v)\,d\theta,$$

dans laquelle nous supposons δ_y fonction de la hauteur y. L'expression généralement adoptée pour δ_y est $\delta(1 - 0{,}00008y)$, δ étant la densité à la bouche de la pièce; mais pour plus de généralité, nous poserons $\delta_y = \psi(y)$, ψ étant une fonction quelconque ainsi que F. Posons pour abréger,

$$\frac{i}{Cg} = c$$

nous avons alors l'équation,

$$d(v\cos\theta) = cv\psi(y)F(v)\,d\theta$$

ou

$$d\,(v\cos\theta)^2 = 2cv^2\,F(v)\,\psi(y)\,d\sin\theta.$$

Posons

$$v^2 = z \quad , \quad 2v^2\,F(v) = f(z),$$

l'équation précédente devient :

$$d\,(z\cos^2\theta) = cf(z)\,\psi(y)\,d\sin\theta = cf\psi\,d\sin\theta.$$

En développant suivant la formule de Maclaurin, il vient :

$$d\,.\cos^2\theta\left[z_0 + c\left(\frac{dz}{dc}\right)_0 + \frac{c^2}{1\,.\,2}\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)_0 + \frac{c^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{d^3z}{dc^3}\right)_0 + \ldots..\right]$$

$$= c\left[f_0\psi_0 + c\left(\frac{df\psi}{dc}\right)_0 + \frac{c^2}{1.2}\left(\frac{d^2f\psi}{dc^2}\right)_0 + \frac{c^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3f\psi}{dc^3}\right)_0 + \ldots\right]d\sin\theta$$

En identifiant les termes qui multiplient les mêmes puissances de c, on a :

(a) $d.\cos^2\theta\,z_0 \qquad = 0,$

(b) $d.\cos^2\theta\left(\frac{dz}{dc}\right)_0 = f(z_0)\,\psi(y_0)\,d\sin\theta,$

(c) $d.\cos^2\theta\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)_0 = 2\left(f\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dc} + \psi\frac{df}{dz}\frac{dz}{dc}\right)_0 d\sin\theta,$

(d) $d.\cos^2\theta\left(\frac{d^3z}{dc^3}\right)_0 = 3\left(f\frac{d^2\psi}{dy^2}\frac{dy^2}{dc^2} + f\frac{d\psi}{dy}\frac{d^2y}{dc^2} + 2\frac{df}{dz}\frac{d\psi}{dy}\frac{dz}{dc}\frac{dy}{dc} + \psi\frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz^2}{dc^2}\right.$

$$\left. + \psi\frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dc^2}\right)_0 d\sin\theta$$

. . . .

Avec ce système d'équations il faut considérer une autre série qui naît de l'équation (5) de la page 26 :

$$gdy = -v^2\,\mathrm{tg}\theta\,d\theta = -zd\theta\,\mathrm{tg}\theta.$$

En développant en série, on a :

$$gd\left[y_0 + c\left(\frac{dy}{dc}\right)_0 + \frac{c^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)_0 + \frac{c^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dc^3}\right)_0 + \ldots\right]$$

$$= -\left[z_0 + c\left(\frac{dz}{dc}\right)_0 + \frac{c^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)_0 + \frac{c^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3z}{dc^3}\right)_0 + \ldots\right]d\theta\,\mathrm{tg}\theta.$$

En identifiant les termes qui multiplient les mêmes puissances de c on a :

$$(a') \qquad g\,dy_0 = - z_0\, d\theta\, \mathrm{tg}\,\theta,$$

$$(b') \qquad g\,d\left(\frac{dy}{dc}\right)_0 = - \left(\frac{dz}{dc}\right)_0 d\theta\, \mathrm{tg}\,\theta,$$

$$(c') \qquad g\,d\left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)_0 = - \left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)_0 d\theta\, \mathrm{tg}\,\theta,$$

$$(d') \qquad g\,d\left(\frac{d^3y}{dc^3}\right)_0 = - \left(\frac{d^3z}{dc^3}\right)_0 d\theta\, \mathrm{tg}\,\theta.$$

Toutes les équations précédentes sont intégrables, car le second membre de l'une quelconque d'entre elles est une fonction de θ, que l'on peut déterminer en se servant des équations qui la précèdent. On obtient ainsi au moyen des équations (a) et (a'),

$$z_0 \cos^2\theta = V^2 \cos^2\varphi \quad , \quad g y_0 = - \frac{V^2 \cos^2\varphi}{2} (\mathrm{tg}^2\theta - \mathrm{tg}^2\varphi).$$

Les équations (b) et (b') donnent également :

$$\left(\frac{dz}{dc}\right)_0 \cos^2\theta = \int_\varphi^\theta f(z_0)\, \psi(y_0)\, d \sin\theta,$$

$$g\left(\frac{dy}{dc}\right)_0 = - \int_\varphi^\theta \mathrm{tg}\,\theta\, d\, \mathrm{tg}\,\theta \int_\varphi^\theta f(z_0)\, \psi(y_0)\, d \sin\theta.$$

On obtiendrait des égalités analogues au moyen des équations (c) (c'), (d) (d'), etc.....

Admettons que nous ayons trouvé les valeurs de z_0, $\left(\frac{dz}{dc}\right)_0$, $\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)_0$..... et posons pour abréger :

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nz}{dc^n}\right)_0 = \frac{A_n V^2 \cos^2\varphi}{\cos^2\theta};$$

nous aurons :

$$(2) \qquad (v \cos\theta)^2 = V^2 \cos^2\varphi\, (1 + A_1 c + A_2 c^2 + A_3 c^3 + \ldots).$$

D'autre part, nous avons (page 26) :

$$g\,dx = - v^2 d\theta \quad , \quad g\,dy = - v^2 d\theta\, \mathrm{tg}\,\theta \quad , \quad g\,dt = - v \cos\theta\, d\, \mathrm{tg}\,\theta.$$

Par conséquent, en intégrant, il vient :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{gx}{V^2\cos^2\varphi} = -\displaystyle\int_\varphi^\theta (1 + A_1 c + A_2 c^2 + A_3 c^3 + \dots)\, d\,\mathrm{tg}\theta, \\ \dfrac{gy}{V^2\cos^2\varphi} = -\displaystyle\int_\varphi^\theta (1 + A_1 c + A_2 c_2 + A_3 c_3 + \dots)\, \mathrm{tg}\theta\, d\,\mathrm{tg}\theta, \\ \dfrac{gt}{V\cos\varphi} = -\displaystyle\int_\varphi^\theta \left[1 + \frac{1}{2} A c + \left(A_2 - \frac{A_1^2}{4}\right)\frac{c^2}{2} + \dots\right] d\,\mathrm{tg}\theta. \end{cases}$$

Les séries précédentes donnent l'abscisse, l'ordonnée et le temps en fonction de l'angle θ.

§ 3.

Le but que nous poursuivons étant la recherche de $\bar\beta$, il est nécessaire d'établir une relation entre X, φ, et V. A cet effet, posons :

$$1 + A_1 c + A_2 c^2 + A_3 c^3 + \dots = Q,$$
$$\mathrm{tg}\theta = p \quad , \quad \mathrm{tg}\varphi = p_0 \quad , \quad \mathrm{tg}\omega = p_0 + \varepsilon,$$

ω étant l'angle de chute. Représentons en outre par $\bar A_r$ et $\bar Q$ ce que deviennent A_r et Q quand on change p en $-p$, et par $\bar Q_0$, $\left(\dfrac{d\bar Q}{dp}\right)_0$, ce que deviennent $\bar Q$, $\dfrac{d\bar Q}{dp}$ quand on change p en p_0, nous aurons alors :

$$\frac{gX}{V^2\cos^2\varphi} = -\int_{p_0}^{-p_0-\varepsilon} Q\,dp = \int_0^{p_0} Q\,dp + \int_0^{p_0+\varepsilon} \bar Q\,dp,$$
$$0 = -\int_{p_0}^{-p_0-\varepsilon} Qp\,dp = \int_0^{p_0} Qp\,dp - \int_0^{p_0+\varepsilon} \bar Q p\,dp.$$

En développant les intégrales suivant les puissances ascendantes de ε, la formule de Taylor donne :

$$(4)\quad \frac{gX}{(V\cos\varphi)^2} = \int_0^{p_0} (Q + \bar Q_1)\,dp + \varepsilon \bar Q_0 + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\left(\frac{d\bar Q}{dp}\right)_0 + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\left(\frac{d^2\bar Q}{dp^2}\right)_0 + \dots$$

$$(5)\quad 0 = \int_0^{p_0} (Q - \bar Q)\,p\,dp - \varepsilon p_0 \bar Q_0 - \frac{\varepsilon^2}{1.2}\left(\frac{dp\bar Q}{dp}\right)_0 - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\left(\frac{d^2.p\bar Q}{d^2p}\right)_0 + \dots$$

Multipliant la dernière par $\frac{1}{p_0}$ et ajoutant la précédente, il vient :

$$(6)\quad \frac{gX}{(V\cos\varphi)^2} = \int_0^{p_0}(Q+\overline{Q})\,dp + \frac{1}{p_0}\int_0^{p_0}(Q-\overline{Q})\,p\,dp - \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{\overline{Q}_0}{p_0} - \frac{2\varepsilon^3}{1.2.3}\left(\frac{dQ}{dp}\right)_0\frac{1}{p_0} + \dots,$$

équation qui ne contient plus ε au premier degré. En suivant une marche analogue, on pourra éliminer les puissances successives de ε, c'est-à-dire ε^2, ε^3, ε^4, etc.

Supposons qu'on veuille s'arrêter aux termes du second ordre. Comme ε et c sont du même ordre, il en résulte qu'il faut supprimer également les termes qui renferment ε^3, et qu'on doit écrire :

$$\varepsilon^2\left(\frac{d.p\overline{Q}}{dp}\right)_0 = \varepsilon^2 \quad , \quad \varepsilon^2\overline{Q}_0 = \varepsilon^2,$$

car les seconds membres de ces égalités ne diffèrent des premiers que par une quantité de troisième ordre (¹).

L'équation (5) donne en outre :

$$\varepsilon = \frac{1}{p_0\overline{Q}_0}\left[\int_0^{p_0}(Q-\overline{Q})\,p\,dp + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\right],$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{p_0^2}\left[\int_0^{p_0}(Q-\overline{Q})\,p\,dp\right]^2.$$

Par conséquent :

$$(7)\quad \frac{gX}{V^2\cos^2\varphi} = \int_0^{p_0}(Q+\overline{Q})\,dp + \frac{1}{p_0}\int_0^{p_0}(Q-\overline{Q})\,p\,dp - \frac{1}{2p_0^3}\left[\int_0^{p_0}(Q-\overline{Q})\,p\,dp\right]^2,$$

ou bien :

$$(8)\quad \frac{gX}{V^2\cos^2\varphi} = 2p_0 + c\left[\int_0^{p_0}(A_1+\overline{A}_1)\,dp + \frac{1}{p_0}\int_0^{p_0}(A_1-\overline{A}_1)\,p\,dp\right] + c^2\left[\int_0^{p_0}(A_2+\overline{A}_2)\,dp + \frac{1}{p_0}\int_0^{p_0}(A_2-\overline{A}_2)\,p\,dp - \frac{1}{2p_0^3}\left(\int_0^{p_0}(A_1-\overline{A}_1)\,p\,dp\right)^2\right].$$

(¹) Rigoureusement ces suppressions ne sont pas admissibles, et il n'est même permis de faire usage de séries que dans la supposition qu'elles soient convergentes. On peut cependant rendre le procédé mathématiquement rigoureux en imaginant que les polynômes soient toujours complétés par des restes représentant les termes que l'on supprime.

Pour abréger, nous écrirons l'équation précédente sous la forme

(9) $$\frac{gX}{V^2 \sin 2\varphi} = 1 + cB_1 + c^2B_2.$$

§ 4.

Il est nécessaire d'obtenir maintenant une expression analogue en fonction de $\bar{\beta}$; à cet effet reprenons l'équation $d(v\cos\theta) = cv\psi(y)F(v)\,d\theta$ dans laquelle nous remplacerons $\psi(y)\,F(v)$ par

$$\bar{\beta}F\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta},$$

Elle devient :

$$d(v\cos\theta)^2 = 2\bar{\beta}cv^2F\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}\,d\sin\theta.$$

Posons de plus :

$$\bar{\beta}c\cos^2\varphi = k \quad , \quad \frac{v\cos\theta}{\cos\varphi} = u \quad , \quad u^2 = \zeta \quad , \quad 2u^2F(u) = f(\zeta) = f,$$

on aura :

$$d\zeta = kf(\zeta)\,dp,$$

équation qui développée suivant les puissances de k donne :

$$d\left[\zeta_0 + k\left(\frac{d\zeta}{dk}\right)_0 + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2\zeta}{dk^2}\right)_0 + \frac{k^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\zeta}{dk^3}\right)_0 + \ldots\ldots\right]$$
$$= kdp\left\{f_0 + kf'(\zeta)_0\left(\frac{d\zeta}{dk}\right)_0 + \frac{k^2}{1.2}\left[f'(\zeta)_0\left(\frac{d^2\zeta}{dk^2}\right)_0 + f''(\zeta)_0\left(\frac{d\zeta}{dk}\right)_0^2\right] + \ldots\right\}$$

Cette égalité donne lieu aux égalités partielles suivantes :

$$d\zeta_0 = 0,$$
$$d\left(\frac{d\zeta}{dk}\right)_0 = f(\zeta)_0\,dp,$$
$$d\left(\frac{d^2\zeta}{dk^2}\right)_0 = 2f'(\zeta)_0\left(\frac{d\zeta}{dk}\right)_0 dp,$$
$$d\left(\frac{d^3\zeta}{dk^3}\right)_0 = 3f'(\zeta)_0\left(\frac{d^2\zeta}{dk^2}\right)_0 dp + 3f''(\zeta)_0\left(\frac{d\zeta}{dk}\right)_0 dp,$$

. . . .

et en intégrant, il vient :

$$\zeta_0 = V^2,$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dk}\right)_0 = f(V^2)(p-p_0),$$

$$\left(\frac{d^2\zeta}{dk^2}\right)_0 = f(V^2)f'(V^2)(p-p_0)^2,$$

$$\left(\frac{d^3\zeta}{dk^3}\right)_0 = f''(V^2)f^2(V^2)(p-p_0)^3 + f(V^2)f'^2(V^2)(p-p_0)^3,$$

. . . .

d'où :

$$\zeta = u^2 = V^2 + f(V^2)(p-p_0)k + \frac{k^2}{1.2}f(V^2)f'(V^2)(p-p_0)^2$$
$$+ \frac{k^3}{1.2.3}f(V^2)[f'^2(V^2) + f(V^2)f''(V^2)](p-p_0)^3 + \ldots$$

On voit facilement que la série précédente peut se mettre sous la forme

$$(2)' \quad u^2 = V^2\left[1 + k(p-p_0)C_1 + \frac{k^2}{1.2}(p-p_0)^2 C_2 + \frac{k^3}{1.2.3}(p-p_0)^3 C_3 + \ldots\right],$$

et qu'un coefficient quelconque est lié au précédent par la relation

$$C_r = \frac{f(V^2)}{V^2}\,\frac{d.V^2 C_{r-1}}{d.V^2}.$$

Ceci posé, en opérant comme dans le paragraphe précédent, on trouve :

$$(8') \qquad \frac{gX}{V^2 \sin 2\varphi} = 1 - \frac{2}{3}C_1 p_0 k + \frac{k^2 p_0^2}{3}\left(C_2 - \frac{1}{3}C_1^2\right).$$

Pour abréger, nous mettrons cette égalité sous la forme

$$(9') \qquad \frac{gX}{V^2 \sin 2\varphi} = 1 + kD_1 + k^2 D_2.$$

§ 5.

Cette équation doit être identique à l'équation (9), par conséquent on doit avoir:

$$kD_1 + k^2 D_2 = cB_1 + c^2 B_2,$$

d'où l'on déduit d'abord

$$\frac{k}{c}=\frac{B_1}{D_1}+c\frac{B_2}{D_1}-\frac{k^2}{c^2}c\frac{D_2}{D_1}.$$

Remarquons ici que $\frac{k}{c}=\bar{\beta}\cos^2\varphi$, d'où l'on voit que si les séries donnant X s'arrêtent aux termes du second ordre, la série donnant $\bar{\beta}$ s'arrête aux termes du premier ordre.

Donc, si $\frac{k}{c}$ ne peut contenir que des termes de premier ordre, on remplacera dans le second membre de l'équation précédente $\frac{k^2}{c^2}$ par $\frac{B_1^2}{D_1^2}$; par suite, il vient :

$$\frac{k}{c}=\frac{B_1}{D_1}+c\left(\frac{B_2}{D_1}-\frac{D_2}{D_1}\frac{B_1^2}{D_1^2}\right),$$

ou

$$\bar{\beta}\cos^2\varphi=\frac{B_1}{D_1}+c\frac{D_2}{D_1}\left(\frac{B_2}{D_2}-\frac{B_1^2}{D_1^2}\right). \tag{10}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à exprimer le second membre de l'égalité précédente en fonction de X, en éliminant V. Le *retour des séries* appliqué à l'équation (9) permet d'obtenir V en fonction de X ; on portera alors sa valeur dans l'équation (10), et on aura $\bar{\beta}$ en fonction de X et de φ. Dans le retour de la série (9), on peut négliger le terme en c^2, car l'approximation de $\bar{\beta}$ ne dépasse pas la première puissance de c, de même qu'elle ne dépasserait pas c^{n-1}, si l'équation (9) renfermait le terme c^n.

§ 6.

Nous avons fait l'application de la méthode que nous venons d'exposer au cas très simple, où la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque n de la vitesse, dans un milieu homogène.

Après avoir posé :

$$\frac{\delta i}{c} F(v) = cv^n \quad , \quad \int_0^p dp\,(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} = \xi_n(p) = \xi_n \quad , \quad p_0 = \operatorname{tg}\varphi$$

$$k_0 = \frac{n\,\xi_n(p_0)}{p_0}\ ,\ k_1 = \frac{n}{p_0^2}\int_0^{p_0} \xi_n\, p\, dp = \frac{n}{p_0^2}\left[\frac{\xi_n}{2}(1+p_0^2) - \frac{1}{2}\xi_{n+2}\right],$$

$$k_2 = \frac{n^2}{p_0^2}\int_0^{p_0} \xi^2{}_n\, dp = \frac{n^2}{p_0^2}\left[p\,\xi_n^2 - \frac{2\xi_n}{n+1}(1+p_0^2)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{2\xi_{2n+1}}{n+1}\right],$$

$$k_3 = \frac{n^3}{p_0^3}\int_0^{p_0} \xi^3{}_n\, p\, dp = \frac{n^3}{p_0^3}\left\{\frac{\xi_n^3}{2}(1+p_0^2) - \frac{3}{2}\xi_n^2\xi_{n+2} + \frac{n+1}{n+2}\xi_n^3\right.$$
$$\left. + \frac{3}{(n+2)(2n+2)}\left[\xi_n(1+p_0^2)^{n+1} - \xi_{2n+2}\right]\right\},$$

$$\lambda = \frac{3}{2n}(k_0 - k_1) \quad , \quad \mu = \frac{9(n+2)(k_0^2 - 2k_0k_1 + k_2) - 36k_1^2}{6n+8},$$

$$\nu = \frac{(n+1)(n+2)\left[k_0^3 - 3k_0^2k_1 + 3k_0k_2 - k_3\right] - 12nk_0k_1^2 - 24k_1^3}{\frac{4}{45}n^3(9n^2+12n+8)}.$$

$$\eta = \frac{c}{g}p_0\left(\frac{gX}{2p_0}\right)^{\frac{n}{2}},$$

nous avons trouvé :

$$\frac{\bar\beta}{\cos^{n-2}\varphi} = \lambda + \eta\left(\frac{3n+4}{6}\right)(\lambda^2-\mu) + \frac{2}{9}\eta^2\left[\frac{(3n+4)(5n+4)(\lambda^2-\mu)\lambda}{4}\right.$$
$$\left. - \frac{9n^2+12n+8}{5}(\lambda^3-\nu)\right].$$

Pour $n = 3$, l'expression précédente devient :

$$\frac{\bar\beta}{\cos\varphi} = 1 + \frac{2}{5}p_0^2 + \frac{1}{5}\eta p_0^2\left(1 + \frac{53}{2.3.5.7}p_0^2\right)$$
$$+ \frac{11}{3.5.7}\eta^2 p_0^2\left(1 + \frac{829}{2.5.9.11}p_0^2 + \frac{41.97}{3^2.5^2.11^2}p_0^4\right),$$

ou bien

$$\frac{\bar\beta}{\cos\varphi} = 1 + \frac{2}{5}p_0^2 + \frac{c}{5g}p_0^2\left(1 + \frac{53}{210}p_0^2\right)\left(\frac{gX}{2p_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{11}{105}\frac{c^2}{g^2}p_0^4\left(1 + \frac{829}{990}p_0^2 + \frac{3977}{27225}p_0^4\right)\left(\frac{gX}{2p_0}\right)^3,$$

ou encore, en posant $X' = gX\left(\frac{c}{g}\right)^{\frac{2}{3}}$,

(11) $$\frac{\bar\beta}{\cos\varphi} = 1 + \frac{2}{5}p_0^2 + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{53}{210}p_0^2\right)\left(\frac{p_0X'}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{11}{105}p_0\left(1 + \frac{829}{990}p_0^2 + \frac{3977}{27225}p_0^4\right)\left(\frac{X'}{2}\right)^3.$$

Pour $n = 2$, l'expression algébrique de $\bar{\beta}$ est plus compliquée. M. le capitaine Naïdenoff, de l'artillerie bulgare, et M. le lieutenant Mola, de l'artillerie italienne, ont bien voulu calculer les valeurs numériques des coefficients de η et de η^2 pour $\varphi = 30°$, $45°$, $60°$, et ils ont trouvé

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi = 30° \quad , \quad \bar{\beta} = 1,06341 + 0,02188\eta + 0,01485\eta^2, \\ \varphi = 45° \quad , \quad \bar{\beta} = 1,17592 + 0,06245\eta + 0,01903\eta^2, \\ \varphi = 60° \quad , \quad \bar{\beta} = 1,44877 + 0,17578\eta + 0,16810\eta^2. \end{cases}$$

§ 7.

Vérifications.

Le degré d'approximation de ces valeurs de $\bar{\beta}$ dépend évidemment du degré de convergence des séries, dont les expressions précédentes représentent les trois premiers termes. Nous ne sommes pas en mesure de rechercher le degré de convergence, en étudiant la loi de succession des termes ; mais il est facile de reconnaître *à posteriori* le degré d'approximation de ces équations.

Pour $n = 3$, on a, en effet, les tables de Bashforth, dont on a parlé à la page 102, qui permettent de calculer X', c'est-à-dire $g\mathrm{X}\left(\frac{c}{g}\right)^{\frac{2}{3}}$, lorsqu'on connaît l'angle φ et une quantité γ liée à cet angle et à la vitesse initiale V par les relations :

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\mathrm{V}'^3 \cos^3\varphi} + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{tg}^3\varphi \quad , \quad \mathrm{V}' = \mathrm{V}\left(\frac{c}{g}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

C'est au moyen de ces tables qu'on a calculé les valeurs suivantes de X' correspondant aux valeurs de γ et de φ données dans la table ci-après [1].

---

[1] Cette table et les deux qui suivent ont été calculées par M. le capitaine Parodi, auquel j'exprime ici toute ma reconnaissance. La seconde avait déjà été publiée par le même officier dans un travail fort remarquable intitulé : *De l'Approximation des formules balistiques* (*Rivista d'Artiglieria e Genio*), 1887.

Valeurs de X'

γ	φ						
	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°
0,04	....	....	0,13738	0,20168	0,24214	0,29155	0,35529
0,08	....	....	0,22214	0,33016	0,40041	0,48995	....
0,13	....	....	0,31491	0,47753	0,59009	0,74889	....
0,18	....	....	0,40250	0,62770	0,80226	....	....
0,20	....	....	0,43717	0,69190	0,90538	....	....
0,30	....	....	0,61685	1,15518	....	....	....
0,40	....	0,41014	0,83284	....	....	....	....
0,60	....	0,65648	....	....	....	....	....
0,80	0,34318	0,97551	....	....	....	....	....
1,10	0,45421	....	....	....	....	....	....
1,60	0,70384	....	....	....	....	....	....

D'autre part, l'équation qui lie V, φ, X et $\bar{\beta}$ est (page 82).

$$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX} = 1 + \frac{2}{3}(\bar{\beta} c V X) + \frac{1}{6}(\bar{\beta} c V X)^2,$$

ou

$$(11') \qquad \frac{V'^2 \sin 2\varphi}{X'} = 1 + \frac{2}{3}(\bar{\beta} V' X') + \frac{1}{6}(\bar{\beta} V' X')^2.$$

Si l'on introduit dans cette équation les valeurs de φ et de X' données par la table précédente, ainsi que les valeurs de V' correspondant aux valeurs de γ contenues dans la même table, on obtient les valeurs de $\bar{\beta}$ contenues dans la table suivante.

TABLEAU.

Valeurs exactes de $\overline{\beta}$.

Υ	φ						
	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°
0,04	....	....	0,9829	0,9863	0,9977	1,0212	1,0654
0,08	....	....	0,9846	0,9916	1,0070	1,0386	....
0,13	....	....	0,9871	0,9995	1,0223	1,0716	....
0,18	....	....	0,9894	1,0097	1,0452	....	....
0,20	....	....	0,9906	1,0148	1,0580	....	....
0,30	....	....	0,9974	1,0659	....	....	....
0,40	....	0,9945	1,0085	....	....	....	....
0,60	....	0,9988	....	....	....	....	....
0,80	0,9984	1,0083	....	....	....	....	....
1,10	0,9990	....	....	....	....	....	....
1,60	1,0009	....	....	....	....	....	....

Il s'agit maintenant de comparer ces valeurs de $\overline{\beta}$ que l'on peut considérer comme exactes, à celles que l'on obtient au moyen de l'équation (11').

En mettant dans cette dernière les valeurs de φ et de X' données dans la première table, on obtient pour $\overline{\beta}$ les valeurs contenues dans la table suivante.

Valeurs de $\overline{\beta}$ tirées de (11').

Υ	φ						
	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°
0,04	....	....	0,9830	0,9863	0,9977	1,0212	1,0653
0,08	....	....	0,9846	0,9916	1,0070	1,0384	....
0,13	....	....	0,9869	0,9995	1,0220	1,0704	....
0,18	....	....	0,9895	1,0096	1,0444	....	....
0,20	....	....	0,9906	1,0146	1,0575	....	....
0,30	....	....	0,9976	1,0641	....	....	....
0,40	....	0,9945	1,0085	....	....	....	....
0,60	....	0,9989	....	....	....	....	....
0,80	0,9982	1,0086	....	....	....	....	....
1,10	0,9989	....	....	....	....	....	....
1,60	1,0009	....	....	....	....	....	....

En comparant les deux tables, on voit que les valeurs de $\bar{\beta}$ sont les mêmes jusqu'au troisième chiffre, ce qui indique la rapidité de convergence de la série. En tout cas, ces valeurs approchées suffisent pour avoir des portées exactes à un mètre près.

Nous ferons remarquer que les tables de Basforth ne permettent pas de prolonger la vérification pour des valeurs plus élevées de γ et de φ. On peut donc considérer que la formule (11′) associée à la formule (11) est équivalente aux tables du balisticien anglais, tout au moins en ce qui concerne le problème principal de tir.

En adoptant les mêmes valeurs de $\bar{\beta}$ pour les autres problèmes, on trouve des différences numériques insignifiantes ([1]).

Pour $n = 2$, on a les tables de Otto (dont on a parlé à la page 102), qui donnent $\frac{2cX}{2,302585}$, et par conséquent $\eta = \frac{cX}{2}$, lorsque l'on connaît l'angle φ et une quantité Θ liée à φ et V par l'équation

$$\frac{cV^2}{g} = \frac{1}{2\cos^2\varphi\,[\xi_2(\Theta) - \xi_2(\varphi)]}.$$

D'autre part, l'équation qui lie V, φ, X et β est (page 82) :

$$\frac{V^2 \sin 2\varphi}{g} = X\,\frac{e^{2\bar{\beta}cX} - 1 - 2\bar{\beta}cX}{2(\bar{\beta}cX)^2},$$

qui revient à

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\varphi}{\xi_2(\Theta) - \xi_2(\varphi)} = \eta\,\frac{e^{4\eta} - 1 - 4\eta}{8\eta^2}.$$

Si l'on met dans cette équation deux valeurs quelconques à la place de Θ et φ, et pour η la valeur correspondante donnée par les tables de Otto, on pourra par cette équation déterminer $\bar{\beta}$. La table suivante a été calculée de cette façon ([2]).

([1]) Voir le travail du capitaine Parodi.
([2]) Parodi, note citée

Valeurs exactes de $\overline{\beta}$.

Θ	φ								
	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
37°	1,0787	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
42°	1,0740	1,1146	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
47°	1,0702	1,1062	1,1619	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
52°	1,0696	1,1020	1,1483	1,2172	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
57°	1,0663	1,0986	1,1409	1,2013	1,2909	. . .	. . .	. . .	. . .
62°	. . .	1,0953	1,1353	1,1913	1,2695	1,3865	. . .	. . .	. . .
67°	. . .	. . .	1,1324	1,1845	1,2576	1,3598	1,5179	. . .	. . .
72°	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	1,3502	1,4786	1,7021	. . .
77°	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	1,4606	1,6542	1,9837

Dans le tableau suivant, on trouve les valeurs de η et $\overline{\beta}$ correspondantes tirées des formules (12).

Θ	$\varphi = 30°$		$\varphi = 45°$		$\varphi = 60°$	
	$\log \eta$	$\overline{\beta}$	$\log \eta$	$\overline{\beta}$	$\log \eta$	$\overline{\beta}$
37°	9,72953	1,0794	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
42°	9,58298	1,0740	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
47°	9,45564	1,0709	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
52°	9,33233	1,0688	9,67179	1,2161	. . . .	. . . .
57°	9,20514	1,0673	9,50477	1,2009	. . . .	. . . .
62°	. . . .	. . . .	9,34291	1,1921	. . . .	. . . .
67°	. . . .	. . . .	9,16687	1,1861	9,47800	1,5169
72°	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	9,23292	1,4837
77°	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	8,94029	1,4651

Ici encore, l'accord entre les deux tables est très satisfaisant.

D'ailleurs, il est très facile de calculer l'erreur commise sur X provenant de l'erreur sur $\overline{\beta}$, au moyen de la formule (5) du cha-

pitre IX (section I) qui lie ΔX à $\Delta C'$. Comme $C' = \frac{C}{\delta i \overline{\beta}}$, on aura $\frac{\Delta C'}{C'} = -\frac{\Delta\overline{\beta}}{\overline{\beta}}$, par conséquent

$$\frac{\Delta X}{X} = -\frac{\Delta\overline{\beta}}{\overline{\beta}}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega}\right).$$

D'où l'on voit que l'erreur relative sur la portée est bien inférieure à l'erreur relative sur $\overline{\beta}$.

Ces vérifications, quoique limitées à des formes particulières de résistance, donnent une certaine probabilité à la convergence de la série exprimant β dans le cas de la résistance réelle.

§ 8.

En pratique, le développement exigerait d'abord la représentation de la résistance sous une forme continue, telle que

$$F(v) = Av^m + Bv^n + Cv^p + \ldots\ldots$$

(m, n et p étant des nombres entiers positifs ou négatifs) afin de ne pas rencontrer de difficultés dans les intégrations. La forme précédente de $F(v)$ peut représenter cette fonction avec l'approximation que l'on veut, car le nombre des termes n'est pas une difficulté. La méthode des moindres carrés s'applique assez facilement, lorsqu'on prend pour valeurs d'expérience celles que fournissent les formules discontinues que nous avons données.

Le calcul des termes de la série, qui exprime $\overline{\beta}$, est bien plus compliqué, mais il n'est pas hors de proportion avec le but, qui est la solution générale du problème balistique. Dans les mathématiques appliquées, la géodésie, l'astronomie, on trouve des exemples de calculs bien plus longs et plus difficiles. Manquera-t-il en balistique un calculateur de bonne volonté?

En attendant, nous proposons de faire abstraction de la raréfaction de l'air avec l'altitude, et de se borner au premier terme de la série; les termes que l'on néglige ainsi sont de signe contraire, et on peut les considérer comme étant du même ordre; il y a donc lieu de compter sur une approximation suffisante.

C'est dans ces conditions qu'a été établie la table VI (section I, chapitre II).

§ 9.

La valeur de $\overline{\beta}$ que nous avons appris à déterminer est celle qui sert à résoudre le problème principal du tir : — *Deux des trois quantités X, V, φ étant données, trouver la troisième.*

S'il s'agissait d'autres problèmes, on devrait à la rigueur employer des β différents dont la détermination serait assez facile, connaissant le $\overline{\beta}$ principal, car une grande partie des calculs serait commune. Mais au point de vue des applications pratiques, le développement de ces calculs est à peu près inutile, puisqu'en employant pour les divers problèmes la valeur de $\overline{\beta}$, qui convient au problème principal, on peut compter sur une approximation supérieure à tout ce que l'on peut demander. Les solutions cherchées n'offriraient donc dans ce cas qu'un intérêt purement théorique. Dans la recherche de ces solutions, il ne serait pas toutefois nécessaire d'envisager tous les problèmes, très nombreux du reste, qui résultent de la combinaison des quantités trois à trois. Il suffirait de se borner aux quatre quantités β_θ, β_x, β_y, β_t, qui entrent dans les équations (7), (8), (9), (10), du chapitre IV, section I, car il est évident qu'une fois ces quantités déterminées les équations citées ne renfermeraient plus rien d'inconnu.

La question reviendrait à développer en séries ordonnées suivant les puissances inverses du coefficient balistique les seconds membres de ces équations :

$$\beta_\theta = \frac{\int_\varphi^\theta \beta\, d\,\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\theta - \mathrm{tg}\varphi},$$

$$\beta_x = \frac{\int_0^x \beta\, dx}{x},$$

$$\beta_y = \frac{\int_0^x \beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta\, d\,\mathrm{tg}\theta}{\left(\mathrm{tg}\varphi - \frac{y}{x}\right)\int_0^x \beta\, dx},$$

$$\beta_t = \frac{\int_0^t \beta\, dt}{t}.$$

Or ces seconds se réduisent à des fonctions de θ, en se reportant aux équations

$$g\,dx = -v^2 \cos^2\theta\, d\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad gx = -\int_\varphi^\theta v^2 \cos^2\theta\, d\,\mathrm{tg}\,\theta$$
$$g\,dy = -v^2 d\theta\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad gy = -\int_\varphi^\theta v^2 d\theta\,\mathrm{tg}\,\theta$$
$$g\,dt = -v \cos\theta\, d\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad gt = -\int_\varphi^\theta v \cos\theta\, d\,\mathrm{tg}\,\theta$$

et à la série (2) qui exprime v en fonction de θ.

Quant à la valeur,

$$\beta = \psi(y)\frac{F(v)}{F\left(\dfrac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)}\frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi},$$

on peut l'exprimer également en fonction de θ, au moyen de la même série.

Relativement aux séries qui expriment β_θ, β_x, β_y, β_t, nous nous bornerons à signaler la propriété qui consiste dans l'identité de leurs premiers termes que nous désignerons par

$$\beta_{\theta_0}\ ,\ \beta_{x_0}\ ,\ \beta_{y_0}\ ,\ \beta_{t_0}$$

On obtient en effet ces premiers termes en mettant pour $v\cos\theta$ le premier terme de la série (2), c'est-à-dire $V\cos\varphi$. Ainsi, en posant

$$\beta_0 = \psi(y_0)\frac{F\left(\dfrac{V\cos\varphi}{\cos\theta}\right)}{F(V)}\frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi},$$

on trouve immédiatement

$$\beta_{\theta_0} = \beta_{x_0} = \beta_{y_0} = \beta_{t_0} = \frac{\int_\varphi^\theta \beta_0\, d\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,\theta - \mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Il est presque superflu d'ajouter que cette valeur commune n'est pas la même que celle représentée par le premier terme de la série qui exprime la valeur de $\bar{\beta}$ du problème principal. Ce premier terme est en effet :

$$\frac{3}{4\,\mathrm{tg}\,\varphi}\int_0^\varphi \beta_0\, d\,\mathrm{tg}\,\theta\left(1 + \frac{\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\varphi}\right).$$

NOTE IX

SUR LES PROPRIÉTÉS DES PROJECTILES DISCOÏDES

On a vu dans la *Balistique* (p. 131 et suiv.) qu'à diverses époques, des tentatives ont été faites pour arriver à lancer des projectiles en forme de disque : ces projectiles devaient être animés d'une rotation autour de leur axe de figure de façon à maintenir autant que possible l'équateur du disque dans le plan vertical de tir pendant toute la durée du trajet dans l'air.

Les principaux avantages que l'on pouvait attendre du tir de semblables projectiles étaient les suivants :

Atténuation de la résistance de l'air et, par suite, grande tension de la trajectoire.

Grande stabilité de la rotation entraînant un accroissement de justesse.

Grande facilité de pénétration dans les milieux résistants.

Possibilité d'effectuer le tir roulant dans des conditions particulières d'efficacité.

On comprend, par cette énumération de leurs principales propriétés, quel intérêt considérable on eût trouvé, au temps de l'artillerie lisse, à pouvoir réaliser le tir de projectiles discoïdes ; aussi le problème a-t-il tenté nombre de balisticiens, parmi lesquels il convient de citer, en première ligne, M. de Saint-Robert : c'est à lui que l'on doit, entre autres travaux sur ce sujet, l'étude et la mise en expérience d'une bouche à feu courbe tirant un projectile lenticulaire (voir p. 134).

Ayant pris intérêt à cette question (1872) et m'étant proposé d'éta-

blir un projet de bouche à feu de cette sorte sur des données rationnelles, je me trouvai conduit à rechercher comment il serait possible de déterminer numériquement les coefficients et la loi de variation de la résistance de l'air dans le cas particulier de projectiles discoïdes ou sphéroïdes animés d'une rotation initiale.

En dehors des études de M. de Saint-Robert, qui n'envisageaient que la réalisation pratique du tir des discoïdes et ne renfermaient ni théorie de leur mouvement, ni déterminations numériques, il n'existait dans les traités de l'époque que fort peu de chose sur ce sujet : des inductions de Robins qui, le premier, avait attribué les déviations des projectiles sphériques à une action régulière de l'air ; un mémoire célèbre de Poisson qui touche indirectement à la question, mais dont l'analyse se trouvait difficilement applicable à notre objet; enfin, les expériences de Magnus (voir p. 129), qui mettent simplement en relief un phénomène physique nouveau sans en donner de mesure précise et où, d'ailleurs, les vitesses mises en œuvre s'éloignent par trop des vitesses balistiques pour pouvoir servir de base à un projet tel que celui que j'avais en vue.

J'entrepris alors quelques expériences au moyen de petits disques tournants que l'on abandonnait en chute libre, dans l'air, et dont on mesurait, au point de chute, l'écart par rapport à la verticale du point de départ. Les résultats, tout en confirmant nettement la loi de Magnus, présentaient des incertitudes trop grandes et se rapportaient à des vitesses de translation et de rotation encore beaucoup trop faibles pour pouvoir être étendus aux projectiles.

Je repris ces études peu de temps après (1873-74) en partant non plus d'expériences directes, mais des résultats fournis par le tir des projectiles *lenticulaires* de Puydt et des projectiles *excentrés,* dits aussi *équilibrés* (p. 131-133), expérimentés par différentes artilleries. Là encore on se heurte à de graves difficultés, en raison de l'impossibilité d'évaluer, dans chaque cas, avec précision, la vitesse de rotation mise en jeu : aussi les résultats auxquels je suis parvenu ne peuvent-ils être acceptés que sous réserve de vérifications ultérieures ; je ne mentionne les suivants que pour mémoire ;

ils se rapportent à des disques de forme extérieure analogue à celle des projectiles de Puydt, à des vitesses de translation inférieures à 500 m et à des vitesses de rotation moindres que 150 tours à la seconde :

a) *La force due à la résistance de l'air dans le sens opposé à la translation (résistance tangentielle) n'est pas notablement modifiée par le fait de la rotation. On peut lui conserver son expression habituelle dans les équations du mouvement.*

b) *La résistance normale est proportionnelle à la tangentielle et à une fonction de la vitesse circonférentielle équatoriale* u *qui peut être définie par l'expression* $A u^{\alpha}$; *les résultats d'expérience sont convenablement représentés si l'on prend* $\alpha = 1$ *et* $A = 0{,}012$.

Ces résultats, je le répète, demandent à être confirmés, et il ne me paraît pas possible de lever l'incertitude qu'ils présentent encore, sans recourir à de nouvelles expériences.

Ce qu'il est facile au contraire de mettre en relief en partant des expériences anciennes et ce que je m'attachai à faire ressortir dans le même travail (¹), c'est la possibilité d'obtenir, au moyen des discoïdes, des formes de trajectoires que ni les projectiles sphériques, ni les projectiles oblongs de l'artillerie actuelle ne sauraient réaliser. L'intervention de la force normale définie ci-dessus (*b*) modifie en effet d'autant plus profondément le mouvement du projectile que sa rotation est plus considérable, toutes autres choses égales, et comme cette force agit dans un sens ou dans le sens opposé, suivant que la partie antérieure du disque tourne de bas en haut ou de haut en bas, il en résulte une variété considérable dans les formes de trajectoires que l'on peut obtenir avec un même projectile.

Un des effets les plus immédiats et que les expériences déjà rappelées ont mis en relief, c'est le relèvement de la trajectoire lorsque la partie antérieure du projectile tourne de bas en haut et son abaissement lorsqu'elle tourne en sens inverse, ce qui correspond à un accroissement de portée dans le premier cas et à une diminution dans le second. En combinant convenablement les effets de la rotation avec les conditions initiales du mouvement de trans-

(¹) *Mémoire sur une question de balistique*, 1874 (non publié).

lation, on peut arriver à des formes de trajectoires très curieuses telles que les suivantes (fig. 56, 57, 58, 59) :



Fig. 56.



Fig. 57.

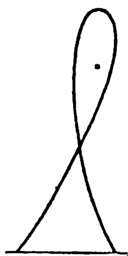


Fig. 58.

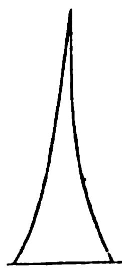


Fig. 59.

Il se devine, et l'analyse qui nous a conduit à la définition de ces courbes ne laisse aucun doute à cet égard, que de pareilles formes ne peuvent se produire qu'à la faveur des vitesses de rotation relativement grandes et difficilement réalisables dans la pratique, aussi je ne les indique qu'à titre de curiosité et parce que l'une de ces courbes (fig. 57) a été le point de départ d'une série d'études que je n'ai pas cessé de poursuivre depuis cette époque.

Cette trajectoire présente en effet cette particularité que la branche descendante vient rencontrer le sol sous un angle *plus grand* que 90° et donne lieu par suite à un tir *rétrograde* permettant d'atteindre *à revers* un but placé en avant de la bouche à feu. C'est là incontestablement un des problèmes les plus intéressants qui, dans l'état de progrès actuel, puisse se poser à l'artillerie (¹). Malheureusement, cette propriété, dans le tir des discoïdes tel que nous l'avons envisagé et tel qu'on a essayé de le réaliser jusqu'ici, ne pourrait s'obtenir, ainsi que j'ai déjà eu occasion de le dire, qu'en recourant à des vitesses de rotation très grandes et telles que l'on a peine à imaginer une arme à feu permettant de les obtenir ; aussi ne vis-je d'abord, dans cette conception nouvelle, qu'une

(¹) Il est curieux de rappeler à ce propos que Rabelais, en décrivant les merveilleuses inventions qu'il rapporte à messire Gaster, s'exprime ainsi : « Il avoit inventé l'art et manière de faire les boullets arrière retourner contre les ennemis, en pareille furie et dangier et qu'ils seroient tirés, et en propre parallèle. » (*Pantagruel*, liv. IV, chap. LXII.)

Disons aussi que l'espèce de latte recourbée que les Indiens lancent, à la main, sur leurs adversaires et qu'ils nomment *Boomerang*, a depuis longtemps réalisé de véritables trajectoires *rétrogrades*.

simple curiosité balistique sans aucun avenir pratique. Mais en y réfléchissant depuis, j'ai trouvé que de semblables trajectoires pourraient au contraire s'obtenir très facilement en spéculant non plus sur la résistance équatoriale des projectiles discoïdes, mais sur leur résistance polaire, c'est-à-dire en faisant tourner le disque non plus parallèlement au plan de tir, à la façon d'une roue de voiture ou d'un cerceau d'enfant, mais perpendiculairement à ce plan, comme on lance le *palet* dans le jeu du *tonneau*.

L'étude théorique de ce genre de tir ne présente plus les mêmes difficultés : la rotation n'intervenant plus que pour assurer la stabilité du projectile, il devient assez facile, avec les données expérimentales dont on dispose actuellement, d'évaluer les résistances et de déterminer les équations du mouvement. Dans le cas où le projectile affecte la forme d'un cylindre de révolution très aplati, le problème comporte même une solution fort simple que je vais indiquer :

Si l'on adopte pour les résistances élémentaires l'expression usuelle, c'est-à-dire la proportionnalité à la surface de l'élément et à une certaine puissance n de la vitesse normale à cet élément et si l'on néglige les forces qui se développent aux points où la vitesse est négative, on trouve que la résistance *totale* sur la face circulaire est proportionnelle à $(v \cos\alpha)^n$ et que la résultante sur la partie cylindrique est proportionnelle à $(v \sin\alpha)^n$. Or $v \cos\alpha$ est précisément l'expression de la composante de la vitesse de translation parallèle à l'équateur et $v \sin\alpha$ la composante parallèle à l'axe ; on déduit de là cette importante proposition qui facilite notablement la mise en équation du mouvement :

(A) *Quand un cylindre de révolution se meut dans l'air de telle sorte que son axe de figure reste constamment parallèle à lui-même, on peut considérer son mouvement comme composé de deux mouvements élémentaires, l'un parallèle à l'équateur, l'autre perpendiculaire, et envisager séparément les résistances dues à ces deux mouvements.*

On voit de plus que les composantes de la résistance passent toutes deux par le centre du mobile supposé homogène, en sorte que l'axe de révolution n'éprouve, théoriquement, de la part de l'air, aucune déviation et garde son parallélisme pendant toute la durée du mouvement. Disons toutefois que ce dernier résultat

n'est pas rigoureusement en accord avec l'expérience : on sait qu'en général, lorsqu'une surface plane se meut obliquement dans l'air, le point d'application de la résultante s'approche plus de la partie antérieure que ne l'indiquerait la théorie, et, dans le cas particulier qui nous occupe, il n'est pas douteux que l'air ne donne lieu en effet à un couple de renversement qui est loin d'être négligeable, mais il est évident aussi qu'il suffit d'imprimer au corps une vitesse de rotation suffisante autour de l'axe de figure pour s'opposer à ce mouvement et faire que l'angle de précession soit aussi faible qu'on le désire.

Le projectile se mouvant ainsi en conservant son axe toujours sensiblement parallèle à une direction fixe, son mouvement se trouvera complètement défini d'après le principe ci-dessus (A) par des équations telles que :

$\frac{dv}{dt} = k\varphi(v)$ v vitesse ou mobile dans le sens parallèle à l'équateur,

$\frac{du}{dt} = k\psi(u)$ u vitesse du mobile dans le sens perpendiculaire à l'équateur,

lesquelles, après intégration et élimination de t, peuvent donner, entre le déplacement x parallèle à l'équateur et le déplacement y perpendiculaire, une relation qui est l'équation de la trajectoire.

Nous avons montré (*Revue d'artillerie*, t. XX, p. 415) que, pratiquement, cette recherche peut être simplifiée. Il semble en effet peu probable que l'on trouve intérêt à tirer les projectiles que nous envisageons, avec de grandes vitesses initiales, dans le cas du moins où l'on cherchera uniquement à réaliser des trajectoires rétrogrades : 250 m me paraissent le maximum qu'il convienne de rechercher, dans la pratique, pour ce genre de tir ; la vitesse dans le sens perpendiculaire à l'équateur devant en tout cas rester fort au-dessous de cette même valeur, la loi de proportionnalité au carré de la vitesse s'impose pour les résistances à introduire dans chacun des deux mouvements et l'on aura simplement :

$$\frac{dv}{dt} = kv^2 \quad , \quad \frac{du}{dt} = k_1 u^2$$

k et k_1 étant des coefficients constants dépendant de la forme et des

dimensions du mobile et qu'il est commode de mettre sous la forme :

$$k = \frac{\gamma}{V^2} \quad , \quad k_1 = \frac{\gamma_1}{U^2}$$

γ et γ_1 représentant respectivement les deux composantes de la pesanteur parallèlement et perpendiculairement à la direction fixe de l'équateur du projectile.

Les équations du mouvement sont alors, eu égard à la proposition que nous avons établie plus haut (A) :

Mouvement parallèle à l'équateur.
- Branche ascendante . . $\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\left(\frac{v^2}{V^2}+1\right)$
- Branche descendante. . $\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\left(\frac{v^2}{V^2}-1\right)$

Mouvement perpendiculaire à l'équateur . $\frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma_1\left(\frac{u^2}{U^2}-1\right)$

Ces équations se développent facilement et donnent :

Mouvement parallèle à l'équateur.

Branche ascendante.

$$x = \frac{V^2}{2\gamma} \text{l.} \frac{V^2+v_0^2}{V^2+v^2} \qquad (1)$$

$$t = \frac{V}{\gamma}\left[\text{arc tg}\frac{v_0}{V} - \text{arc tg}\frac{v}{V}\right] \qquad (2)$$

Branche descendante.

$$x = -\frac{V^2}{2\gamma} \text{l.} \left[1-\frac{v^2}{V^2}\right] \qquad (3)$$

$$t = \frac{V}{2\gamma} \text{l.} \frac{\left(1+\frac{v}{V}\right)}{\left(1-\frac{v}{V}\right)} \qquad (4)$$

Mouvement perpendiculaire à l'équateur.

$$y = -\frac{U^2}{2\gamma_1} \text{l.} \left[1-\left(\frac{u}{U}\right)^2\right] \qquad (5)$$

$$t = \frac{U}{2\gamma_1} \text{l.} \frac{\left(1+\frac{u}{U}\right)}{\left(1-\frac{u}{U}\right)} \qquad (6)$$

En éliminant t entre (2) et (6), on aurait une équation (7) qui peut donner explicitement la valeur de u en fonction de v ; le système (1), (5), (7) permettrait donc de déterminer pour chaque valeur de v les coordonnées x et y, c'est-à-dire de construire par points la branche ascendante de la trajectoire. On déduirait de

même de (4) et (6) une équation (8) donnant u en fonction de v pour la branche descendante et le système (3), (5), (8) permettrait de construire par points cette deuxième branche.

On peut arriver à plus de simplicité encore : en effet, d'une part, la construction de la branche ascendante offre peu d'intérêt, il suffit de connaître les coordonnées X, Y du point origine M de la branche descendante et le temps T au bout duquel le mobile arrive en ce point : ces éléments se déduisent facilement des équations (1), (2), (5), (6), en introduisant dans (1) et (2) la condition $v = 0$. On trouve ainsi :

$$X = \frac{V^2}{2\gamma} l. \left(1 + \frac{v_0^2}{V^2}\right)$$

$$Y = -\frac{U^2}{\gamma_1} l. \frac{2}{e^{\frac{\gamma_1 T}{U}} + e^{-\frac{\gamma_1 T}{U}}}$$

$$T = \frac{V}{\gamma} \text{ arc tg } \frac{v_0}{V}$$

D'autre part, dans la plupart des cas intéressants pour la pratique, le mobile possédera, à partir du point M, une vitesse perpendiculaire sensiblement constante et qui peut se représenter précisément par U ; on ne commettra donc que d'insignifiantes erreurs en adoptant pour la branche descendante la simple loi $y = Ut$.

Les éléments du mouvement, rapportés au point M pris pour nouvelle origine, sont alors :

(a) $$x = -\frac{V^2}{2\gamma} l. \left[1 - \frac{v^2}{V^2}\right]$$

(b) $$y = \frac{UV}{2\gamma} l. \frac{1 + \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}}$$

(c) $$t = \frac{y}{U}$$

(d) $$\text{tg}(\omega - \varphi) = \frac{U}{v}$$

ω angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon.
φ angle du plan fixe de l'équateur avec le plan horizontal : angle de tir.

Il serait facile d'éliminer v entre (a) et (b) et d'obtenir ainsi l'équation de la trajectoire, mais l'expression ci-dessus des coordonnées se prête plus commodément aux applications.

Il ne reste plus, pour pouvoir tirer parti de ces formules, qu'à déterminer les caractéristiques V et U de la résistance de l'air. Sans entrer dans le détail des recherches qui m'ont permis d'en fixer la valeur dans les cas les plus intéressants, je me borne à rappeler les deux expressions que j'en ai données (*loc. cit.*) :

$$V^2 = 3000 \frac{p}{n r^2}, \quad U^2 = 300 \frac{p}{r^2}.$$

Dans ces expressions, p représente le poids du projectile en kilogrammes, r le rayon équatorial en décimètres et n l'*aplatissement,* c'est-à-dire le rapport de l'épaisseur du disque à son diamètre. Elles ne s'appliquent pas à un projectile exactement cylindrique, mais à des disques légèrement amincis vers le bord et d'un aplatissement compris entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$.

Comme application, nous donnons ci-après les trajectoires théoriques d'un projectile de 9 kg, ayant 35 cm de diamètre équatorial et un aplatissement de $\frac{1}{7}$, tiré sous l'angle de 45° avec des vitesses initiales de 150 m, 190 m, 245 m.

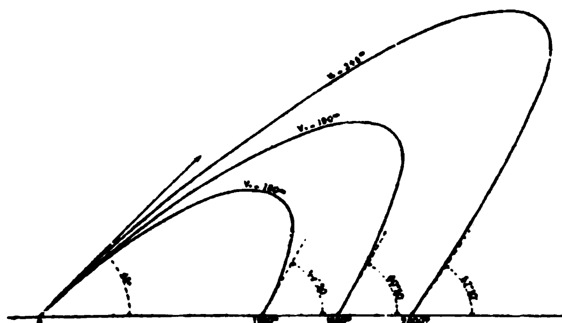


Fig. 60.

Ces trajectoires, représentées à l'échelle de 1/20000e (fig. 60), sont déjà fort rétrogrades : il est clair d'ailleurs que, pour accentuer davantage la rétrogradation, il suffirait d'augmenter le coefficient d'aplatissement.

En donnant à l'arme une sorte de déversement de façon à faire tourner le plan équatorial autour de la ligne de tir et à l'incliner

plus ou moins d'un côté ou de l'autre, on obtiendrait des trajectoires d'*écharpe*, symétriques pour des inclinaisons initiales symétriques, qu'on peut calculer comme nous avons fait pour les précédentes et par les mêmes formules, en envisageant séparément le mouvement parallèle à l'équateur et l'abaissement normal à ce plan.

Et maintenant une question se pose : sera-t-il vraiment possible de réaliser pratiquement de pareilles trajectoires et peut-on espérer que des armes de ce système trouveront jamais place dans les équipages de l'artillerie de siège ou de campagne ? Aujourd'hui nous n'hésiterons pas à répondre nettement par l'affirmative.

Depuis longtemps déjà nous avons pu lancer *à revers* de petits disques, soit à la main, soit au moyen d'appareils réduits où le caoutchouc remplaçait la poudre : enfin, l'arme bien connue des Indiens, le *boomerang*, avec une forme appropriée à son rôle d'arme de main, ne repose pas sur un autre principe que celui que nous avons en vue. Il est vrai que, lorsqu'on passe à des applications plus étendues, lorsqu'on se propose de réaliser une véritable arme à feu à tir rétrograde, on se heurte à des difficultés considérables et qui m'ont paru longtemps insurmontables. Ni le projectile excentrique de Puydt, ni le projectile lenticulaire du canon courbe de Saint-Robert, ni les disques à tenon expérimentés par l'artillerie de marine, ni ceux à double tenon conçus par le regretté commandant Terquem ne paraissent susceptibles de résoudre utilement le problème et ne fournissent le moyen de lancer, avec une justesse suffisante, les projectiles *très aplatis* et cependant meurtriers qui seuls peuvent assurer un tir rétrograde réellement efficace. Heureusement, il m'a été donné, dans ces derniers temps, de pouvoir recourir à un principe nouveau qui n'offre plus les mêmes inconvénients et grâce auquel la question semble définitivement entrée dans la phase expérimentale avec de bonnes chances de succès ; mais ces nouvelles études sont encore trop peu avancées et leur avenir reste encore trop incertain pour qu'il nous paraisse utile de les exposer ici.

Versailles, octobre 1891.

Commandant Chapel.

TABLES NUMÉRIQUES

I (page 14). **Densité de l'air.**

TEMPÉRATURE en degrés centigr.	HAUTEUR BAROMÉTRIQUE EN MINUTES.								
	700	710	720	730	740	750	760	770	780
					Valeurs de δ.				
— 10	1,025	1,039	1,054	1,069	1,083	1,098	1,113	1,127	1,142
— 9	021	035	050	065	079	094	108	123	138
— 8	017	031	046	061	075	090	104	119	133
— 7	013	028	042	056	071	085	100	114	129
— 6	009	024	038	052	067	081	096	110	125
— 5	1,005	1,020	1,034	1,048	1,063	1,077	1,092	1,106	1,120
— 4	002	016	030	045	059	073	087	102	116
— 3	0,998	012	026	041	055	069	083	098	112
— 2	994	008	022	037	051	065	079	094	108
— 1	990	004	019	033	047	061	075	089	104
0	0,987	1,001	1,015	1,029	1,043	1,057	1,071	1,085	1,099
1	983	0,997	011	025	039	053	067	081	095
2	979	993	007	021	035	049	063	077	091
3	976	989	003	017	031	045	059	073	087
4	972	986	000	014	028	041	055	069	083
5	0,968	0,982	0,996	1,010	1,024	1,038	1,051	1,065	1,079
6	965	978	992	006	020	034	048	061	075
7	961	975	989	002	016	030	044	057	071
8	958	971	985	0,999	012	026	040	053	067
9	954	968	981	995	009	022	036	050	063
10	0,950	0,964	0,978	0,991	1,005	1,019	1,032	1,046	1,059
11	947	961	974	988	001	015	028	042	055
12	943	957	970	984	0,998	011	025	038	052
13	940	953	967	980	994	007	021	034	048
14	936	950	963	977	990	004	017	031	044
15	0,933	0,946	0,960	0,973	0,987	1,000	1,013	1,027	1,040
16	930	943	956	970	983	0,996	010	023	036
17	926	939	953	966	979	993	006	019	032
18	923	936	949	962	976	989	002	015	029
19	919	932	946	959	972	985	0,998	012	025
20	0,916	0,929	0,942	0,955	0,968	0,982	0,995	1,008	1,021
21	912	925	939	952	965	978	991	004	017
22	909	922	935	948	961	974	987	000	013
23	906	919	932	945	958	971	984	0,997	010
24	902	915	928	941	954	967	980	993	006
25	0,899	0,912	0,925	0,938	0,950	0,963	0,976	0,989	1,002
26	895	908	921	934	947	960	973	986	0,998
27	892	905	918	930	943	956	969	982	995
28	889	901	914	927	940	953	965	978	991
29	885	898	911	923	936	949	962	974	987
30	0,882	0,894	0,907	0,920	0,933	0,945	0,958	0,971	0,983
31	878	891	904	916	929	942	954	967	980
32	875	888	900	913	925	938	951	963	976
33	872	884	897	909	922	935	947	960	972
34	868	881	893	906	918	931	943	956	968
35	0,865	0,877	0,890	0,902	0,915	0,927	0,940	1,952	0,965
36	861	874	886	899	911	924	936	948	961
37	858	870	883	895	907	920	932	945	957
38	854	867	879	891	904	916	929	941	953
39	851	863	876	888	900	912	925	937	950
40	0,847	0,860	0,872	0,884	0,896	0,909	0,921	0,933	0,946

II (page 15). **Psychromètre d'August.**

THERMOMÈTRE mouillé.	DIFFÉRENCE ENTRE LES DEUX THERMOMÈTRES.										
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
	Correction en millièmes de la densité δ.										
— 10°	— 1	0	0	1	1	—	—	—	—	—	—
— 9°	— 1	0	0	1	1	—	—	—	—	—	—
— 8°	— 1	0	0	0	1	1	—	—	—	—	—
— 7°	— 1	0	0	0	1	1	—	—	—	—	—
— 6°	— 1	— 1	0	0	1	1	—	—	—	—	—
— 5°	— 1	— 1	0	0	1	1	2	—	—	—	—
— 4°	— 1	— 1	0	0	1	1	2	—	—	—	—
— 3°	— 1	— 1	0	0	1	1	2	—	—	—	—
— 2°	— 1	— 1	0	0	1	1	2	2	—	—	—
— 1°	— 1	— 1	0	0	1	1	1	2	—	—	—
0°	— 1	— 1	0	0	0	1	1	2	—	—	—
1°	— 1	— 1	— 1	0	0	1	1	2	2	—	—
2°	— 1	— 1	— 1	0	0	1	1	2	2	—	—
3°	— 1	— 1	— 1	0	0	1	1	1	2	3	—
4°	— 2	— 1	— 1	0	0	1	1	1	2	3	3
5°	— 2	— 1	— 1	— 1	0	0	1	1	2	3	3
6°	— 2	— 1	— 1	— 1	0	0	1	1	2	3	3
7°	— 2	— 2	— 1	— 1	0	0	1	1	2	3	3
8°	— 2	— 2	— 1	— 1	0	0	1	1	2	3	3
9°	— 2	— 2	— 1	— 1	0	0	1	1	2	3	3
10°	— 2	— 2	— 1	— 1	— 1	0	1	1	2	3	3
11°	— 2	— 2	— 1	— 1	— 1	0	1	1	2	2	3
12°	— 2	— 2	— 1	— 1	— 1	0	1	1	2	2	3
13°	— 3	— 3	— 2	— 1	— 1	0	0	1	2	2	2
14°	— 3	— 3	— 2	— 2	— 1	— 1	0	1	2	2	2
15°	— 3	— 3	— 2	— 2	— 1	— 1	0	1	2	2	2
16°	— 3	— 3	— 3	— 2	— 1	— 1	0	1	1	2	2
17°	— 3	— 3	— 3	— 2	— 1	— 1	0	0	1	2	2
18°	— 4	— 4	— 3	— 2	— 1	— 1	0	0	1	2	2
19°	— 4	— 4	— 3	— 2	— 2	— 1	0	0	1	2	2
20°	— 4	— 4	— 3	— 2	— 2	— 1	— 1	0	0	2	2
21°	— 4	— 4	— 4	— 3	— 2	— 1	— 1	0	0	2	2
22°	— 5	— 5	— 4	— 3	— 2	— 2	— 2	0	0	2	2
23°	— 5	— 5	— 4	— 3	— 2	— 2	— 2	1	0	1	2
24°	— 5	— 5	— 5	— 4	— 3	— 2	— 2	1	0	1	2
25°	— 6	— 5	— 5	— 4	— 3	— 2	— 2	1	0	1	2

III (page 15). **Correction de la densité de l'air aux diverses altitudes h.**

h	$\delta_h : \delta_0$	h	$\delta_h : \delta_0$	h	$\delta_h : \delta_0$	h	$\delta_h : \delta_0$
Mètres.		Mètres.		Mètres.		Mètres.	
0	1.000	500	0.960	1000	0.920	1500	0.880
100	0.992	600	0.952	1100	0.912	1600	0.872
200	0.984	700	0.944	1200	0.904	1700	0.864
300	0.976	800	0.936	1300	0.896	1800	0.856
400	0.968	900	0.928	1400	0.888	1900	0.848
500	0.960	1000	0.920	1500	0.880	2000	0.840

IV (pages 5 et 56). **Résistance de l'air.**

Retardation $= f(v) = \frac{\delta i}{C} F(v) = \frac{\delta i}{C} v^2 K(v)$, $N = \frac{\pi}{360}\left(\frac{v F'(v)}{F(v)} - 1 + 0,00008 \frac{v^2}{g}\right)$

v	$10^6 K$	$10^4 N$	v	$10^6 K$	$10^4 N$	v	$10^6 K$	$10^4 N$	v	$10^6 K$	$10^4 N$
100	107	91	275	131	283	350	284	363	425	336	224
. . .	. . .	. . .	280	138	309	355	292	343	430	336	226
210	107	120	285	147	335	360	299	325	435	337	228
215	107	123	290	155	362	365	305	309	440	337	230
220	108	128	295	163	389	370	311	295	445	337	232
225	108	133	300	171	413	375	315	281	450	338	234
230	108	140	305	179	438	380	319	269	455	338	237
235	108	147	310	188	461	385	322	259	460	338	240
240	109	155	315	199	483	390	326	250	465	338	242
245	110	167	320	211	500	395	328	243	470	338	245
250	111	181	325	225	502	400	330	237	475	338	248
255	113	196	330	238	499	405	331	233	480	339	252
260	114	214	335	251	480	410	333	229	485	339	255
265	119	234	340	265	424	415	334	226	490	339	258
270	124	258	345	274	387	420	336	223	. . .	. . .	. . .
275	131	283	350	284	363	425	338	224	1000	339	799

V

TABLE BALISTIQUE

(Page 50).

$$D(u) = -\int \frac{u\,du}{F(u)} \quad , \quad J(u) = -\int \frac{2g\,du}{uF(u)}$$

$$A(u) = -\int \frac{J(u)\,u\,du}{F(u)} \quad , \quad T(u) = -\int \frac{du}{F(u)}$$

$$F(u) = u^2 K u.$$

V. Table balistique.

D	J		A		T		u	
0	0,0300	2	57,1	3	0,789	10	983,0	34
10	0,0302	2	57,4	3	0,799	11	979,6	33
20	0,0304	2	57,7	3	0,810	10	976,3	34
30	0,0306	2	58,0	3	0,820	10	972,9	33
40	0,0308	3	58,3	3	0,830	11	969,6	33
50	0,0311	2	58,6	3	0,841	10	966,3	33
60	0,0313	2	58,9	4	0,851	10	963,0	32
70	0,0315	2	59,3	3	0,861	11	959,8	32
80	0,0317	2	59,6	3	0,872	10	956,6	32
90	0,0319	2	59,9	3	0,882	10	953,4	32
100	0,0321	2	60,2	3	0,892	10	950,2	32
10	0,0323	2	60,5	4	0,902	11	947,0	32
20	0,0325	3	60,9	3	0,913	11	943,8	32
30	0,0328	2	61,2	3	0,924	10	940,6	32
40	0,0330	2	61,5	4	0,934	11	937,4	31
50	0,0332	2	61,9	3	0,945	11	934,3	32
60	0,0334	2	62,2	3	0,956	11	931,1	32
70	0,0336	3	62,5	4	0,967	11	927,9	32
80	0,0339	2	62,9	3	0,978	11	924,7	32
90	0,0341	2	63,2	3	0,989	10	921,5	31
200	0,0343	2	63,5	4	0,999	11	918,4	31
10	0,0345	3	63,9	3	1,010	11	915,3	31
20	0,0348	2	64,2	4	1,021	11	912,2	30
30	0,0350	3	64,6	4	1,032	11	909,2	31
40	0,0353	2	65,0	3	1,043	11	906,1	31
50	0,0355	2	65,3	4	1,054	11	903,0	30
60	0,0357	3	65,7	4	1,065	11	900,0	30
70	0,0360	2	66,1	3	1,076	11	897,0	30
80	0,0362	3	66,4	4	1,087	11	894,0	31
90	0,0365	2	66,8	4	1,098	12	890,9	30
300	0,0367	3	67,2	3	1,110	11	887,9	30
10	0,0370	2	67,5	4	1,121	11	884,9	31
20	0,0372	3	67,9	4	1,132	12	881,8	30
30	0,0375	2	68,3	3	1,144	11	878,8	30
40	0,0377	3	68,6	4	1,155	11	875,8	30
50	0,0380	3	69,0	4	1,166	12	872,8	30
60	0,0383	2	69,4	4	1,178	12	869,8	29
70	0,0385	3	69,8	3	1,190	11	866,9	29
80	0,0388	2	70,1	4	1,201	12	864,0	29
90	0,0390	3	70,5	4	1,213	12	861,1	30
400	0,0393	3	70,9	4	1,225	11	858,1	29
10	0,0396	3	71,3	4	1,236	12	855,2	29
20	0,0399	2	71,7	4	1,248	12	852,3	29
30	0,0401	3	72,1	4	1,260	11	849,4	29
40	0,0404	3	72,5	4	1,271	12	846,5	29
50	0,0407	3	72,9	4	1,283	12	843,6	28
60	0,0410	3	73,3	4	1,295	12	840,8	28
70	0,0413	2	73,7	4	1,307	12	838,0	29
80	0,0415	3	74,1	5	1,319	12	835,1	28
90	0,0418	3	74,6	4	1,331	12	832,3	28
500	0,0421		75,0		1,343		829,5	

D	J		A		T		u	
500	0,0421	3	75,0	4	1,343	12	829,5	29
10	0,0424	3	75,4	4	1,355	12	826,6	28
20	0,0427	3	75,8	4	1,367	13	823,8	28
30	0,0430	3	76,2	5	1,380	12	821,0	28
40	0,0433	3	76,7	4	1,392	12	818,2	28
50	0,0436	2	77,1	4	1,404	13	815,4	27
60	0,0438	3	77,5	5	1,417	12	812,7	28
70	0,0441	3	78,0	4	1,429	12	809,9	27
80	0,0444	3	78,4	5	1,441	13	807,2	28
90	0,0447	3	78,9	5	1,454	12	804,4	27
600	0,0450	3	79,4	4	1,466	13	801,7	27
10	0,0453	3	79,8	5	1,479	12	799,0	27
20	0,0456	3	80,3	5	1,491	13	796,3	26
30	0,0459	3	80,8	4	1,504	12	793,7	27
40	0,0462	4	81,2	5	1,516	13	791,0	27
50	0,0466	3	81,7	5	1,529	13	788,3	26
60	0,0469	3	82,2	4	1,542	13	785,7	27
70	0,0472	3	82,6	5	1,555	12	783,0	27
80	0,0475	3	83,1	5	1,567	13	780,3	26
90	0,0478	3	83,6	4	1,580	13	777,7	27
700	0,0481	3	84,0	5	1,593	13	775,0	26
10	0,0484	4	84,5	5	1,606	13	772,4	26
20	0,0488	3	85,0	4	1,619	13	769,8	26
30	0,0491	4	85,4	5	1,632	13	767,2	26
40	0,0495	3	85,9	5	1,645	13	764,6	26
50	0,0498	3	86,4	5	1,658	13	762,0	26
60	0,0501	4	86,9	5	1,671	14	759,4	25
70	0,0505	3	87,4	5	1,685	13	756,9	26
80	0,0508	4	87,9	6	1,698	13	754,3	25
90	0,0512	3	88,5	5	1,711	14	751,8	26
800	0,0515	4	89,0	5	1,725	13	749,2	25
10	0,0519	3	89,5	5	1,738	13	746,7	26
20	0,0522	4	90,0	6	1,751	14	744,1	25
30	0,0526	3	90,6	5	1,765	13	741,6	25
40	0,0529	4	91,1	5	1,778	14	739,1	25
50	0,0533	4	91,6	6	1,792	13	736,6	25
60	0,0537	3	92,2	5	1,805	14	734,1	24
70	0,0540	4	92,7	5	1,819	13	731,7	25
80	0,0544	3	93,2	6	1,832	14	729,2	25
90	0,0547	4	93,8	5	1,846	14	726,7	25
900	0,0551	4	94,3	6	1,860	14	724,2	25
10	0,0555	4	94,9	5	1,874	13	721,7	24
20	0,0559	4	95,4	6	1,887	14	719,3	25
30	0,0563	4	96,0	5	1,901	14	716,8	24
40	0,0567	4	96,5	6	1,915	14	714,4	24
50	0,0571	3	97,1	6	1,929	14	712,0	24
60	0,0574	4	97,7	5	1,943	14	709,6	24
70	0,0578	4	98,2	6	1,957	15	707,2	24
80	0,0582	4	98,8	6	1,972	14	704,8	24
90	0,0586	4	99,4	6	1,986	14	702,4	24
1000	0,0590		100,0		2,000		700,0	

V. **Table balistique** (*suite*).

D	J		A		T		u	
1000	0,0590	4	100,0	6	2,000	14	700,0	23
10	0,0594	4	100,6	6	2,014	14	697,7	24
20	0,0598	4	101,2	6	2,028	14	695,3	23
30	0,0602	4	101,8	6	2,042	15	693,0	24
40	0,0606	4	102,4	6	2,057	14	690,6	23
50	0,0610	4	103,0	7	2,071	15	688,3	23
60	0,0614	4	103,7	6	2,086	15	686,0	21
70	0,0618	5	104,3	6	2,101	14	683,6	23
80	0,0623	4	104,9	6	2,115	15	681,3	23
90	0.0627	4	105,5	7	2,130	14	679,0	22
1100	0,0631	4	106,2	6	2,144	14	676,8	22
10	0,0635	5	106,8	7	2,158	15	674,6	23
20	0,0640	4	107,5	6	2,173	15	672,3	23
30	0,0644	5	108,1	7	2,188	15	670,0	23
40	0,0649	4	108,8	4	2,203	15	667,7	23
50	0,0653	4	109,4	7	2,218	15	665,4	22
60	0,0657	5	110,1	6	2,233	15	663,2	23
70	0,0662	4	110,7	7	2,248	16	660,9	23
80	0,0666	5	111,4	7	2,264	15	658,6	22
90	0,0671	4	112,1	7	2,279	15	656,4	22
1200	0,0675	5	112,8	7	2,294	15	654,2	23
10	0,0680	5	113,5	7	2,315	15	651,9	22
20	0,0685	4	114,2	7	2,325	15	649,7	22
30	0,0689	5	114,9	7	2,341	15	647,5	22
40	0,0694	5	115,6	7	2,356	16	645,3	22
50	0,0699	5	116,3	7	2,372	16	643,1	22
60	0,0704	5	117,0	7	2,388	16	640,9	22
70	0,0709	5	117,7	8	2,404	16	638,7	22
80	0,0714	5	118,5	7	2,420	16	636,5	22
90	0,0719	4	119,2	7	2,436	16	634,3	22
1300	0,0723	5	119,9	7	2,452	16	632,1	21
10	0,0728	5	120,6	7	2,468	16	630,0	22
20	0,0733	5	121,3	7	2,484	16	627,8	21
30	0,0738	5	122,0	8	2,500	16	625,7	21
40	0,0743	5	122,8	7	2,516	16	623,6	21
50	0,0748	5	123,5	7	2,532	16	621,5	22
60	0,0753	6	124,2	8	2,548	16	619,3	21
70	0,0759	5	125,0	7	2,564	16	617,2	21
80	0,0764	5	125,7	8	2,580	16	615,1	20
90	0,0769	5	126,5	7	2,996	17	613,1	21
1400	0,0774	6	127,2	8	2,613	17	611,0	21
10	0,0780	5	128,0	8	2,630	16	608,9	20
20	0,0785	5	128,8	8	2,646	16	606,9	21
30	0,0790	6	129,6	8	2,662	16	604,8	20
40	0,0796	5	130,4	8	2,678	17	602,8	20
50	0,0801	5	131,2	8	2,695	16	600,8	20
60	0,0806	6	132,0	8	2,711	17	598,8	20
70	0,0812	5	132,8	6	2,728	17	596,8	20
80	0,0817	6	133,6	8	2,745	17	594,8	20
90	0,0823	5	134,4	8	2,762	16	592,8	20
1500	0,0828		135,2		2,778		590,8	

D	J		A		T		u	
1500	0,0828	6	135,2	9	2,778	17	590,8	20
10	0,0834	6	136,1	9	2,795	17	588,8	21
20	0,0840	5	137,0	8	2,812	17	586,7	20
30	0,0845	6	137,8	8	2,829	18	584,7	20
40	0,0851	6	138,6	9	2,847	17	582,7	20
50	0,0857	6	139,5	8	2,664	17	580,7	19
60	0,0863	5	140,3	9	2,881	18	578,8	19
70	0,0868	6	141,2	8	2,899	17	576,9	19
80	0,0874	6	142,0	9	2,916	18	575,0	20
90	0,0880	6	142,9	9	2,934	17	573,0	19
1600	0,0886	6	143,8	8	2,951	17	571,1	19
10	0,0892	6	144,6	9	2,968	17	569,2	19
20	0,0898	6	145,5	9	2,985	17	567,3	19
30	0,0904	7	146,4	9	3,002	18	565,4	19
40	0,0911	6	147,3	9	3,020	18	563,5	20
50	0,0917	6	148,2	9	3,038	18	561,5	19
60	0,0923	6	149,1	10	3,056	18	559,6	19
70	0,0929	7	150,1	9	3,074	18	557,7	19
80	0,0936	6	151,0	10	3,092	18	555,8	19
90	0,0942	6	152,0	9	3,110	18	553,9	19
1700	0,0948	7	152,9	10	3,128	18	552,0	18
10	0,0955	7	153,9	9	3,146	18	550,2	19
20	0,0962	6	154,8	10	3,164	18	548,3	19
30	0,0968	7	151,8	10	3,182	18	546,4	19
40	0,0975	6	156,8	10	3,200	19	544,5	18
50	0,0981	7	157,8	10	3,219	18	552,7	18
60	0,0988	7	158,8	10	3,237	18	540,9	18
70	0,0995	7	159,8	10	3,255	19	539,1	18
80	0,1002	6	160,8	9	3,274	18	537,3	19
90	0,1008	7	161,7	10	3,292	19	535,4	18
1800	0,1015	7	162,7	11	3,311	19	533,6	18
10	0,1022	7	163,8	10	3,330	19	531,8	18
20	0,1029	7	164,8	11	3,349	19	530,0	19
30	0,1036	8	165,9	10	3,368	20	528,1	18
40	0,1044	7	166,9	11	3,388	20	526,3	18
50	0,1051	7	168,0	11	3,408	19	524,5	18
60	0,1058	8	169,1	11	3,427	20	522,7	18
70	0,1066	7	170,2	11	3,447	20	520,9	18
80	0,1073	7	171,3	11	3,467	20	519,1	18
90	0,1080	8	172,4	11	3,487	19	517,3	17
1900	0,1088	7	173,5	10	3,506	20	515,6	18
10	0,1095	7	174,5	11	3,526	19	513,8	18
20	0,1102	8	175,6	11	3,545	19	512,0	17
30	0,1110	7	176,7	11	3,564	20	510,3	17
40	0,1117	8	177,8	11	3,584	20	508,6	17
50	0,1125	7	178,9	12	3,604	19	506,9	17
60	0,1132	8	180,1	11	3,623	19	505,2	17
70	0,1140	7	181,2	11	3,642	19	503,5	17
80	0,1147	8	182,3	12	3,661	20	501,8	17
90	0,1155	8	183,5	12	3,681	20	500,1	17
2000	0,1163		184,7		3,701		498,4	

V. Table balistique (*suite*).

D	J		A		T		u	
2000	0,1163		184,7		3,701		498,4	
10	0,1171	8	185,9	12	3,722	21	496,7	17
20	0,1179	8	187,1	12	3,743	21	495,0	17
30	0,1187	8	188,2	11	3,763	20	493,3	17
40	0,1195	8	189,4	12	3,783	20	491,6	17
50	0,1204	9	190,6	12	3,804	21	490,0	16
60	0,1212	8	191,8	12	3,824	20	488,3	17
70	0,1220	8	193,1	13	3,845	21	486,6	17
80	0,1229	9	194,3	12	3,866	21	485,0	16
90	0,1237	8	195,6	13	3,886	20	483,4	16
2100	0,1245	8	196,8	12	3,906	20	481,8	16
10	0,1253	8	198,0	12	3,927	21	480,2	16
20	0,1262	9	199,3	13	3,947	20	478,5	17
30	0,1270	8	200,5	12	3,968	21	476,9	16
40	0,1279	9	201,7	12	3,989	21	475,3	16
50	0,1288	9	203,0	13	4,010	21	473,7	16
60	0,1296	8	204,3	13	4,031	21	472,1	16
70	0,1305	9	205,6	13	4,053	22	470,4	17
80	0,1315	10	206,9	13	4,075	22	468,8	16
90	0,1324	9	208,2	13	4,097	22	467,2	16
2200	0,1333	9	209,6	14	4,119	22	465,6	16
10	0,1342	9	211,0	14	4,141	22	464,0	16
20	0,1351	9	212,3	13	4,162	21	462,5	15
30	0,1360	9	213,7	14	4,183	21	460,9	16
40	0,1370	10	215,1	14	4,204	21	459,4	15
50	0,1379	9	216,4	13	4,225	21	457,9	15
60	0,1388	9	217,7	13	4,246	21	456,3	16
70	0,1397	9	219,1	14	4,267	21	454,8	15
80	0,1407	10	220,5	14	4,289	22	453,2	16
90	0,1417	10	222,0	15	4,312	23	451,7	15
2300	0,1427	10	223,4	14	4,335	23	450,2	15
10	0,1437	10	224,8	14	4,357	22	448,7	15
20	0,1446	9	226,2	14	4,379	22	447,2	15
30	0,1456	10	227,7	15	4,401	22	445,6	16
40	0,1466	10	229,2	15	4,424	23	444,1	15
50	0,1476	10	230,7	15	4,447	23	442,6	15
60	0,1486	10	232,2	15	4,470	23	441,1	15
70	0,1496	10	233,7	15	4,492	22	439,6	15
80	0,1506	10	235,2	15	4,515	22	438,1	15
90	0,1517	11	236,7	15	4,538	23	436,6	15
2400	0,1527	10	238,2	15	4,560	22	435,1	15
10	0,1537	10	239,7	15	4,583	23	433,6	15
20	0,1548	11	241,2	15	4,606	23	432,1	15
30	0,1558	10	242,7	15	4,630	24	430,6	15
40	0,1569	11	244,3	16	4,653	23	429,2	14
50	0,1580	11	245,9	16	4,677	24	427,8	14
60	0,1590	10	247,5	16	4,701	24	426,3	15
70	0,1601	11	249,1	16	4,724	23	424,8	15
80	0,1611	10	250,7	16	4,747	23	423,4	14
90	0,1622	11	252,2	15	4,770	23	422,0	14
2500	0,1632	10	253,8	16	4,793	23	420,6	14
2500	0,1632		253,8		4,793		420,6	
10	0,1643	11	255,5	17	4,817	24	419,1	15
20	0,1654	11	257,2	17	4,842	25	417,7	14
30	0,1665	11	258,9	17	4,867	25	416,3	14
40	0,1676	11	260,6	17	4,892	25	414,9	14
50	0,1688	12	262,3	17	4,916	24	413,6	13
60	0,1700	12	264,0	17	4,940	24	412,2	14
70	0,1712	12	265,7	17	4,964	24	410,8	14
80	0,1724	12	267,4	17	4,988	24	409,4	14
90	0,1736	12	269,1	17	5,012	24	408,1	13
2600	0,1748	12	270,8	17	5,036	24	406,7	14
10	0,1760	12	272,6	18	5,061	25	405,4	13
20	0,1772	12	274,4	18	5,086	25	404,1	13
30	0,1784	12	276,2	18	5,111	25	402,8	13
40	0,1796	12	278,0	18	5,136	25	401,5	13
50	0,1809	13	279,8	18	5,162	26	400,2	13
60	0,1821	12	281,6	18	5,187	25	398,9	13
70	0,1833	12	283,4	18	5,212	25	397,6	13
80	0,1845	12	285,3	19	5,237	25	396,3	13
90	0,1858	13	287,2	19	5,262	25	395,0	13
2700	0,1870	12	289,0	18	5,287	25	393,8	12
10	0,1883	13	290,8	18	5,312	25	392,6	12
20	0,1895	12	292,7	19	5,337	25	391,4	12
30	0,1908	13	294,6	19	5,363	26	390,1	13
40	0,1921	13	296,5	19	5,388	25	388,9	12
50	0,1934	13	298,4	19	5,414	26	387,7	12
60	0,1947	13	300,3	19	5,440	26	386,5	12
70	0,1960	13	302,3	20	5,465	25	385,3	12
80	0,1973	13	304,2	19	5,490	25	384,1	12
90	0,1987	14	306,1	19	5,515	25	382,9	12
2800	0,2000	13	308,1	20	5,540	25	381,7	12
10	0,2014	14	310,2	21	5,566	26	380,6	11
20	0,2028	14	312,2	20	5,593	27	379,4	12
30	0,2042	14	314,3	21	5,620	27	378,2	12
40	0,2056	14	316,4	21	5,648	28	377,0	12
50	0,2070	14	318,5	21	5,675	27	375,9	11
60	0,2084	14	320,6	21	5,703	28	374,7	12
70	0,2098	14	322,7	21	5,730	27	373,6	11
80	0,2113	15	324,9	22	5,757	27	372,5	11
90	0,2127	14	327,0	21	5,784	27	371,3	12
2900	0,2141	14	329,1	21	5,811	27	370,2	11
10	0,2155	14	331,2	21	5,838	27	369,1	11
20	0,2169	14	333,3	21	5,865	27	368,0	11
30	0,2183	14	335,4	21	5,892	27	366,9	11
40	0,2198	15	337,5	21	5,920	28	365,9	10
50	0,2213	15	339,7	22	5,947	27	364,8	11
60	0,2228	15	341,9	22	5,975	28	363,7	11
70	0,2243	15	344,2	23	6,003	28	362,6	11
80	0,2258	15	346,5	23	6,030	27	361,5	11
90	0,2273	15	348,8	23	6,058	28	360,5	10
3000	0,2288	15	351,1	23	6,085	27	359,4	11

V. Table balistique (*suite*).

D	J		A		T		u		D	J		A		T		u	
3000	0,2288	15	351,1	23	6,085	28	359,4	10	**3500**	0,3158	19	486,3	32	7,574	31	317,0	6
10	0,2303	15	353,4	23	6,113	27	358,4	10	10	0,3177	20	489,5	32	7,605	3	316,4	7
20	0,2318	15	355,7	23	6,140	28	357,4	10	20	0,3197	20	492,7	33	7,637	32	315,7	6
30	0,2333	15	358,0	24	6,168	29	356,4	11	30	0,3217	20	496,0	33	7,669	32	315,1	6
40	0,2348	15	360,4	24	6,197	29	355,3	10	40	0,3237	20	499,3	33	7,701	32	314,5	6
50	0,2363	15	362,8	24	6,226	28	354,3	10	50	0,3257	20	502,6	32	7,733	32	313,9	6
60	0,2378	15	365,2	24	6,254	29	353,3	10	60	0,3277	20	505,8	33	7,765	32	313,3	6
70	0,2393	16	367,6	24	6.283	28	352,3	10	70	0,3297	20	509,1	33	7,797	32	312,7	6
80	0,2409	16	370,0	25	6,311	28	351,3	10	80	0,3317	20	512,4	33	7,829	32	312,1	6
90	0,2425	16	372,5	24	6,339	28	350,3	10	90	0,3337	20	515,7	33	7,861	32	311,5	6
3100	0,2441	17	374,9	25	6,367	29	349,3	10	**3600**	0,3357	20	519,0	33	7.893	32	310,9	6
10	0,2458	17	377,4	25	6,396	29	348,3	9	10	0,3377	20	522,3	34	7,925	32	310,3	5
20	0,2475	17	379,9	24	6,425	28	347,4	10	20	0,3397	21	525,7	34	7,957	32	309,8	5
30	0,2492	16	382,3	25	6,453	29	346,4	10	30	0,3418	20	529,1	34	7,989	32	309,3	6
40	0,2508	17	384,8	24	6.482	29	345,4	9	40	0,3438	21	532,5	34	8,021	33	308,7	6
50	0,2525	16	387,2	24	6,511	29	344,5	9	50	0,3459	20	535,9	35	8,054	32	308,1	5
60	0,2541	17	389,6	25	6,540	30	343,6	10	60	0,3479	21	539,4	35	8,086	32	307,6	6
70	0,2558	17	392,1	26	6,570	29	342,6	9	70	0,3500	20	542,9	35	8,118	32	307,0	5
80	0,2575	16	394,7	27	6,599	29	341,7	10	80	0,3520	20	546,4	35	8,150	33	306,5	6
90	0,2591	17	397,4	26	6,628	30	340,7	9	90	0,3540	21	549,9	35	8.183	33	305,9	5
3200	0,2608	17	400,0	26	6,658	29	339,8	9	**3700**	0,3561	22	553,4	36	8,216	32	305,4	6
10	0,2625	17	402,6	26	6,687	29	338,9	9	10	0,3583	21	557,0	36	8,248	33	304,8	5
20	0,2642	17	405,2	27	6,716	30	338,0	8	20	0,3604	22	560,6	37	8,281	33	304,3	5
30	0,2659	17	407,9	27	6,746	30	337,2	9	30	0,3626	22	564,3	36	8,314	33	303,8	5
40	0,2676	18	410,6	27	6,776	3	336,3	9	40	0,3648	22	567,9	37	8,347	3	303,3	5
50	0,2694	18	413,3	27	6,806	30	335,4	8	50	0,3670	22	571,6	36	8,380	33	302,8	5
60	0,2712	17	416,0	28	6,836	30	334,6	9	60	0,3692	23	575,2	36	8,413	33	302,3	5
70	0,2729	18	418,8	27	6,866	30	333,7	8	70	0,3715	22	578,8	37	8,446	33	301,8	5
80	0,2747	18	421,5	28	6,896	31	332,9	8	80	0,3737	22	582,5	38	8,479	33	301,3	5
90	0,2765	18	424,3	28	6,927	30	332,1	8	90	0,3759	22	586,3	38	8,512	34	300,8	5
3300	0,2783	18	427,1	28	6,957	30	331,3	8	**3800**	0,3781	22	590,1	38	8,546	33	300,3	5
10	0,2801	18	429,9	28	6,987	30	330,5	8	10	0,3803	22	593,9	38	8,579	33	299,8	5
20	0,2819	18	432,7	28	7,017	30	329,7	8	20	0,3825	22	597,7	38	8,612	34	299,3	5
30	0,2837	18	435,5	28	7,047	30	328,9	7	30	0,3847	23	601,5	39	8,646	34	298,8	4
40	0,2855	18	438,3	28	7,077	30	328,2	8	40	0,3870	22	605,4	40	8,680	34	298,4	5
50	0,2873	18	441,1	28	7,107	30	327,4	7	50	0,3892	22	609,4	39	8,714	34	297,9	4
60	0,2891	19	443,9	29	7,137	30	326,7	7	60	0,3914	22	613,3	40	8,748	34	297,5	5
70	0,2910	18	446,8	30	7,167	31	326,0	8	70	0,3936	22	617,3	39	8,782	34	297,0	5
80	0,2928	19	449,8	30	7,198	31	325,2	7	80	0,3958	22	621,2	39	8,816	34	296,5	4
90	0,2947	19	452,8	29	7,229	32	324,5	7	90	0,3980	22	625,1	40	8,850	34	296,1	5
3400	0,2966	19	455,7	30	7,261	32	323,8	7	**3900**	0,4002	22	629,1	40	8,884	34	295,6	5
10	0,2985	19	458,7	31	7,293	31	323,1	7	10	0,4024	22	633,1	39	8,918	34	295,1	4
20	0,3004	20	461,8	30	7,324	31	322,4	7	20	0,4046	22	637,0	40	8,952	34	294,7	4
30	0,3024	19	464,8	31	7,355	31	321,7	7	30	0,4068	22	641,0	4	8,986	33	294,3	5
40	0,3043	19	467,9	31	7,386	32	321,0	7	40	0,4090	22	645	4	9,019	34	293,8	4
50	0,3062	19	471,0	30	7,418	31	320,3	7	50	0,4112	23	649	4	9,053	34	293,4	4
60	0,3081	19	474,0	30	7,449	31	319,6	6	60	0,4135	22	653	4	9,087	34	293,0	5
70	0,3100	19	477,0	31	7,480	31	319,0	7	70	0,4157	23	657	5	9,121	34	292,5	4
80	0,3119	19	480,1	31	7,511	3	318,3	6	80	0,4180	23	662	4	9,155	34	292,1	4
90	0,3138	20	483,2	31	7,542	32	317,7	7	90	0,4203	23	666	4	9,189	34	291,7	4
3500	0,3158		486,3		7,574		317,0		**4000**	0,4226		670		9,223		291,3	

V. **Table balistique** (*suite*).

D	J		A		T		u	
4000	0,4226	23	670	4	9,223	35	291,3	4
10	0,4249	23	674	4	9,258	35	290.9	5
20	0,4272	23	678	5	9,293	34	290,4	4
30	0,4295	24	683	4	9,327	35	290,0	4
40	0,4319	24	687	4	9,362	35	289,6	4
50	0,4343	23	691	5	9,397	34	289,2	4
60	0,4366	23	696	4	9,431	34	288,8	4
70	0,4389	24	700	5	9,465	35	288,4	4
80	0,4413	24	705	4	9,500	35	288,0	4
90	0,4437	24	709	4	9,535	34	287,6	3
4100	0,4461	24	713	5	9,569	35	287,3	4
10	0,4485	23	718	4	9,604	35	286,9	4
20	0,4508	24	722	5	9,639	34	286,5	4
30	0,4532	24	727	4	9,673	35	286,1	4
40	0,4556	24	731	5	9,708	35	285,7	4
50	0,4580	24	736	5	9,743	36	285,3	4
60	0,4604	24	741	4	9,779	36	284,9	4
70	0,4628	24	745	5	9,815	35	284,5	3
80	0,4652	25	750	5	9,850	35	284,2	4
90	0,4677	24	755	4	9,885	35	283,8	4
4200	0,4701	24	759	5	9,920	36	283,4	3
10	0,4725	24	764	5	9,956	35	283,1	4
20	0,4749	25	769	5	9,991	35	282,7	4
30	0,4774	25	774	4	10,026	35	282,3	4
40	0,4799	25	778	5	10,061	35	281,9	3
50	0,4824	24	783	5	10.096	35	281,6	3
60	0.4848	25	788	4	10,131	36	281,3	4
70	0,4873	25	792	5	10,167	35	280,9	3
80	0,4898	24	797	5	10,202	35	280,6	4
90	0,4922	25	802	5	10,237	36	280,2	3
4300	0,4947	25	807	5	10,273	35	279,9	4
10	0,4972	25	812	5	10,308	36	279,5	3
20	0,4997	26	817	5	10,344	36	279,2	4
30	0,5023	26	822	5	10,380	36	278,8	3
40	0,5049	26	827	5	10,416	36	278,5	4
50	0,5075	26	832	6	10,452	36	278,1	4
60	0,5101	25	838	5	10,488	36	277,7	3
70	0,5126	25	843	5	10,524	36	277,4	4
80	0,5151	26	848	5	10,560	37	277,0	3
90	0,5177	26	853	5	10,597	36	276,7	3
4400	0,5203	25	858	5	10,633	36	276,4	3
10	0,5228	26	863	6	10,669	36	276,1	4
20	0,5254	26	869	5	10,705	36	275,7	3
30	0,5280	26	874	5	10,741	36	275,4	4
40	0,5306	25	879	5	10,777	36	275,0	3
50	0,5331	26	884	6	10,813	36	274,7	4
60	0,5357	26	890	5	10,849	37	274,3	3
70	0,5383	27	895	6	10,886	36	274,0	3
80	0,5410	27	901	5	10,922	37	273,7	4
90	0,5437	27	906	6	10,959	37	273,3	3
4500	0,5464		912		10,996		273.0	

D	J		A		T		u	
4500	0,5464	27	912	5	10,996	37	273,0	4
10	0,5491	27	917	6	11,033	37	272,6	3
20	0,5518	26	923	5	11,070	37	272,3	3
30	0,5544	27	928	6	11,107	37	272,0	4
40	0,5571	26	934	5	11,144	37	271,6	3
50	0,5597	26	939	6	11,181	37	271,3	3
60	0,5623	27	945	6	11,218	37	271,0	3
70	0,5650	26	951	5	11,255	37	270,7	4
80	0,5676	26	956	6	11,292	37	270,3	3
90	0,5702	27	962	6	11,329	37	270,0	3
4600	0,5729	27	968	5	11,366	36	269,7	4
10	0,5756	27	973	6	11,402	37	269,3	3
20	0,5783	27	979	6	11,439	37	269,0	3
30	0,5810	27	985	5	11,476	37	268,7	3
40	0,5837	27	990	6	11,513	37	268,4	3
50	0,5864	27	996	6	11,550	37	268,1	3
60	0,5891	27	1002	6	11,587	37	267,8	4
70	0,5918	28	1008	6	11,624	37	267,4	3
80	0,5946	28	1014	6	11,661	38	267,1	4
90	0,5974	27	1020	6	11,699	38	266,7	3
4700	0,6001	28	1026	6	11,737	38	266,4	3
10	0,6029	28	1032	6	11,775	38	266,1	3
20	0,6057	28	1038	6	11,813	38	265,8	3
30	0,6085	28	1044	6	11,851	38	265,5	3
40	0,6113	29	1050	7	11,889	38	265,2	3
50	0,6142	28	1057	6	11,927	38	264,9	3
60	0,6170	28	1063	6	11,965	38	264,6	4
70	0,6198	29	1069	6	12,003	38	264,2	3
80	0,6227	29	1075	6	12,041	38	263,9	3
90	0,6256	29	1081	7	12,079	38	263,6	3
4800	0,6285	28	1088	6	12,117	39	263,3	3
10	0,6313	29	1094	6	12,156	38	263,0	3
20	0,6342	29	1.100	7	12,194	38	262,7	4
30	0,6371	29	1107	6	12,232	38	262,3	3
40	0,6400	28	1113	6	12,270	38	262,0	3
50	0,6428	28	1119	7	12,308	38	261,7	3
60	0,6456	29	1126	6	12,346	38	261,4	3
70	0,6485	28	1132	7	12,384	38	261,1	3
80	0,6513	28	1139	6	12,422	38	260,8	3
90	0,6541	29	1145	7	12,460	38	260,5	3
4900	0,6570	28	1152	6	12,498	38	260,2	3
10	0,6598	28	1158	7	12,536	39	259,9	3
20	0,6626	29	1165	6	12,575	39	259,6	3
30	0,6655	29	1171	7	12,614	39	259,3	3
40	0,6684	30	1178	7	12,653	39	259,0	3
50	0,6714	29	1185	7	12,692	38	258,7	3
60	0,6743	30	1192	6	12,730	39	258,4	3
70	0,6773	30	1198	7	12,769	39	258,1	3
80	0.6803	30	1205	7	12,808	39	257,8	3
90	0,6833	30	1212	7	12,847	39	257,5	3
5000	0,6863		1219		12,886		257,2	

V. Table balistique (*suite*).

D	J		A		T		*u*		D	J		A		T		*u*	
5000	0,6863		1219		12,886		257,2		**5500**	0,8435		1601		14,89		243,1	
10	0,6893	30	1226	7	12,925	39	256,9	3	10	0,8468	33	1609	8	14,93	4	242,9	2
20	0,6923	30	1233	7	12,964	39	256,6	3	20	0,8501	33	1618	9	14,97	4	242,6	3
30	0,6953	30	1240	7	13,003	39	256,3	3	30	0,8534	33	1626	8	15,01	4	242,4	2
40	0,6983	30	1247	7	13,042	39	256,0	3	40	0,8567	33	1635	9	15,05	4	242,1	3
50	0,7012	29	1254	7	13,081	39	255,7	3	50	0,8601	34	1643	8	15,09	4	241,8	3
60	0,7042	30	1261	7	13,120	39	255,4	3	60	0,8635	34	1652	9	15,13	4	241,6	2
70	0,7072	30	1268	7	13,158	38	255,2	2	70	0,8668	33	1661	9	15,17	4	241,3	3
80	0,7802	30	1275	7	13,197	39	254,9	3	80	0,8702	34	1669	8	15,22	5	241,1	2
90	0,7132	30	1282	7	13,236	39	254,6	3	90	0,8736	34	1678	9	15,26	4	240,8	3
5100	0,7162	30	1289	7	13,275	39	254,3	3	**5600**	0,8770	34	1687	9	15,30	4	240,5	3
10	0,7192	30	1296	7	13,314	39	254,0	3	10	0,8804	34	1696	9	15,34	4	240,3	2
20	0,7222	30	1303	7	13,353	39	253,7	3	20	0,8838	34	1705	9	15,38	4	240,0	3
30	0,7252	30	1310	7	13,392	39	253,4	3	30	0,8872	34	1714	9	15,43	5	239,7	3
40	0,7283	31	1317	7	13,432	40	253,1	3	40	0,8906	34	1723	9	15,47	4	239,5	2
50	0,7313	30	1325	8	13,471	39	252,8	3	50	0,8940	34	1732	9	15,51	4	239,3	2
60	0,7344	31	1332	7	13,510	39	252,5	3	60	0,8974	34	1741	9	15,55	4	239,0	3
70	0,7374	30	1339	7	13,550	40	252,2	3	70	0,9008	34	1750	9	15,59	4	238,7	3
80	0,7405	31	1347	8	13.590	40	251,9	3	80	0,9043	35	1759	9	15,63	4	238,5	2
90	0,7436	31	1354	7	13,630	40	251,7	2	90	0,9077	34	1768	9	15,67	4	238,2	3
5200	0,7467	31	1362	8	13,67	4	251,4	3	**5700**	0,9111	34	1777	9	15,72	5	237,9	3
10	0,7498	31	1369	7	13,71	4	251,1	3	10	0,9146	35	1786	9	15,76	4	237,7	2
20	0,7530	32	1377	8	13,75	4	250,8	3	20	0,9181	35	1795	9	15,80	4	237,4	3
30	0,7561	31	1385	8	13,79	4	250,5	3	30	0,9216	35	1804	9	15,84	4	237,2	2
40	0,7593	32	1392	7	13,83	4	250,2	3	40	0,9251	35	1813	9	15,88	4	236,9	3
50	0,7625	32	1400	8	13,87	4	250,0	2	50	0,9286	35	1823	10	15,93	5	236,7	2
60	0,7657	32	1407	7	13,91	4	249,7	3	60	0,9322	36	1832	9	15,97	4	236,4	3
70	0,7689	32	1415	8	13,95	4	249,4	3	70	0,9357	35	1841	9	16,01	4	236,1	3
80	0,7721	32	1423	8	13,99	4	249,1	3	80	0,9392	35	1851	10	16,05	4	235,9	2
90	0,7753	32	1431	8	14,03	4	248,9	2	90	0,9428	36	1860	9	16,10	5	235,6	3
5300	0,7785	32	1438	7	14,07	4	248,6	3	**5800**	0,9464	36	1870	10	16,14	4	235,4	2
10	0,7817	32	1446	8	14,11	4	248,3	3	10	0,9499	35	1879	9	16,18	4	235,1	3
20	0,7849	32	1454	8	14,15	4	248,0	3	20	0,9534	35	1889	10	16,22	4	234,9	2
30	0,7881	32	1462	8	14,19	4	247,7	3	30	0,9569	35	1898	9	16,27	5	234,6	3
40	0,7913	32	1470	8	14,24	5	247,4	3	40	0,9605	36	1908	10	16,31	4	234,4	2
50	0,7945	32	1478	8	14,28	4	247,2	2	50	0,9641	36	1918	10	16,35	4	234,1	3
60	0,7978	33	1486	8	14,32	4	246,9	3	60	0,9677	36	1927	9	16,39	4	233,9	2
70	0,8010	32	1494	8	14,36	4	246,6	3	70	0,9713	36	1937	10	16,44	5	233,6	3
80	0,8042	32	1502	8	14,40	4	246,3	3	80	0,9750	37	1946	9	16,48	4	233,3	3
90	0,8074	32	1510	8	14,44	4	246,1	2	90	0,9786	36	1956	10	16,52	4	233,1	2
5400	0,8107	33	1518	8	14,48	4	245,8	3	**5900**	0,9823	37	1966	10	16,57	5	232,8	3
10	0,8140	33	1526	8	14,52	4	245,5	3	10	0,9859	36	1976	10	16,61	4	232,6	2
20	0,8172	32	1535	9	14,56	4	245,3	2	20	0,9896	37	1986	10	16,65	4	232,3	3
30	0,8205	33	1543	8	14,60	4	245,0	3	30	0,9932	36	1995	9	16,70	5	232,1	2
40	0,8238	33	1551	8	14,64	4	244,7	3	40	0,9969	37	2005	10	16,74	4	231,8	3
50	0,8271	33	1560	9	14,68	4	244,5	2	50	1,0006	37	2015	10	16,78	4	231,6	2
60	0,8304	33	1568	8	14,72	4	244,2	3	60	1,0043	37	2025	10	16,83	5	231,3	3
70	0,8337	33	1576	8	14,76	4	243,9	3	70	1,0079	36	2036	11	16,87	4	231,1	2
80	0,8370	33	1585	9	14,80	4	243,6	3	80	1,0116	37	2046	10	16,91	4	230,8	3
90	0,8402	32	1593	8	14,85	5	243,4	2	90	1,0153	37	2056	10	16,96	5	230,6	2
5500	0,8435	33	1601	8	14,89	4	243,1	3	**6000**	1,0190	37	2066	10	17,00	4	230,4	2

V. **Table balistique** (*suite*).

D	J	Δ	A	Δ	T	Δ	u	Δ	D	J	Δ	A	Δ	T	Δ	u	Δ
6000	1,0190		2066		17,00		230,4		**6500**	1,214		2624		19,22		218,2	
10	1,0227	37	2077	11	17,04	4	230,1	3	10	1,218	4	2636	12	19,27	5	218,0	2
20	1,0264	37	2087	10	17,09	5	229,8	3	20	1,222	4	2649	13	19,32	5	217,8	2
30	1,0302	38	2097	10	17,13	4	229,6	2	30	1,226	4	2661	12	19,36	4	217,5	3
40	1,0339	37	2108	11	17,17	4	229,4	2	40	1,231	5	2673	12	19,41	5	217,3	2
50	1,0376	37	2118	10	17,22	5	229,1	3	50	1,235	4	2686	13	19,46	5	217,1	2
60	1,0414	38	2128	10	17,26	4	228,9	2	60	1,239	4	2698	12	19,50	4	216,8	3
70	1,0451	37	2139	11	17,31	5	228,6	3	70	1,243	4	2710	12	19,55	5	216,6	2
80	1,0489	38	2150	11	17,35	4	228,3	3	80	1,247	4	2723	13	19,60	5	216,4	2
90	1,0526	37	2160	10	17,39	4	228,1	2	90	1,252	5	2735	12	19,65	5	216,1	3
6100	1,0564	38	2170	10	17,44	5	227,9	2	**6600**	1,256	4	2748	13	19,69	4	215,9	2
10	1,0602	38	2181	11	17,48	4	227,6	3	10	1,260	4	2760	12	19,74	5	215,6	3
20	1,0640	38	2191	10	17,52	4	227,4	2	20	1,264	4	2773	13	19,79	5	215,4	2
30	1,0678	38	2202	11	17,57	5	227,1	3	30	1,269	5	2785	12	19,83	4	215,2	2
40	1,0716	38	2212	10	17,61	4	226,9	2	40	1,273	4	2798	13	19,88	5	215,0	2
50	1,0754	38	2223	11	17,66	5	226,6	3	50	1,277	4	2811	13	19,93	5	214,7	3
60	1,0792	38	2234	11	17,70	4	226,4	2	60	1,281	4	2823	12	19,97	4	214,5	2
70	1,0830	38	2245	11	17,74	4	226,2	2	70	1,285	4	2836	13	20,02	5	214,3	2
80	1,0868	38	2255	10	17,79	5	225,9	3	80	1,290	5	2849	13	20,06	4	214,0	3
90	1,0907	39	2266	11	17,83	4	225,7	2	90	1,294	4	2862	13	20,11	5	213,8	2
6200	1,0946	39	2277	11	17,88	5	225,4	3	**6700**	1,298	4	2875	13	20,16	5	213,6	2
10	1,0985	39	2288	11	17,92	4	225,2	2	10	1,303	5	2888	13	20,21	5	213,4	2
20	1,1024	39	2300	12	17,97	5	225,0	2	20	1,307	4	2901	13	20,25	4	213,1	3
30	1,1063	39	2311	11	18,01	4	224,7	3	30	1,311	4	2915	14	20,30	5	212,9	2
40	1,1102	39	2322	11	18,06	5	224,5	2	40	1,316	5	2928	13	20,34	4	212,7	2
50	1,1141	39	2333	11	18,10	4	224,2	3	50	1,320	4	2941	13	20,39	5	212,4	3
60	1,1180	39	2344	11	18,14	4	224,0	2	60	1,324	4	2954	13	20,43	4	212,2	2
70	1,1219	39	2356	12	18,19	5	223,7	3	70	1,329	5	2967	13	20,48	5	211,9	3
80	1,1259	40	2367	11	18,23	4	223,5	2	80	1,333	4	2980	13	20,53	5	211,7	2
90	1,1298	39	2379	12	18,28	5	223,2	3	90	1,338	5	2994	14	20,58	5	211,5	2
6300	1,1338	40	2390	11	18,32	4	223,0	2	**6800**	1,342	4	3007	13	20,62	4	211,3	2
10	1,1377	39	2402	12	18,37	5	222,7	3	10	1,346	4	3020	13	20,67	5	211,0	3
20	1,1417	40	2413	11	18,41	4	222,5	2	20	1,350	4	3034	14	20,72	5	210,8	2
30	1,1457	40	2425	12	18,46	5	222,3	2	30	1,355	5	3047	13	20,77	5	210,6	2
40	1,1496	39	2436	11	18,50	4	222,0	3	40	1,359	4	3060	13	20,82	5	210,4	2
50	1,1536	40	2448	12	18,55	5	221,8	2	50	1,363	4	3074	14	20,86	4	210,1	3
60	1,1575	39	2459	11	18,59	4	221,5	3	60	1,368	5	3087	13	20,91	5	209,9	2
70	1,1615	40	2471	12	18,64	5	221,3	2	70	1,372	4	3101	14	20,96	5	209,7	2
80	1,1655	40	2482	11	18,68	4	221,0	3	80	1,377	5	3115	11	21,00	4	209,4	3
90	1,170	4	2494	12	18,73	5	220,8	2	90	1,381	4	3129	14	21,05	5	209,2	2
6400	1,174	4	2505	11	18,77	4	220,6	2	**6900**	1,386	5	3143	14	21,10	5	209,0	2
10	1,178	4	2517	12	18,82	5	220,4	2	10	1,390	4	3156	13	21,14	4	208,8	2
20	1,182	4	2528	11	18,86	4	220,1	3	20	1,395	5	3170	14	21,19	5	208,6	2
30	1,186	4	2540	12	18,91	5	219,9	2	30	1,399	4	3184	14	21,24	5	208,3	3
40	1,190	4	2552	12	18,95	4	219,6	3	40	1,404	5	3198	14	21,29	5	208,1	2
50	1,194	4	2564	12	19,00	5	219,4	2	50	1,408	4	3212	14	21,33	4	207,9	2
60	1,198	4	2576	12	19,04	4	219,2	2	60	1,413	5	3226	14	21,38	5	207,7	2
70	1,202	4	2588	12	19,09	5	218,9	3	70	1,417	4	3241	15	21,43	5	207,4	3
80	1,206	4	2600	12	19,13	4	218,7	2	80	1,422	5	3255	14	21,48	5	207,2	2
90	1,210	4	2612	12	19,18	5	218,4	3	90	1,427	5	3269	14	21,53	5	207,0	2
6500	1,214	4	2624	12	19,22	4	218,2	2	**7000**	1,431	4	3283	14	21,58	5	206,8	2

V. **Table balistique** (*suite*).

D	J		A		T		u	
7000	1,431		3283		21,58		206,8	
10	1,436	5	3298	15	21,63	5	206,5	3
20	1,440	4	3312	14	21,68	5	206,3	2
30	1,445	5	3326	14	21,73	5	206,1	2
40	1,450	5	3341	15	21,78	5	205,9	2
50	1,454	4	3356	15	21,83	5	205,6	3
60	1,459	5	3371	15	21,88	5	205,4	2
70	1,464	5	3386	15	21,93	5	205,2	2
80	1,468	4	3400	14	21,97	4	205,0	2
90	1,473	5	3415	15	22,02	5	204,8	2
7100	1,478	5	3430	15	22,07	5	204,5	3
10	1,483	5	3445	15	22,12	5	204,3	2
20	1,488	5	3460	15	22,17	5	204,1	2
30	1,493	5	3475	15	22,22	5	203,9	2
40	1,498	5	3490	15	22,27	5	203,6	3
50	1,502	4	3505	15	22,32	5	203,4	2
60	1,507	5	3520	15	22,37	5	203,2	2
70	1,511	4	3535	15	22,42	5	203,0	2
80	1,516	5	3550	15	22,47	5	202,8	2
90	1,521	5	3565	15	22,51	4	202,6	2
7200	1,525	4	3580	15	22,56	5	202,4	2
10	1,530	5	3595	15	22,61	5	202,1	3
20	1,535	5	3611	16	22,66	5	201,9	2
30	1,540	5	3626	15	22,71	5	201,7	2
40	1,545	5	3642	16	22,76	5	201,5	2
50	1,550	5	3657	15	22,81	5	201,3	2
60	1,555	5	3673	16	22,86	5	201,0	3
70	1,559	4	3688	15	22,91	5	200,8	2
80	1,564	5	3704	16	22,96	5	200,6	2
90	1,569	5	3719	15	23,01	5	200,4	2
7300	1,574	5	3735	16	23,06	5	200,2	2
10	1,579	5	3750	15	23,11	5	200,0	2
20	1,584	5	3766	16	23,16	5	199,8	2
30	1,589	5	3782	16	23,21	5	199,6	2
40	1,594	5	3798	16	23,26	5	199,3	3
50	1,599	5	3814	16	23,31	5	199,1	2
60	1,604	5	3830	16	23,36	5	198,9	2
70	1,609	5	3846	16	23,41	5	198,7	2
80	1,614	5	3862	16	23,45	4	198,4	3
90	1,619	5	3878	16	23,50	5	198,2	2
7400	1,624	5	3894	16	23,55	5	198,0	2
10	1,629	5	3911	17	23,60	5	197,8	2
20	1,634	5	3928	17	23,65	5	197,6	2
30	1,639	5	3944	16	23,70	5	197,4	2
40	1,644	5	3961	17	23,75	5	197,2	2
50	1,649	5	3977	16	23,81	6	197,0	2
60	1,654	5	3994	17	23,86	5	196,8	2
70	1,659	5	4010	16	23,91	5	196,6	2
80	1,664	5	4027	17	23,96	5	196,4	2
90	1,669	5	4043	16	24,01	5	196,1	3
7500	1,675	6	4060	17	24,07	6	195,9	2

D	J		A		T		u	
7500	1,675		4060		24,07		195,9	
10	1,680	5	4077	17	24,12	5	195,7	2
20	1,685	5	4094	17	24,17	5	195,5	2
30	1,690	5	4111	17	24,22	5	195,3	2
40	1,695	5	4128	17	24,27	5	195,1	2
50	1,700	5	4145	17	24,32	5	194,9	2
60	1,706	6	4162	17	24,38	6	194,6	3
70	1,711	5	4179	17	24,43	5	194,4	2
80	1,716	5	4196	17	24,48	5	194,2	2
90	1,721	5	4213	17	24,53	5	194,0	2
7600	1,726	5	4230	17	24,58	5	193,8	2
10	1,731	5	4247	17	24,63	5	193,6	2
20	1,736	5	4265	18	24,69	6	193,4	2
30	1,742	6	4282	17	24,74	5	193,2	2
40	1,747	5	4300	18	24,79	5	193,0	2
50	1,752	5	4317	17	24,84	5	192,8	2
60	1,757	5	4335	18	24,89	5	192,6	2
70	1,762	5	4352	17	24,94	5	192,3	3
80	1,768	6	4370	18	24,99	5	192,1	2
90	1,773	5	4387	17	25,05	6	191,9	2
7700	1,778	5	4405	18	25,10	5	191,7	2
10	1,783	5	4423	18	25,15	5	191,5	2
20	1,789	6	4441	18	25,20	5	191,3	2
30	1,794	5	4459	18	25,25	5	191,1	2
40	1,799	5	4477	18	25,31	6	190,9	2
50	1,805	6	4495	18	25,36	5	190,7	2
60	1,810	5	4513	18	25,41	5	190,5	2
70	1,815	5	4531	18	25,46	5	190,3	2
80	1,821	6	4549	18	25,51	5	190,1	2
90	1,827	6	4567	18	25,57	6	189,9	2
7800	1,832	5	4585	18	25,62	5	189,7	2
10	1,838	6	4604	19	25,67	5	189,5	2
20	1,843	5	4622	18	25,72	5	189,3	2
30	1,848	5	4641	19	25,78	6	189,1	2
40	1,854	6	4659	18	25,83	5	188,8	3
50	1,860	6	4678	19	25,88	5	188,6	2
60	1,865	5	4696	18	25,94	6	188,4	2
70	1,871	6	4715	19	25,99	5	188,2	2
80	1,877	6	4733	18	26,04	5	188,0	2
90	1,882	5	4752	19	26,10	6	187,8	2
7900	1,888	6	4771	19	26,15	5	187,6	2
10	1,893	5	4790	19	26,21	6	187,4	2
20	1,899	6	4809	19	26,26	5	187,2	2
30	1,904	5	4828	19	26,31	5	187,0	2
40	1,910	6	4847	19	26,37	6	186,8	2
50	1,916	6	4866	19	26,42	5	186,6	2
60	1,922	6	4885	19	26,47	5	186,4	2
70	1,927	5	4904	19	26,53	6	186,2	2
80	1,933	6	4923	19	26,58	5	186,0	2
90	1,939	6	4943	20	26,63	5	185,8	2
8000	1,944	5	4962	19	26,69	6	185,6	2

V.

Table balistique (*suite*).

D	J		A		T		u	
8000	1,944	6	4962	20	26,69	5	185,6	2
10	1,950	6	4982	19	26,74	5	185,4	2
20	1,956	5	5001	20	26,79	6	185,2	2
30	1,961	6	5021	19	26,85	5	182,0	2
40	1,967	6	5040	20	26,90	5	184,8	2
50	1,973	6	5060	20	26,95	6	184,6	2
60	1,979	6	5080	20	27,01	5	184,4	2
70	1,985	5	5100	20	27,06	6	184,2	2
80	1,990	6	5120	20	27.12	5	184,0	2
90	1,996	6	5140	21	27,17	6	183,8	2
8100	2,002	6	5161	20	27,23	5	183,6	2
10	2,008	6	5181	20	27,28	6	183,4	2
20	2,014	6	5201	20	27,34	6	183,2	2
30	2,020	6	5221	20	27,40	5	183,0	2
40	2,026	6	5241	21	27,45	5	182,8	2
50	2,032	6	5262	20	27,50	6	182,6	2
60	2,038	6	5282	21	27,56	6	182,4	2
70	2,044	6	5303	20	27,62	5	182,2	2
80	2,050	5	5323	21	27,67	6	182,0	2
90	2,055	6	5344	21	27,73	5	181,8	2
8200	2,061	6	5365	21	27,78	6	181,6	2
10	2,067	6	5386	20	27,84	5	181,4	2
20	2,073	6	5406	21	27,89	6	181,2	2
30	2,079	6	5427	21	27,95	5	181,0	2
40	2,085	6	5448	21	28,00	6	180,8	2
50	2,091	6	5469	21	28,06	5	180,6	2
60	2,097	6	5490	21	28,11	6	180,4	1
70	2,103	6	5511	21	28,17	5	180,3	2
80	2,109	6	5532	21	28,22	6	180,1	2
90	2,115	6	5553	21	28,28	5	179,9	2
8300	2,121	6	5574	21	28,33	6	179,7	2
10	2,127	6	5595	22	28,39	6	179,5	2
20	2,133	6	5617	21	28,45	5	179,3	2
30	2,139	6	5638	22	28,50	6	179,1	2
40	2,145	7	5660	21	28,56	5	178,9	2
50	2,152	6	5681	21	28,61	6	178,7	2
60	2,158	6	5702	22	28,67	5	178,5	2
70	2,164	6	5724	21	28,72	6	178,3	2
80	2,170	7	5745	22	28,78	6	178,1	2
90	2,177	6	5767	22	28,84	5	177,9	1
8400	2,183	6	5789	22	28,89	6	177.8	2
10	2,189	6	5811	22	28,95	5	177,6	2
20	2,195	6	5833	22	29,00	6	177,4	2
30	2,201	6	5855	22	29,06	6	177,2	2
40	2,207	6	5877	22	29,12	5	177,0	2
50	2,213	7	5899	22	29,17	6	176,8	2
60	2,220	6	5921	22	29,23	6	176,6	2
70	2,226	6	5943	22	29,29	5	176,4	2
80	2,232	7	5965	22	29,34	6	176,2	1
90	2,239	6	5987	22	29,40	5	176,1	2
8500	2,245		6009		29,45		175,9	

D	J		A		T		u	
8500	2,245	6	6009	23	29,45	6	175,9	2
10	2,251	7	6032	23	29,51	6	175,7	2
20	2,258	6	6055	23	29,57	6	175,5	2
30	2,264	5	6078	23	29,63	6	175,3	2
40	2,271	6	6101	23	29,69	6	175,1	2
50	2,277	7	6124	23	29,75	6	174,9	2
60	2,284	6	6147	23	29,81	6	174,7	2
70	2,290	7	6170	23	29,87	6	174,5	2
80	2,297	6	6193	23	29,93	6	174,3	2
90	2,303	7	6216	23	29,99	5	174,1	2
8600	2,310	7	6239	23	30,04	6	173,9	2
10	2,317	6	6262	24	30,10	5	173,7	1
20	2,323	7	6286	23	30,15	6	173,6	2
30	2,330	6	6309	24	30,21	6	173,4	2
40	2,336	7	6333	23	30,27	5	173,2	2
50	2,343	6	6356	24	30,32	6	173,0	2
60	2,349	7	6380	23	30,38	6	172,8	2
70	2,356	6	6403	24	30,44	5	172,6	1
80	2,362	7	6427	23	30,49	6	172,5	2
90	2,369	6	6450	24	30,55	6	172,3	2
8700	2,375	7	6474	23	30,61	6	172,1	2
10	2,382	7	6497	24	30,67	5	171,9	2
20	2,389	6	6521	24	30.72	6	171,7	2
30	2,395	7	6545	24	30,78	6	171,5	2
40	2,402	7	6569	24	30,84	6	171,3	2
50	2,409	6	6593	24	30,90	6	171,1	1
60	2,415	7	6617	24	30,96	6	171,0	2
70	2,422	7	6641	24	31,02	6	170,8	2
80	2,429	6	6665	24	31,08	6	170,6	2
90	2,435	7	6689	24	31,14	5	170,4	2
8800	2,442	7	6713	24	31,19	6	170,2	1
10	2,449	7	6737	24	31,25	6	170,1	2
20	2,456	7	6761	25	31,31	6	169,9	2
30	2,463	7	6786	25	31,37	6	169,7	2
40	2,470	7	6811	25	31,43	6	169,5	1
50	2,477	7	6836	25	31,49	6	169,4	2
60	2,484	7	6861	25	31,55	6	169,2	2
70	2,491	6	6886	25	31,61	6	169,0	2
80	2,497	7	6911	25	31,67	6	168,8	2
90	2,504	7	6936	25	31,73	6	168,6	2
8900	2,511	7	6961	25	31,79	6	168,4	1
10	2,518	7	6986	25	31,85	6	168,3	2
20	2,525	7	7011	26	31,91	6	168,1	2
30	2,532	7	7037	25	31,97	6	167,9	2
40	2,539	7	7062	26	32,03	6	167,7	2
50	2,546	7	7088	26	32,09	6	167,5	1
60	2,553	8	7114	25	32,15	6	167,4	2
70	2,561	7	7139	26	32,21	6	167,2	2
80	2,568	7	7165	25	32,27	6	167,0	2
90	2,575	7	7191	25	32,33	5	166,8	2
9000	2,582		7216		32,38		166,6	

V. **Table balistique** (*suite*).

D	J		A		T		u		D	J		A		T		u	
9000	2,582	7	7216	26	32,38	6	166,6	1	**9500**	2,954	8	8597	30	35,46	6	157,9	2
10	2,589	7	7242	26	32,44	6	166,5	2	10	2,962	8	8627	30	35,52	7	157,7	2
20	2,596	7	7268	26	32,50	6	166,3	2	20	2,970	8	8657	30	35,59	6	157,5	1
30	2,603	7	7294	26	32,56	6	166,1	2	30	2,978	8	8687	30	35,65	6	157,4	2
40	2,610	7	7320	26	32,62	6	165,9	2	40	2,986	8	8717	30	35,71	7	157,2	2
50	2,617	7	7346	26	32,68	6	165,7	1	50	2,994	8	8747	30	35,78	6	157,0	2
60	2,624	8	7372	26	32,74	6	165,6	2	60	3,002	8	8777	30	35,84	7	156,8	1
70	2.632	7	7398	27	32,80	6	165,4	2	70	3,010	8	8807	30	35,91	6	156,7	2
80	2,639	7	7425	26	32,86	7	165,2	2	80	3,018	8	8837	30	35,97	7	156,5	1
90	2,646	7	7451	26	32,93	6	165,0	2	90	3,026	8	8867	30	35,04	6	156,4	2
9100	2,653	7	7477	26	32.99	6	164,8	1	**9600**	3,034	8	8897	30	36,10	7	156,2	2
10	2,660	7	7503	27	33,05	6	164,7	2	10	3,042	8	8927	31	36,17	6	156,0	1
20	2,667	8	7530	26	33,11	6	164,5	2	20	3,050	9	8958	31	36,23	7	155,9	2
30	2,675	7	7556	26	33,17	6	164,3	2	30	3,059	8	8989	31	36,30	6	155,7	2
40	2,682	7	7582	27	33,23	6	164,1	2	40	3,067	8	9020	31	36,36	6	155,5	1
50	2,689	7	7609	27	33,29	6	163,9	1	50	3,075	8	9051	31	36,42	7	155,4	2
60	2,696	8	7636	28	33,35	6	163,8	2	60	3,083	9	9082	31	36,49	7	155,2	2
70	2,704	7	7664	28	33,41	6	163,6	2	70	3,092	8	9113	31	36,56	6	155,0	2
80	2,711	7	7692	27	33,47	6	163,4	1	80	3,100	8	9144	31	36,62	7	154,8	1
90	2,718	8	7719	28	33,53	6	163,3	2	90	3,108	8	9175	31	36,69	6	154,7	2
9200	2,726	7	7747	27	33,59	7	163,1	2	**9700**	3,116	9	9206	31	36,75	7	154,5	2
10	2,733	7	7774	28	33,66	6	162,9	2	10	3,125	8	9237	31	36,82	6	154,3	2
20	2,740	8	7802	27	33,72	6	162,7	1	20	3,133	8	9268	31	36,88	6	154,1	2
30	2,748	7	7829	28	33,78	6	162,6	2	30	3,141	8	9299	32	36,94	7	153,9	2
40	2,755	8	7857	27	33,84	6	162,4	2	40	3,149	9	9331	32	37,01	7	153,7	1
50	2,763	7	7884	28	33,90	7	162,2	2	50	3,158	8	9363	32	37,08	6	153,6	2
60	2,770	8	7912	28	33,97	6	162,0	2	60	3,166	8	9395	32	37,14	6	153,4	1
70	2,778	7	7940	28	34,03	6	161,8	2	70	3,174	9	9427	32	37,20	7	153,3	2
80	2,785	8	7968	28	34,09	6	161,6	2	80	3,183	8	9459	32	37,27	7	153,1	2
90	2,793	7	7996	28	34,15	6	161,4	1	90	3,191	8	9491	31	37,34	6	152,9	1
9300	2,800	8	8024	29	34.21	6	161,3	2	**9800**	3,199	9	9522	32	37,40	7	152,8	2
10	2,808	7	8053	28	34,27	7	161,1	2	10	3,208	8	9554	32	37,47	6	152,6	2
20	2,815	8	8081	28	34,34	6	160,9	1	20	3,216	9	9586	32	37,53	7	152,4	1
30	2,823	8	8109	28	34,40	6	160,8	2	30	3,225	9	9618	32	37,60	7	152,3	2
40	2,831	8	8137	28	34,46	6	160,6	2	40	3,234	8	9650	32	37,67	6	152,1	1
50	2,839	7	8165	29	34,52	6	160,4	1	50	3,242	9	9682	33	37,73	6	152,0	2
60	2,846	8	8194	28	34,58	7	160,3	2	60	3,251	8	9715	33	37,79	7	151,8	2
70	2,854	7	8222	28	34,65	6	160,[illegible]	2	70	3,259	9	9748	33	37,86	6	151,6	1
80	2,861	8	8250	29	34,71	6	159,9	1	80	3,268	8	9781	32	37,92	7	151,5	2
90	2,869	8	8279	29	34,77	6	159,8	2	90	3,276	9	9813	33	37,99	7	151,3	1
9400	2,877	8	8308	29	34,83	7	159,6	2	**9900**	3,285	8	9846	32	38,06	6	151,2	2
10	2,885	7	8337	28	34,90	6	159,4	1	10	3,293	9	0878	33	38,12	7	151,0	1
20	2,892	8	8365	29	34,96	6	159,3	2	20	3,302	8	9911	33	38,19	7	150,9	2
30	2,900	8	8394	29	35,02	6	159,1	2	30	3,310	9	9944	33	38,26	6	150,7	2
40	2,908	8	8423	29	35,08	7	158,9	2	40	3,319	8	9977	33	38,32	7	150,5	1
50	2,916	8	8452	29	35,15	6	158,7	1	50	3,327	9	10010	33	38,39	6	150,4	2
60	2,924	7	8181	29	35,21	6	158,6	2	60	3,336	9	10043	33	38,45	7	150,2	2
70	2,931	8	8510	29	35,27	6	158,4	2	70	3,345	8	10076	34	38,52	6	150.0	1
80	2,939	7	8539	29	35,33	6	158,2	2	80	3,353	9	10110	34	38,58	7	149,9	2
90	2,946	8	8568	29	35,39	7	158,0	1	90	3,362	8	10144	34	38,65	7	149,7	1
9500	2,954		8597		35,46		157,9		**10000**	3,370		10178		38,72		149,6	

V. Table balistique (*suite*).

D	J		A		T		*u*		D	J		A		T		*u*	
10000	3,370	9	10178	34	38,72	6	149,6	2	**10500**	3,835	10	11980	39	42,16	7	141,7	2
10	3,379	9	10212	34	38,78	7	149,4	2	10	3,845	10	12019	38	42,23	7	141,5	1
20	3,388	9	10246	34	38,85	7	149,2	1	20	3,855	10	12057	39	12,30	7	141,4	2
30	3,397	9	10280	34	38,92	7	149,1	2	30	3,865	9	12096	38	42,37	7	141,2	1
40	3,406	9	10314	34	38,99	6	148,9	1	40	3,874	10	12134	38	42,44	7	141,1	2
50	3,415	8	10348	34	39,05	7	148,8	2	50	3,884	10	12172	38	42,51	7	140,9	2
60	3,423	9	10382	35	39,12	6	148,6	1	60	3,894	10	12210	39	42,58	7	140,7	1
70	3,432	9	10417	34	39,18	7	148,5	2	70	3,904	10	12249	39	42,65	7	140,6	1
80	3,441	9	10451	34	39,25	7	148,3	2	80	3,914	10	12288	39	42,72	8	140,5	2
90	3,450	10	10485	35	39,32	7	148,1	1	90	3,924	10	12327	39	42,80	7	140,3	2
10100	3,460	9	10520	35	39,39	7	148,0	2	**10600**	3,934	9	12366	39	42,87	7	140,1	1
10	3,469	9	10555	35	39,46	7	147,8	1	10	3,943	10	12405	40	42,94	7	140,0	1
20	3,478	9	10590	35	39,53	6	147,7	2	20	3,953	10	12445	40	43,01	7	139,9	2
30	3,487	10	10625	35	39,59	7	147,5	2	30	3,963	10	12485	40	43,08	7	139,7	2
40	3,497	9	10660	35	39,66	7	147,3	1	40	3,973	10	12525	40	43,15	7	139,5	1
50	3,506	9	10695	36	39,73	7	147,2	2	50	3,983	11	12565	40	43,22	7	139,4	2
60	3,515	9	10731	35	39,80	7	147,0	1	60	3,994	10	12605	40	43,29	7	139,2	1
70	3,524	9	10766	35	39,87	6	146,9	2	70	4,004	10	12645	40	43,36	8	139,1	2
80	3,533	9	10801	35	39,93	7	146,7	1	80	4,014	11	12685	40	43,44	7	138,9	1
90	3,542	9	10836	36	40,00	7	146,6	2	90	4,025	10	12725	40	43,51	8	138,8	2
10200	3,551	9	10872	35	40,07	7	146,4	2	**10700**	4,035	10	12765	41	43,59	7	138,6	1
10	3,560	9	10907	35	40,14	7	146,2	2	10	4,045	10	12806	40	43,66	7	138,5	2
20	3,569	9	10942	36	40,21	7	146,0	1	20	4,055	10	12846	40	43,73	7	138,3	1
30	3,578	10	10978	36	40,28	7	145,9	2	30	4,065	11	12886	40	43,80	7	138,2	1
40	3,588	9	11014	36	40,35	6	145,7	1	40	4,076	10	12926	41	43,87	7	138,1	2
50	3,597	9	11050	36	40,41	7	145,6	2	50	4,086	10	12967	41	43,94	8	137,9	2
60	3,606	9	11086	36	40,48	7	145,4	1	60	4,096	11	13008	41	44,02	7	137,7	1
70	3,615	10	11122	37	40,55	7	145,3	2	70	4,107	10	13049	41	44,09	7	137,6	2
80	3,625	9	11159	36	40,62	7	145,1	2	80	4,117	11	13090	42	44,16	7	137,4	1
90	3,634	10	11195	36	40,69	7	144,9	1	90	4,128	10	13132	41	44,23	8	137,3	2
10300	3,644	9	11231	37	40,76	6	144,8	2	**10800**	4,138	11	13173	42	44,31	7	137,1	1
10	3,653	9	11268	36	40,82	7	144,6	1	10	4,149	10	13215	41	44,38	7	137,0	2
20	3,662	9	11304	36	40,89	7	144,5	2	20	4,159	10	13256	41	44,45	8	136,8	1
30	3,671	10	11340	37	40,96	7	144,3	2	30	4,169	11	13297	41	44,53	7	136,7	1
40	3,681	9	11377	36	41,03	7	144,1	1	40	4,180	10	13338	41	44,60	7	136,6	2
50	3,690	10	11413	37	41,10	7	141,0	2	50	4,190	10	13379	41	44,67	8	136,4	1
60	3,700	9	11450	37	41,17	7	143,8	1	60	4,200	11	13420	42	44,75	7	136,3	2
70	3,709	10	11487	37	41,24	7	143,7	2	70	4,211	10	13462	42	44,82	7	136,1	1
80	3,719	10	11524	37	41,31	7	143,5	1	80	4,221	11	13504	43	44,89	7	136,0	2
90	3,729	9	11561	38	41,38	7	143,4	2	90	4,232	10	13547	43	44,96	8	135,8	1
10400	3,738	10	11599	38	41,45	7	143,2	1	**10900**	4,242	10	13590	43	45,04	7	135,7	2
10	3,748	9	11637	38	41,52	7	143,1	2	10	4,252	11	13633	43	45,11	7	135,5	1
20	3,757	10	11675	38	41,59	7	142,9	1	20	4,263	11	13676	43	45,18	8	135,4	1
30	3,767	10	11713	38	41,66	7	142,8	2	30	4,274	11	13719	43	45,26	7	135,3	2
40	3,777	9	11751	38	41,73	7	142,6	2	40	4,285	11	13762	43	45,33	7	135,1	2
50	3,786	10	11789	38	41,80	7	112,4	1	50	4,296	11	13805	43	45,40	8	134,9	1
60	3,796	10	11827	38	41,87	7	142,3	2	60	4,307	11	13848	43	45,48	7	134,8	1
70	3,806	9	11865	38	41,94	8	142,1	1	70	4,318	11	13891	44	45,55	8	134,7	2
80	3,815	10	11903	38	42,02	7	142,0	2	80	4,329	11	13935	43	45,63	7	134,5	2
90	3,825	10	11941	39	42,09	7	141,8	1	90	4,340	11	13978	43	45,70	7	134,3	1
10500	3,835		11980		42,16		141,7		**11000**	4,351		14021		45,77		134,2	

V. **Table balistique** (*suite*).

D	J		A		T		u	
11000	4,351	10	14021	44	45,77	8	134,2	1
10	4,361	11	14065	44	45,85	8	134,1	2
20	4,372	11	14109	44	45,93	7	133,9	1
30	4,383	12	14153	44	46,00	7	133,8	1
40	4,395	11	14197	44	46,07	8	133,7	2
50	4,406	11	14241	44	46,15	7	133,5	1
60	4,417	11	14285	44	46,22	8	133,4	2
70	4,428	11	14329	44	46,30	7	133,2	1
80	4,439	11	14373	45	46,37	8	133,1	2
90	4,450	12	14418	44	46,45	8	132,9	1
11100	4,462	11	14462	45	46,53	7	132,8	2
10	4,473	11	14507	45	46,60	8	132,6	1
20	4,484	11	14552	44	46,68	7	132,5	1
30	4,495	11	14596	45	46,75	8	132,4	2
40	4,506	11	14641	45	46,83	7	132,2	1
50	4,517	12	14686	45	46,90	8	132,1	2
60	4,529	11	14731	46	46,98	8	131,9	1
70	4,540	11	14777	46	47,06	7	131,8	2
80	4.551	12	14823	46	47,13	8	131,6	1
90	4,563	11	14869	46	47,21	8	131,5	1
11200	4,574	11	14915	46	47,29	7	131,4	2
10	4,585	12	14961	46	47,36	8	131,2	1
20	4,597	11	15007	46	47,44	8	131,1	2
30	4,608	12	15053	46	47,52	7	130,9	1
40	4,620	11	15099	46	47,59	8	130,8	1
50	4,631	12	15145	47	47,67	8	130,7	2
60	4,643	12	15192	46	47,75	7	130,5	1
70	4,655	11	15238	47	47,82	8	130,4	1
80	4,666	12	15285	46	47,90	8	130,3	2
90	4,678	11	15331	47	47,98	7	130,1	2
11300	4,689	12	15378	47	48,05	8	129,9	1
10	4,701	11	15425	47	48,13	8	129,8	1
20	4,712	12	15472	47	48,21	7	129.7	2
30	4,724	12	15519	47	48,28	8	129,5	1
40	4,736	12	15566	47	48,36	8	129,4	1
50	4,748	11	15613	47	48,44	7	129,3	2
60	4,759	11	15660	47	48,51	8	129,1	1
70	4,770	12	15707	48	48,59	8	129.0	2
80	4,782	12	15755	48	48,67	7	128,8	1
90	4,794	12	15803	48	48,74	8	128,7	1
11400	4,806	12	15851	48	48,82	8	128,6	2
10	4,818	12	15899	48	48,90	8	128,4	1
20	4,830	12	15947	49	48,98	7	128,3	2
30	4,842	12	15996	48	49,05	8	128,1	1
40	4,854	12	16044	49	49,13	8	128,0	1
50	4,866	12	16093	48	49,21	8	127,9	2
60	4,878	12	16141	49	49,29	8	127,7	1
70	4,890	12	16190	48	49,37	7	127,6	2
80	4,902	12	16238	49	49,44	8	127,4	1
90	4,914	12	16287	49	49,52	8	127,3	1
11500	4,926		16336		49,60		127,2	

D	J		A		T		u	
11500	4,926	12	16336	49	49,60	8	127,2	1
10	4,938	12	16385	49	49,68	8	127,1	2
20	4,950	12	16434	50	49,76	8	126,9	1
30	4,962	12	16484	50	49,84	8	126,8	1
40	4,974	12	16534	50	49,92	8	126,7	2
50	4,986	13	16584	50	50,00	8	126,5	1
60	4,999	13	16634	50	50,08	7	126,4	1
70	5,012	12	16684	50	50,15	8	126,3	2
80	5,024	13	16734	51	50,23	8	126,1	1
90	5.037	12	16785	51	50,31	8	126,0	2
11600	5,049	13	16836	50	50,39	8	125,8	1
10	5,062	12	16886	51	50,47	8	125,7	1
20	5,074	12	16937	51	50,55	8	125,6	2
30	5,086	13	16988	50	50,63	8	125,4	1
40	5,099	12	17038	51	50,71	8	125,3	1
50	5,111	13	17089	51	50,79	8	125,2	2
60	5,124	12	17140	52	50,87	8	125,0	1
70	5.136	13	17192	52	50,95	8	124,9	2
80	5,149	13	17244	51	51,03	8	124,7	1
90	5,162	12	17295	52	51,11	8	124,6	1
11700	5,174	13	17347	52	51,19	8	124,5	2
10	5,187	13	17399	52	51,27	8	124,3	1
20	5,200	13	17451	52	51,35	9	124,2	1
30	5,213	13	17503	52	51,44	8	124,1	2
40	5,226	12	17555	53	51,52	8	123,9	1
50	5,238	13	17608	53	51,60	8	123,8	1
60	5,251	13	17661	52	51,68	8	123,7	2
70	5,264	13	17713	53	51,76	8	123,5	1
80	5,277	13	17766	53	51,84	8	123,4	1
90	5.290	13	17819	52	51,92	8	123,3	2
11800	5,303	12	17871	53	52,00	8	123,1	1
10	5,315	13	17924	53	52,08	8	123,0	1
20	5,328	13	17977	53	52,16	8	122,9	2
30	5,341	13	18030	54	52,24	8	122,7	1
40	5,354	13	18084	53	52,32	9	122,6	1
50	5,367	13	18137	53	52,41	8	122,5	2
60	5,380	13	18190	54	52,49	8	122,3	1
70	5,393	13	18244	54	52,57	8	122,2	1
80	5,406	13	18298	54	52,65	8	122,1	2
90	5,419	14	18352	54	52,73	8	121,9	1
11900	5,433	13	18406	54	52,81	8	121,8	1
10	5,446	13	18460	55	52,89	9	121,7	1
20	5,459	14	18515	55	52,98	8	121,6	1
30	5,473	13	18570	55	53,06	8	121,5	2
40	5,486	14	18625	55	53,14	8	121,3	1
50	5,500	13	18680	55	53,22	9	121,2	1
60	5,513	14	18735	55	53,31	8	121,1	2
70	5,527	13	18790	56	53,39	8	120,9	1
80	5,540	14	18846	56	53,47	9	120,8	2
90	5,554	14	18902	55	53,56	9	120,6	1
12000	5,568		18957		53,65		120,5	

V. **Table balistique** (*suite*).

D	J		A		T		u		D	J		A		T		u	
12000	5,568	13	18957	56	53,65	8	120,5	1	12500	6,280	15	21917	62	57,91	9	114,2	1
10	5,581	14	19013	55	53,73	8	120,4	1	10	6,295	16	21979	63	58,00	8	114,1	2
20	5,595	13	19068	56	53,81	9	120,3	2	20	6,311	15	22042	63	58,08	9	113,9	1
30	5,608	14	19124	56	53,90	8	120,1	1	30	6,326	15	22105	63	58,17	9	113,8	1
40	5,622	14	19180	57	53,98	8	120,0	1	40	6,341	15	22168	64	58,26	9	113,7	1
50	5,636	13	19237	57	54,06	9	119,9	2	50	6,356	15	22232	63	58,35	9	113,6	1
60	5,649	14	19294	57	54,15	8	119,7	1	60	6,371	15	22295	63	58,44	8	113,5	2
70	5,663	14	19351	57	54,23	9	119,6	1	70	6,386	16	22358	64	58,52	9	113,3	1
80	5,677	14	19408	57	54,32	8	119,5	2	80	6,402	15	22422	64	58,61	9	113,2	1
90	5,691	14	19465	57	54,40	8	119,3	1	90	6,417	15	22486	64	58,70	9	113,1	2
12100	5,705	14	19522	57	54,48	9	119,2	1	12600	6,432	16	22550	61	58,79	9	112,9	1
10	5,719	13	19579	58	54,57	8	119,1	2	10	6,448	16	22614	65	58,88	8	112,8	1
20	5,732	14	19637	58	54,65	9	118,9	1	20	6,464	16	22679	65	58,96	9	112,7	1
30	5,746	14	19695	58	54,74	8	118,8	1	30	6,480	16	22744	65	59,05	9	112,6	1
40	5,760	14	19753	58	54,82	9	118,7	2	40	6,496	16	22809	65	59,14	9	112,5	2
50	5,774	14	19811	58	54,91	8	118,5	1	50	6,512	15	22874	65	59,23	9	112,3	1
60	5,788	14	19869	58	54,99	8	118,4	1	60	6,527	15	22939	66	59,32	9	112,2	1
70	5,802	14	19927	58	55,07	9	118,3	1	70	6,542	15	23005	66	59,41	9	112,1	1
80	5,816	14	19985	58	55,16	9	118,2	1	80	6,557	16	23071	66	59,50	9	112,0	1
90	5,830	14	20043	58	55,25	8	118,1	2	90	6,573	16	23137	66	59,69	9	111,9	2
12200	5,844	14	20101	59	55,33	9	117,9	1	12700	6,589	15	23203	66	59,68	9	111,7	1
10	5,858	15	20160	59	55,42	8	117,8	1	10	6,604	16	23269	66	59,77	8	111,6	1
20	5,873	14	20219	58	55,50	9	117,7	2	20	6,620	16	23335	67	59,85	9	111,5	1
30	5,887	14	20277	58	55,59	8	117,5	1	30	6,636	16	23402	66	59,94	9	111,4	1
40	5,901	15	20335	59	55,67	8	117,4	1	40	6,652	16	23468	66	60,03	9	111,3	1
50	5,916	14	20394	59	55,75	9	117,3	1	50	6,668	16	23534	67	60,12	9	111,2	2
60	5,930	14	20453	59	55,84	8	117,2	1	60	6,684	16	23601	67	60,21	9	111,0	1
70	5,944	14	20512	60	55,92	9	117,1	2	70	6,700	16	23668	67	60,30	9	110,9	1
80	5,958	15	20572	59	56,01	9	116,9	1	80	6,716	16	23735	67	60,39	9	110,8	1
90	5,973	14	20631	59	56,10	8	116,8	1	90	6,732	16	23802	68	60,48	9	110,7	1
12300	5,987	14	20690	60	56,18	9	116,7	2	12800	6,748	16	23870	68	60,57	9	110,6	2
10	6,001	15	20750	60	56,27	8	116,5	1	10	6,764	16	23938	67	60,66	9	110,4	1
20	6,016	14	20810	60	56,35	9	116,4	1	20	6,780	16	24005	67	60,75	9	110,3	1
30	6,030	14	20870	60	56,44	8	116,3	1	30	6,796	16	24072	68	60,84	9	110,2	1
40	6,044	15	20930	60	56,52	9	116,2	2	40	6,812	16	24140	68	60,93	10	110,1	2
50	6,059	14	20990	61	56,61	8	116,0	1	50	6,828	16	24208	69	61,03	9	109,9	1
60	6,073	15	21051	61	56,69	9	115,9	1	60	6,844	17	24277	68	61,12	9	109,8	1
70	6,088	15	21112	61	56,78	8	115,8	1	70	6,861	16	24345	69	61,21	9	109,7	1
80	6,103	15	21173	61	56,86	9	115,7	2	80	6,877	17	24414	68	61,30	9	109,6	1
90	6,118	15	21234	62	56,95	9	115,5	1	90	6,894	16	24482	69	61,39	9	109,5	1
12400	6,133	15	21296	61	57,04	8	115,4	1	12900	6,910	16	24551	68	61,48	9	109,4	2
10	6,148	15	21357	62	57,12	9	115,3	1	10	6,926	17	24619	69	61,57	9	109,2	1
20	6,163	14	21419	62	57,21	9	115,2	2	20	6,943	16	24688	70	61,66	9	109,1	1
30	6,177	15	21481	62	57,30	8	115,0	1	30	6,959	17	24758	69	61,75	9	109,0	1
40	6,192	15	21543	62	57,38	9	114,9	1	40	6,976	16	24827	70	61,84	10	108,9	1
50	6,207	15	21605	62	57,47	9	114,8	1	50	6,992	17	24897	70	61,94	9	108,8	2
60	6,222	14	21667	63	57,56	8	114.7	2	60	7,009	17	24967	70	62,03	9	108,6	1
70	6,236	15	21730	62	57,64	9	114,5	1	70	7,026	16	25037	71	62,12	9	108,5	1
80	6,251	15	21792	62	57,73	9	114,4	1	80	7,042	17	25108	71	62,21	10	108,4	1
90	6,266	14	21854	63	57,82	9	114,3	1	90	7,059	17	25179	71	62,31	9	108,3	1
12500	6,280		21917		57,91		114,2		13000	7,076		25250		62,40		108,2	

V. Table balistique (*suite*).

D	J		A		T		*u*	
13000	7,076	17	25250	71	62,40	9	108,2	1
10	7,093	16	25331	71	62,49	10	108,1	2
20	7,109	17	25392	72	62,59	9	107,9	1
30	7,126	17	25464	72	62,68	9	107,8	1
40	7,143	17	25536	72	62,77	10	107,7	1
50	7,160	17	25608	71	62,87	9	107,6	1
60	7,177	17	25679	72	62,96	9	107,5	1
70	7,194	17	25751	72	63,05	9	107,4	2
80	7,211	17	25823	72	63,14	10	107,2	1
90	7,228	17	25895	72	63,24	9	107,1	1
13100	7,245	18	25967	73	63,33	9	107,0	1
10	7,263	17	26040	73	63,42	10	106,9	1
20	7,280	17	26113	73	63,52	9	106,8	1
30	7,297	18	26186	73	63,61	10	106,7	1
40	7 315	17	26259	73	63,71	9	106,6	2
50	7,332	17	26332	74	63,80	10	106,4	1
60	7,349	18	26406	73	63,90	9	106,3	1
70	7,367	17	26479	73	63,99	9	106,2	1
80	7,384	18	26552	74	64,08	10	106,1	1
90	7,402	17	26626	74	64,18	9	106,0	1
13200	7,419	18	26700	75	64,27	10	105,9	1
10	7,437	18	26775	75	64,37	9	105,8	2
20	7,455	17	26850	74	64,46	10	105,6	1
30	7,472	18	26924	75	64,56	9	105,5	1
40	7,490	17	26999	74	64,65	9	105,4	1
50	7,507	18	27073	75	64,74	10	105,3	1
60	7,525	17	27148	75	64,84	9	105,2	1
70	7,542	18	27223	75	64,93	10	105,1	1
80	7,560	18	27298	76	65,03	9	105,0	2
90	7,578	18	27374	76	65,12	10	104,8	1
13300	7,596	18	27450	76	65,22	9	104,7	1
10	7,614	18	27526	76	65,31	10	104,6	1
20	7,632	17	27602	76	65,41	10	104,5	1
30	7,649	18	27678	76	65,51	9	104,4	1
40	7,667	18	27754	77	65,60	10	104,3	1
50	7,685	18	27831	76	65,70	9	104,2	1
60	7,703	18	27907	77	65,79	10	104,1	2
70	7,721	19	27984	78	65,89	9	103,9	1
80	7,740	18	28062	78	65,98	10	103,8	1
90	7,758	18	28140	78	66,08	10	103,7	1
13400	7,776	19	28218	78	66,18	9	103,6	1
10	7,776	18	28218	78	66,18	10	103,6	1
20	7,795	19	28296	78	66,27	10	103,5	1
30	7,813	18	28374	79	66,37	9	103,4	1
40	7,832	18	28452	79	66,47	10	103,3	1
50	7,850	19	28531	79	66,56	10	103,2	2
60	7,868	19	28610	80	66,66	10	103,0	1
70	7,887	19	28689	80	66,76	9	102,9	1
80	7,906	19	28769	80	66,86	10	102,8	1
90	7,925	18	28849	80	66,75	10	102,7	1
13500	7,944		28929		67,05		102,6	

D	J		A		T		*u*	
13500	7,962	19	29009	80	67,15	10	102,5	1
10	7,981	19	29089	80	67,25	10	102,4	1
20	8,000	19	29169	80	67,35	9	102,3	1
30	8,019	18	29249	80	67,44	10	102,2	2
40	8,037	19	29329	81	67,54	10	102,0	1
50	8,056	20	29410	81	67,64	10	101,9	1
60	8,076	19	29491	81	67,74	10	101,8	1
70	8,095	19	29572	81	67,84	10	101,7	1
80	8,114	19	29653	82	67,94	9	101,6	1
90	8,133	19	29735	82	68,03	10	101,5	1
13600	8,152	19	29817	82	68,13	10	101,4	1
10	8,171	19	29899	82	68,23	10	101,3	1
20	8,190	19	29981	82	68,33	10	101,2	1
30	8,209	20	30063	82	68,43	10	101,1	1
40	8,229	19	30145	83	68,53	10	101,0	2
50	8,248	20	30228	83	68,63	10	100,8	1
60	8,268	19	30311	83	68,73	10	100,7	1
70	8,287	20	30394	83	68,83	10	100,6	1
80	8,307	19	30477	83	68,93	10	100,5	1
90	8,326	19	30560	84	69,03	10	100,4	1
13700	8,345	20	30644	83	69,13	10	100,3	1
10	8,365	19	30727	84	69,23	10	100,2	1
20	8,384	20	30811	83	69,33	10	100,1	1
30	8,404	20	30894	84	69,43	10	100,0	1
40	8,424	19	30978	84	69,53	10	99,9	1
50	8,443	20	31062	84	69,63	10	99,8	1
60	8,463	20	31146	85	69,73	10	99,7	1
70	8,483	20	31231	85	69,83	10	99,6	1
80	8,503	19	31316	85	69,93	11	99,5	1
90	8,522	20	31401	86	70,04	10	99,4	1
13800	8,542	20	31487	86	70,14	11	99,3	2
10	8,562	20	31573	86	70,25	10	99,1	1
20	8,582	20	31659	87	70,35	11	99,0	1
30	8,602	20	31746	86	70,46	10	98,9	1
40	8,622	21	31832	86	70,56	11	98,8	1
50	8,643	20	31918	87	70,67	11	98,7	1
60	8,663	20	32005	87	70,78	10	98,6	1
70	8,683	21	32092	87	70,88	10	98,5	1
80	8,704	20	32179	87	70,98	11	98,4	1
90	8,724	20	32266	87	71,09	10	98,3	1
13900	8,744	20	32353	88	71,19	11	98,2	1
10	8,764	21	32441	88	71,30	10	98,1	1
20	8,785	20	32529	88	71,40	11	98,0	1
30	8,805	20	32617	88	71,51	10	97,9	1
40	8,825	21	32705	89	71,61	11	97,8	1
50	8,846	20	32794	89	71,72	10	97,7	2
60	8,866	21	32883	89	71,82	10	97,5	1
70	8,887	21	32972	89	71,92	11	97,4	1
80	8,908	21	33061	90	72,03	10	97,3	1
90	8,929	20	33151	89	72,13	11	97,2	1
14000	8,949		33240		72,24		97,1	

VI (pages 39 et 51). **Valeurs de β.**

φ	X.							
	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000
10°	1.00	1.00	1.00	1.00	1.02	—	—	—
11	1.01	1.00	1.00	0.99	1.00	1.02	—	—
12	1.01	1.00	1.00	0.98	0.99	1.00	—	—
13	1.01	1.00	0.99	1.98	0.98	0.99	1.02	—
14	1.01	1.00	0.99	0.97	0.97	0.97	1.00	—
15	1.01	1.01	0.99	0.97	0.96	0.96	0.98	1.02
16	1.02	1.01	0.99	0.97	0.96	0.95	0.96	1.00
17	1.02	1.01	1.00	0.97	0.95	0.94	0.95	0.97
18	1.02	1.02	1.00	0.97	0.95	0.93	0.94	0.96
19	1.02	1.02	1.01	0.98	0.95	0.93	0.93	0.94
20	1.03	1.02	1.01	0.98	0.95	0.93	0.92	0.93
21	1.03	1.02	1.02	0.99	0.95	0.93	0.92	0.92
22	1.03	1.03	1.03	0.99	0.96	0.93	0.91	0.91
23	1.04	1.03	1.03	1.00	0.96	0.93	0.91	0.90
24	1.04	1.04	1.04	1.01	0.97	0.93	0.90	0.89
25	1.04	1.05	1.04	1.02	0.97	0.93	0.90	0.89
26	1.05	1.05	1.05	1.02	0.98	0.94	0.90	0.88
27	1.05	1.05	1.05	1.03	0.98	0.94	0.90	0.88
28	1.05	1.06	1.06	1.03	0.99	0.94	0.91	0.87
29	1.06	1.07	1.06	1.04	1.00	0.95	0.91	0.87
30	1.06	1.07	1.07	1.04	1.00	0.96	0.91	0.87
31	1.07	1.08	1.08	1.05	1.01	0.97	0.91	0.87
32	1.07	1.08	1.08	1.06	1.02	0.97	0.91	0.87
33	1.08	1.09	1.09	1.07	1.03	0.98	0.92	0.87
34	1.09	1.10	1.10	1.08	1.04	0.99	0.92	0.87
35	1.10	1.11	1.11	1.09	1.05	0.99	0.93	0.88
36	1.11	1.12	1.12	1.10	1.06	1.00	0.93	0.88
37	1.11	1.13	1.12	1.11	1.07	1.01	0.94	0.88
38	1.12	1.13	1.13	1.11	1.08	1.01	0.95	0.89
39	1.13	1.14	1.14	1.12	1.08	1.02	0.95	0.89
40	1.14	1.15	1.15	1.14	1.09	1.03	0.96	0.89
41	1.15	1.16	1.16	1.14	1.10	1.04	0.97	0.90
42	1.16	1.17	1.17	1.16	1.11	1.05	0.97	0.90
43	1.17	1.18	1.18	1.17	1.12	1.05	0.98	0.91
44	1.18	1.19	1.19	1.18	1.13	1.06	0.99	0.91
45	1.19	1.20	1.20	1.19	1.14	1.07	0.99	0.92
46	1.20	1.22	1.22	1.20	1.16	1.08	1.00	0.92
47	1.21	1.23	1.23	1.22	1.17	1.09	1.01	0.93
48	1.22	1.25	1.25	1.23	1.18	1.10	1.02	0.93
49	1.24	1.26	1.26	1.24	1.20	1.11	1.02	0.94
50	1.25	1.27	1.28	1.26	1.21	1.12	1.03	0.94
51	1.27	1.29	1.29	1.28	1.22	1.13	1.04	0.95
52	1.29	1.31	1.31	1.29	1.24	1.14	1.05	0.95
53	1.31	1.33	1.33	1.31	1.25	1.15	1.05	0.96
54	1.32	1.35	1.35	1.32	1.27	1.16	1.06	0.96
55	1.34	1.37	1.37	1.34	1.28	1.17	1.07	0.97
56	1.36	1.39	1.39	1.36	1.30	1.18	1.07	0.97
57	1.38	1.41	1.42	1.39	1.31	1.19	1.08	0.97
58	1.41	1.44	1.44	1.41	1.33	1.21	1.08	0.98
59	1.44	1.47	1.47	1.43	1.34	1.22	1.09	0.98
60	1.47	1.50	1.51	1.46	1.36	1.23	1.10	0.99

VI (pages 39 et 51). **Valeurs de β.**

φ	x.							
	9 000	10 000	11 000	12 000	13 000	14 000	15 000	16 000
10°	—	—	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—	—	—
14	—	—	—	—	—	—	—	—
15	—	—	—	—	—	—	—	—
16	—	—	—	—	—	—	—	—
17	1.00	—	—	—	—	—	—	—
18	0.99	—	—	—	—	—	—	—
19	0.97	1.02	—	—	—	—	—	—
20	0.95	1.00	—	—	—	—	—	—
21	0.93	0.98	—	—	—	—	—	—
22	0.92	0.95	1.00	—	—	—	—	—
23	0 91	0.93	0.98	—	—	—	—	—
24	0.90	0.92	0.95	1.01	—	—	—	—
25	0.89	0.90	0.93	0.98	—	—	—	—
26	0.88	0.89	0.91	0.96	—	—	—	—
27	0.87	0.87	0.89	0.94	0.99	—	—	—
28	0.86	0.86	0.88	0.91	0.96	—	—	—
29	0.86	0.85	0.87	0.90	0.94	—	—	—
30	0.85	0.84	0.85	0.88	0.92	0.98	—	—
31	0.85	0.84	0.84	0.86	0.89	0.95	—	—
32	0.84	0.83	0.83	0.85	0.87	0.92	—	—
33	0.84	0.82	0.82	0.83	0.86	0.90	0.99	—
34	0.84	0.82	0.81	0.82	0.84	0.89	0.96	—
35	0.84	0.81	0.81	0.81	0.83	0.87	0.93	—
36	0.84	0.81	0.80	0.80	0.82	0.85	0.91	—
37	0.84	0.81	0.80	0.80	0.81	0.84	0.89	—
38	0.84	0.81	0.79	0.79	0.80	0.83	0.88	—
39	0.84	0.81	0.79	0.78	0.79	0.82	0.86	—
40	0.84	0.81	0.78	0.78	0.78	0.81	0.85	0.92
41	0.85	0.81	0.78	0.77	0.78	0.74	0.84	0.90
42	0.85	0.81	0.78	0.77	0.77	0.79	0.83	0.89
43	0.85	0.81	0.77	0.77	0.76	0.78	0.82	0.88
44	0.85	0.81	0.77	0.76	0.76	0.78	0.81	0.87
45	0.85	0.81	0.77	0.76	0.76	0.77	0.81	0.86
46	0.86	0.81	0.77	0.76	0.76	0.76	0.80	0.86
47	0.86	0.81	0.77	0.76	0.76	0.76	0.80	0.85
48	0.86	0.81	0.77	0.76	0.75	0.76	0.80	0.86
49	0.87	0.81	0.77	0.76	0.76	0.76	0.80	0.86
50	0.87	0.81	0.78	0.76	0.76	0.76	0.80	0.87
51	0.87	0.81	0.78	0.76	0.76	0.76	0.81	—
52	0.88	0.81	0.78	0.76	0.76	0.77	0.81	—
53	0.88	0.81	0.78	0.77	0.77	0.78	0.82	—
54	0.88	0.81	0.79	0.77	0.77	0.79	0.83	—
55	0.89	0.81	0.79	0.77	0.78	0.80	0.85	—
56	0.89	0.82	0.80	0.78	0.78	0.81	—	—
57	0.89	0.82	0.81	0.78	0.79	0.83	—	—
58	0.90	0.83	0.81	0.79	0.80	0.84	—	—
59	0.90	0.83	0.82	0.81	0.82	0.87	—	—
60	0.90	0.84	0.83	0.82	0.84	0.91	—	—

VII (p. 86). Résistance quadratique. Facteurs de tir [1].

Z	$\log \frac{V^2 \sin 2\varphi}{gX} = \log f$		$\log \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi} = \log f_1$		$\log \frac{T}{\sqrt{X \operatorname{tg} \varphi}} = \log f_2$		$\log \frac{V \cos \varphi}{U \cos \omega} = \log f_3$		$\log \frac{x_0}{X} = \log f_4$		$\log \frac{Y}{X \operatorname{tg} \varphi} = \log f_5$		$\frac{\delta i \beta}{C} X = f_6$	$\frac{\delta i \beta}{C} \frac{V^2 \sin 2\varphi}{g} = f_7$	
0,00	0,0000	44	0,0000	44	$\bar{1}$,6548	11	0,0000	65	$\bar{1}$,6990	11	$\bar{1}$,3979	23	0	0	140
03	0044	43	0044	43	6559	11	0065	65	7001	10	4002	22	139	140	143
06	0087	44	0087	43	6570	11	0130	65	7011	11	4024	22	278	283	146
09	0131	44	0130	44	6581	11	0185	65	7022	11	4046	22	417	429	149
12	0175	45	0174	43	6592	10	0260	66	7033	11	4068	21	556	578	152
0,15	0,0220	45	0,0217	43	$\bar{1}$,6602	11	0,0326	65	$\bar{1}$,7044	10	$\bar{1}$,4089	22	694	730	156
18	0265	44	0260	44	6613	11	0391	65	7054	11	4111	22	833	886	158
21	0309	45	0304	44	6624	10	0456	65	7065	11	4133	22	972	1044	162
24	0354	46	0348	43	6634	11	0521	65	7076	10	4155	21	1111	1206	164
27	0400	45	0391	43	6645	11	0586	65	7086	11	4176	22	1250	1370	169
0,30	0,0445	46	0,0434	43	$\bar{1}$,6656	10	0,0651	66	$\bar{1}$,7097	10	$\bar{1}$,4198	22	1389	1539	172
33	0491	46	0477	44	6666	10	0717	65	7107	11	4220	21	1528	1711	175
36	0537	46	0521	43	6676	11	0782	65	7118	10	4241	22	1667	1886	179
39	0583	47	0564	44	6687	10	0847	65	7128	11	4263	21	1806	2065	182
42	0630	46	0608	43	6697	11	0912	65	7139	10	4284	22	1944	2247	187
0,45	0,0676	47	0,0651	43	$\bar{1}$,6708	10	0,0977	65	$\bar{1}$,7149	11	$\bar{1}$,4306	21	2083	2434	191
48	0723	47	0694	43	6718	10	1042	65	7160	10	4327	22	2222	2625	194
51	0770	48	0737	43	6728	11	1107	65	7170	11	4349	21	2361	2819	199
54	0818	47	0780	43	6739	10	1172	66	7181	10	4370	22	2500	3018	203
57	0865	48	0823	43	6749	10	1238	65	7191	10	4392	21	2639	3221	207
0,60	0,0913	48	0,0866	43	$\bar{1}$,6759	11	0,1303	65	$\bar{1}$,7201	10	$\bar{1}$,4413	22	2778	3428	211
63	0961	49	0909	43	6770	10	1368	65	7211	10	4435	21	2917	3639	216
66	1010	48	0952	44	6780	10	1433	65	7221	10	4456	21	3056	3855	220
69	1058	49	0996	43	6790	10	1498	65	7231	10	4477	21	3194	4075	226
72	1107	49	1039	42	6800	10	1563	66	7241	11	4498	22	3333	4301	230
0,75	0,1156	49	0,1081	43	$\bar{1}$,6810	10	0,1629	65	$\bar{1}$,7252	10	$\bar{1}$,4520	22	3472	4531	235
78	1205	49	1124	43	6820	10	1694	65	7262	10	4542	21	3611	4766	240
81	1254	50	1167	43	6830	10	1759	65	7272	10	4563	22	3750	5006	245
84	1304	50	1210	42	6840	10	1824	65	7282	10	4585	21	3889	5251	250
87	1354	50	1252	43	6850	10	1889	65	7292	10	4606	21	4028	5501	256
0,90	0,1404	51	0,1295	43	$\bar{1}$,6860	10	0,1954	65	$\bar{1}$,7302	10	$\bar{1}$,4627	21	4167	5757	262
93	1455	50	1338	42	6870	9	2019	66	7312	9	4648	21	4306	6019	267
96	1505	51	1380	43	6879	10	2085	65	7321	10	4669	22	4445	6286	272
99	1556	51	1423	42	6889	10	2150	65	7331	10	4691	21	4583	6558	279
1,02	1607	52	1465	43	6899	9	2215	65	7341	10	4712	21	4722	6837	285
1,05	0,1659	51	0,1508	42	$\bar{1}$,6908	10	0,2280	65	$\bar{1}$,7351	10	$\bar{1}$,4733	22	4861	7122	291
08	1710	52	1550	42	6918	10	2345	65	7361	9	4755	21	5000	7413	298
11	1762	52	1592	43	6928	9	2410	65	7370	10	4776	21	5139	7711	304
14	1814	53	1635	42	6937	10	2475	66	7380	9	4797	21	5278	8015	310
17	1867	52	1677	42	6947	9	2541	65	7389	10	4818	21	5417	8325	318
1,20	0,1919	53	0,1719	42	$\bar{1}$,6956	10	0,2606	65	$\bar{1}$,7399	10	$\bar{1}$,4839	21	5556	8643	324
23	1972	53	1761	42	6966	9	2671	65	7409	9	4860	21	5694	8967	332
26	2025	53	1803	42	6975	10	2736	65	7418	9	4881	21	5833	9299	339
29	2078	54	1845	42	6985	9	2801	65	7427	10	4902	20	5972	9638	347
32	2132		1887		6994		2866		7437		4922		6111	9985	

[1] Cette table a été calculée par les lieutenants d'artillerie Castagnola et Gianilà.

VIII (p. 86). Résistance cubique. Facteurs de tir. (Table de Chapel.)

m	$\log \frac{V^2 \sin 2\varphi}{X} = \log f$		$\log \frac{\text{tg}\,\omega}{\text{tg}\,\varphi} = \log f_1$		$\log \frac{U \cos \omega}{V \cos \varphi} = \log f_2$		$\log \frac{T}{V \sin \varphi} = \log f_3$		$\log \frac{Y_1}{X \,\text{tg}\,\varphi} = \log f_4$		OBSERVATIONS.
0,00	0,991	15	0,000	14	0,000	21	0,310	4	$\bar{1}$,398	7	Y_1 est l'ordonnée correspondant à l'abscisse $\frac{1}{2}$ X.
05	1,006	14	014	13	$\bar{1}$,979	20	306	4	405	7	
10	020	14	027	13	959	19	302	4	412	6	$m = \frac{1}{4} Z = cVX$
15	034	14	040	12	940	19	298	4	418	7	
20	048	14	052	12	921	18	294	4	425	6	$c = \frac{\delta i \beta}{C} \lambda$.
25	062	14	064	11	903	17	290	4	431	6	
0,30	1,076	14	0,075	11	$\bar{1}$,886	16	0,286	5	$\bar{1}$,437	5	λ varie entre $0,0^4 4$ et $0,0^4 8$.
35	090	13	086	10	870	16	281	4	442	5	
40	103	13	096	10	854	15	277	4	447	5	
45	116	13	106	9	839	15	273	4	452	5	
50	129	13	115	9	824	14	269	4	457	4	
0,55	1,142	13	0,124	8	$\bar{1}$,810	14	0,265	5	$\bar{1}$,461	5	
60	155	13	132	8	796	13	260	5	466	4	
65	168	13	140	8	783	13	255	5	470	4	
70	181	13	148	8	770	13	250	5	474	4	
75	194	12	156	7	757	12	245	4	478	4	
0,80	1,206	12	0,163	7	$\bar{1}$,745	12	0,241	4	$\bar{1}$,482	3	
85	218	12	170	7	733	12	237	5	485	4	
90	230	12	177	6	721	11	232	4	489	3	
95	242	12	183	6	710	11	228	5	492	3	
1,00	254	12	189	6	699	11	223	5	495	3	
1,05	1,266	12	0,195	6	$\bar{1}$,688	10	0,218	5	$\bar{1}$,498	3	
10	278	12	201	6	678	10	213	5	501	3	
15	290	11	207	5	668	10	208	4	504	2	
20	301	11	212	5	658	10	204	4	506	3	
25	312	11	217	5	648	10	200	4	509	2	
1,30	1,323	11	0,222	5	$\bar{1}$,638	9	0,196	5	$\bar{1}$,511	3	
35	334	11	227	4	629	9	191	4	514	3	
40	345	11	231	4	620	9	187	5	517	2	
45	356	11	235	4	611	9	182	5	519	2	
50	367	11	239	4	602	9	177	5	521	3	
1,55	1,378	10	0,243	4	$\bar{1}$,593	8	0,172	4	$\bar{1}$,524	2	
60	388	10	247	4	585	8	168	4	526	2	
65	398	10	251	4	577	8	164	4	528	2	
70	408	10	255	4	569	8	160	4	530	1	
75	418	10	259	4	561	8	156	4	531	2	
1,80	1,428	10	0,263	4	$\bar{1}$,553	8	0,152	4	$\bar{1}$,533	2	
85	438	10	267	3	545	8	148	5	535	2	
90	448	10	270	3	537	7	143	4	537	2	
95	458	10	273	3	530	7	139	5	539	2	
2,00	468	10	276	3	523	7	134	4	541	2	
2,05	1,478	10	0,279	3	$\bar{1}$,516	7	0,130	5	$\bar{1}$,543	2	
10	488	9	282	3	509	7	125	4	545	1	
15	497	9	285	3	502	7	121	4	546	2	
20	506	9	288	3	495	7	117	4	548	2	
25	515	9	291	3	488	7	113	4	550	1	
2,30	524		-294		481		109		551		

IX (page 142). Pénétrations.

NATURE DES MILIEUX.	$10^{-3}\alpha$	$10^{6}\beta$	γ	γ'
Roche calcaire oolithique	12000	15	0,831	0,431
Muraille en pierre de bonne qualité.	5520	15	1,806	0,936
Muraille en pierre de médiocre qualité	4400	15	2,265	1,174
Muraille en briques.	3160	15	3,154	1,632
Sable mêlé de glaise	435	200	1,718	2,942
Terre argileuse moitié sable et moitié glaise . .	1045	35	4,087	3,436
Terre végétale d'anciens remparts	700	60	3,560	3,865
Terre argileuse, moitié sable et moitié argile. .	461	60	5,405	5,868
Argile humide.	266	80	7,025	8,617
Bois de chêne, hêtre et frêne	2085	20	3,585	2,216
Bois d'orme.	1600	20	4,672	2,887
Bois de sapin	1160	20	6,444	3,983
Bois de peuplier.	1090	20	6,858	4,239

X (page 143). $A = \log\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{V}{100}\right)^2\right]$

V	A		V	A		V	A		V	A	
100	0,176	29	200	0,477	29	300	0,740	24	400	0,954	19
110	0,205	31	210	0,506	28	310	0,764	23	410	0,973	19
120	0,236	30	220	0,534	28	320	0,787	22	420	0,992	19
130	0,266	31	230	0,562	27	330	0,809	22	430	1,011	18
140	0,297	30	240	0,589	26	340	0,831	22	440	1,029	17
150	0,327	31	250	0,615	26	350	0,853	21	450	1,046	18
160	0,358	30	260	0,641	26	360	0,874	21	460	1,064	17
170	0,388	30	270	0,667	25	370	0,895	20	470	1,081	17
180	0,418	30	280	0,692	24	380	0,915	20	480	1,098	16
190	0,448	29	290	0,716	24	390	0,935	19	490	1,114	16
200	0,477		300	0,740		400	0,954		500	1,130	

XI (page 196). **Valeurs de** $\frac{10^7 g}{u^2}$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	9805	9612	9424	9242	9066	8893	8723	8564	8106	8253
110	8104	7958	7817	7679	7545	7414	7287	7163	7042	6924
120	6809	6697	6588	6481	6377	6275	6176	6079	5985	5892
130	5802	5714	5627	5543	5461	5308	5301	5224	5172	5075
140	5003	4932	4863	4795	4729	4664	4600	4537	4487	4416
150	4358	4300	4244	4189	4134	4081	4029	3978	3928	3879
160	3830	3783	3736	3691	3646	3602	3558	3516	3474	3433
170	3393	3353	3314	3276	3239	3202	3165	3130	3095	3060
180	3026	2993	2960	2928	2896	2865	2834	2804	2774	2745
190	2716	2688	2660	2632	2605	2579	2552	2527	2501	2476
200	2451	2427	2403	2379	2356	2333	2311	2288	2266	2245
210	2223	2202	2182	2161	2141	2121	2102	2082	2063	2044
220	2026	2008	1990	1972	1954	1937	1920	1903	1886	1870
230	1854	1838	1822	1806	1791	1776	1761	1746	1731	1717
240	1702	1688	1674	1661	1647	1634	1620	1607	1594	1582
250	1569	1556	1544	1532	1520	1508	1496	1465	1473	1462
260	1451	1439	1428	1418	1407	1396	1386	1375	1365	1355
270	1345	1335	1325	1316	1306	1297	1287	1278	1269	1260
280	1251	1242	1233	1224	1216	1208	1199	1190	1182	1174
290	1166	1158	1150	1142	1134	1127	1119	1112	1104	1097
300	1090	1082	1075	1068	1061	1054	1047	1040	1034	1027
310	1020	1014	1007	1001	995	988	982	976	970	964
320	958	952	946	940	934	928	923	917	911	906
330	900	895	890	884	879	874	869	863	858	853
340	848	843	838	833	829	824	819	814	810	805
350	800	796	791	787	782	778	774	769	765	761
360	757	752	748	744	740	736	732	728	724	720
370	716	712	709	705	701	697	694	690	686	683
380	679	776	672	668	665	662	658	655	651	648
390	645	641	638	635	632	628	625	622	619	616
400	613	610	607	604	601	598	595	592	589	586
410	583	581	578	575	572	569	567	564	561	559
420	556	553	551	548	545	543	540	538	535	533
430	530	528	525	523	521	518	516	513	511	509
440	507	504	502	500	497	495	493	491	489	486
450	484	482	480	478	476	474	472	470	467	465
460	463	461	459	457	455	434	452	450	448	446
470	444	442	440	438	436	435	433	431	429	427
480	426	424	422	420	419	417	415	413	412	410
490	408	407	405	403	402	400	399	397	395	394
500	392	391	389	388	386	385	383	381	380	379
510	377	376	374	373	371	370	368	367	365	364
520	363	361	360	359	357	356	354	353	352	350
530	349	348	346	345	344	343	341	340	339	338
540	336	335	334	333	331	330	329	328	327	325
550	324	323	322	321	320	318	317	316	315	314
560	313	312	310	309	308	307	306	305	304	303
570	302	301	300	299	298	297	296	295	294	293
580	292	291	290	289	288	287	286	285	284	283
590	282	281	280	279	278	277	276	275	274	273

XII (page 196). **Valeurs de $\frac{100}{u}$.**

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	1,000	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917
110	0,909	901	893	885	877	870	862	856	847	840
120	833	826	820	813	806	800	794	787	781	775
130	769	763	757	752	746	741	735	730	725	720
140	714	709	704	699	695	690	685	680	676	671
150	667	662	658	654	649	645	641	637	633	629
160	625	621	617	613	610	606	602	599	595	592
170	588	585	581	578	575	571	568	565	562	559
180	556	553	549	547	544	541	538	535	532	529
190	526	524	521	518	515	513	510	508	505	503
200	0,500	0,497	0,495	0,493	0,490	0,488	0,485	0,483	0,481	0,478
210	476	474	472	470	467	465	463	461	459	457
220	454	452	450	448	446	444	443	441	439	437
230	435	433	431	429	427	425	424	422	420	418
240	417	415	413	412	410	408	407	405	403	402
250	400	398	397	395	394	392	391	389	388	386
260	385	383	382	380	379	377	376	374	373	372
270	370	369	368	366	365	364	362	361	360	358
280	357	356	355	353	352	351	350	348	347	346
290	345	344	343	341	340	339	338	337	336	334
300	0,333	0,332	0,331	0,330	0,329	0,328	0,327	0,326	0,325	0,324
310	323	322	321	320	319	318	317	316	315	314
320	313	312	311	310	309	308	307	306	305	304
330	303	302	301	300	299	298	298	297	296	295
340	294	293	292	291	291	290	289	288	287	287
350	286	285	284	283	282	282	281	280	279	279
360	278	277	276	275	274	273	273	272	272	271
370	270	270	269	268	267	267	266	265	265	264
380	263	263	262	261	260	260	259	258	258	257
390	256	256	255	254	254	253	252	252	251	251
400	0,250	0,249	0,249	0,248	0,247	0,247	0,246	0,246	0,245	0,245
410	244	243	243	242	241	241	240	240	239	239
420	238	237	237	236	236	235	235	234	234	233
430	233	232	231	231	230	230	229	229	228	228
440	227	227	226	226	225	225	224	224	223	223
450	222	222	221	221	220	220	219	219	218	218
460	217	217	216	216	216	215	215	214	214	213
470	213	212	212	211	211	210	210	210	209	209
480	208	208	207	207	207	206	206	205	205	204
490	204	204	203	203	202	202	202	201	201	200

XIII (p. 217). **Facteurs de probabilité.**

P	f	P	f	P	f	P	f	P	f	P	f	P	f	P	f	P	f	P	f
1	0,02	11	0,20	21	0,40	31	0,59	41	0,80	51	1,02	61	1,27	71	1,57	81	1,94	91	2,52
2	04	12	22	22	41	32	61	42	82	52	04	62	30	72	60	82	98	92	60
3	06	13	24	23	43	33	63	43	84	53	07	63	33	73	64	83	2,03	93	69
4	07	14	26	24	45	34	65	44	86	54	09	64	36	74	67	84	08	94	78
5	09	15	28	25	47	35	67	45	89	55	12	65	39	75	71	85	13	95	90
6	11	16	30	26	49	36	70	46	91	56	14	66	42	76	74	86	18	96	3,04
7	13	17	32	27	51	37	72	47	93	57	17	67	45	77	78	87	24	97	22
8	15	18	34	28	53	38	74	48	95	58	19	68	48	78	82	88	30	98	45
9	17	19	36	29	55	39	76	49	98	59	22	69	52	79	86	89	37	99	82
10	18	20	38	30	57	40	78	50	1,00	60	25	70	54	80	90	90	44	100	∞

XIV (page 318).

b positif.							b négatif.						
$Z=\frac{800bX}{3a}$	$\log\frac{bX}{a}$	A	log A′	B	log B	log B′	$Z=\frac{800bX}{3a}$	$\log\frac{-bX}{a}$	A	log A′	B	log B	log B′
0	$-\infty$	4,00000	0,42597	0,66667	$\bar{1}$,82391	$-\infty$	— 0	$-\infty$	4,00000	0,42597	0,66667	$\bar{1}$,82391	$-\infty$
1	$\bar{3}$,574	3,99254	42272	66666	82391	$\bar{6}$,27021	— 1	$\bar{3}$,574	00754	42923	66666	82391	$\bar{6}$,27580
2	875	98518	41948	66665	82390	86950	— 2	875	01518	43251	66665	82390	88067
3	$\bar{2}$,051	97790	41626	66662	82388	$\bar{5}$,21891	— 3	$\bar{2}$,051	02292	43581	66662	82388	$\bar{5}$,23567
4	176	97071	41306	66659	82386	46604	— 4	176	03073	43912	66658	82385	48837
5	273	96362	40987	66655	82383	65711	— 5	273	03867	44245	66654	82383	68503
6	$\bar{2}$,352	3,95659	0,40669	0,66650	$\bar{1}$,82380	$\bar{5}$,81274	— 6	$\bar{2}$,352	4,04668	0,44578	0,66618	$\bar{1}$,82379	$\bar{5}$,84624
7	419	94966	40353	66643	82376	94391	— 7	419	05484	44914	66641	82374	98300
8	477	94280	40039	66636	82371	$\bar{4}$,05718	— 8	477	06304	45252	66633	82369	$\bar{4}$,10185
9	528	93616	39732	66629	82366	15684	— 9	528	07142	45582	66624	82363	20695
10	574	92931	39413	66620	82360	24560	— 10	574	07982	45932	66613	82356	30158
11	$\bar{2}$,615	3,92269	0,39103	0,66610	$\bar{1}$,82354	$\bar{4}$,32570	— 11	$\bar{2}$,615	4,08337	0,46274	0,66602	$\bar{1}$,82349	$\bar{4}$,38714
12	653	91614	38793	66600	82347	39860	— 12	653	09704	46618	66589	82340	46563
13	688	90966	38485	66589	82340	46545	— 13	688	10584	46965	66575	82331	53809
14	720	90329	38180	66577	82332	52718	— 14	720	11475	47313	66559	82321	60540
15	750	89698	37874	66564	82324	58445	— 15	750	12367	47661	66543	82310	66826
16	$\bar{2}$,778	3,89074	0,37572	0,66551	$\bar{1}$,82315	$\bar{4}$,63789	— 16	$\bar{2}$,778	4,13279	0,48009	0,66525	$\bar{1}$,82298	$\bar{4}$,72725
18	829	87840	36966	66522	82297	73493	— 18	829	15131	48719	66484	82272	83553
20	875	86638	36368	66489	82275	82124	— 20	875	17046	49433	66453	82252	93304
22	916	85443	35765	66455	82253	89886	— 22	916	18971	50141	66386	82208	$\bar{3}$,02186
25	972	83747	34894	66398	82216	$\bar{3}$,00221	— 25	972	22047	51250	66297	82149	14204
30	$\bar{1}$,051	81007	33449	66292	82146	14794	— 30	$\bar{1}$,051	27401	53114	66110	82030	31586
35	$\bar{1}$,118	3,78410	0,32034	0,66171	$\bar{1}$,82067	$\bar{3}$,26943	— 35	$\bar{1}$,118	4,33141	0,55028	0,65888	$\bar{1}$,81881	$\bar{3}$,46547
40	176	75944	30646	66037	81979	37322	— 40	176	39301	56993	65611	81698	59714
45	227	73602	29286	65891	81883	46354	— 45	227	45927	59010	65280	81478	71598
50	273	71375	27951	65735	81780	54327	— 50	273	53058	61083	64889	81217	82394
55	314	69252	26640	65569	81670	61445	— 55	314	60745	63210	64431	80910	92335
60	352	67232	25354	65394	81554	67863	— 60	352	69039	65395	63902	80551	$\bar{2}$,01568

XV (page 331).

z	n = 2,0		n = 2,1		n = 2,2		n = 2,3		n = 2,4		n = 2,5	
	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F
1	133,833	0,75282	127,116	0,71504	120,399	0,67726	113,683	0,63948	106,966	0,60170	100,250	0,56391
2	67,167	75561	63,784	71758	60,401	67952	57,018	64146	53,634	60340	50,250	56532
3	44,946	75846	42,671	72012	40,402	68177	38,130	64343	35,857	60508	33,584	56673
4	33,835	76132	32,118	72269	30,401	68405	28,684	64542	26,967	60679	25,251	56816
5	27,169	76416	25,786	72525	24,401	68633	23,017	64741	21,633	60849	20,251	56958
6	22,373	0,76702	21,282	0,72782	20,191	0,68863	19,100	0,64943	18,009	0,61023	16,917	0,57101
7	18,544	76988	17,742	73040	16,940	69091	16,138	65142	15,336	61193	14,534	57244
8	17,167	77272	16,285	73295	15,400	69332	14,518	65340	13,635	61363	12,750	57386
9	15,317	77558	14,526	73553	13,735	69547	12,946	65541	12,155	61535	11,362	57529
10	13,835	77852	13,119	73817	12,402	69781	11,685	65746	10,969	61711	10,251	57676
11	12,625	0,78142	11,969	0,74078	11,313	0,70013	10,657	0,65949	10,000	0,61885	9,343	0,57821
12	11,614	78438	11,009	74344	10,403	70251	9,797	66157	9,191	62063	8,585	57969
13	10,758	78722	10,195	74600	9,632	70477	9,069	66355	8,506	62233	7,943	58111
14	10,026	79014	9,500	74862	8,974	70710	8,448	66559	8,921	62408	7,394	58257
15	9,390	79306	8,896	75126	8,401	70946	7,905	66765	7,410	62584	6,917	58403
16	8,837	0,79600	8,370	0,75390	7,903	0,71180	7,436	0,66970	6,969	0,62760	6,502	0,58550
18	7,912	80190	7,492	75921	7,071	71652	6,651	67383	6,231	63114	5,808	58845
20	7,171	80782	6,788	76454	6,404	72125	6,020	67797	5,637	63469	5,252	59141
22	6,558	81390	6,204	77001	5,851	72612	5,497	68223	5,143	63834	4,798	59445
25	5,837	82278	5,520	77801	5,203	73323	4,886	68845	4,569	64367	4,252	59889
30	4,950	83798	4,677	79168	4,404	74539	4,131	69909	3,858	65279	3,586	60649
35	4,315	0,85326	4,074	0,80544	3,833	0,75762	3,592	0,70979	3,351	0,66197	3,110	0,61413
40	3,841	86878	3,624	81940	3,407	77003	3,190	72065	2,973	67127	2,754	62189
45	3,472	88450	3,273	83355	3,074	78260	2,875	73165	2,676	68070	2,477	62975
50	3,175	90040	2,991	84786	2,807	79532	2,623	74278	2,439	69024	2,254	63770
55	2,934	91652	2,762	86237	2,590	80821	2,418	75406	2,246	69991	2,073	64576
60	2,733	93278	2,571	87700	2,409	82123	2,247	76545	2,085	70967	1,922	65389

XV (page 331).

Z	n = 2,6		n = 2,7		n = 2,8		n = 2,9		n = 3,0		n = 3,1		n = 3,2	
	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F
1	93,533	0,52613	86,817	0,48835	80,100	0,45056	73,383	0,41278	69,667	0,37500	59,950	0,33722	53,233	0,29944
2	46,867	52726	43,483	48919	40,100	45113	36,717	41306	33,333	37500	29,950	33694	26,567	29887
3	31,311	52839	29,039	49004	26,767	45169	24,494	41335	22,222	37500	19,950	33665	17,676	29831
4	23,534	52953	21,817	49090	20,101	45226	18,384	41363	16,667	37500	14,950	33637	13,233	29774
5	18,867	53066	17,483	49175	16,100	45283	14,716	41392	13,333	37500	11,950	33608	10,566	29717
6	15,756	0,53181	14,595	0,49261	13,433	0,45340	12,272	0,41420	11,111	0,37500	9,949	0,33580	8,785	0,29660
7	13,535	53295	12,531	49346	11,529	45397	10,526	41449	9,524	37500	8,521	33551	7,519	29603
8	11,867	53409	10,983	49431	10,100	45454	9,217	41477	8,333	37500	7,450	33523	6,566	29545
9	10,571	53523	9,780	49517	8,989	45511	8,198	41506	7,407	37500	6,617	33494	5,826	29489
10	9,535	53641	8,818	49606	8,101	45570	7,384	41535	6,667	37500	5,950	33465	5,233	29430
11	8,686	0,53757	8,030	0,49693	7,374	0,45628	6,717	0,41564	6,061	0,37500	5,405	0,33436	4,748	0,29372
12	7,979	53875	7,373	49781	6,768	45688	6,162	41594	5,556	37500	4,950	33406	4,344	29312
13	7,380	53989	6,817	49867	6,254	45745	5,691	41622	5,128	37500	4,566	33378	4,003	29255
14	6,868	54106	6,341	49954	5,815	45803	5,288	41652	4,762	37500	4,236	33348	3,709	29197
15	6,423	54223	5,928	50042	5,433	45861	4,939	41681	4,444	37500	3,949	33319	3,455	29139
16	6,035	0,54340	5,568	0,50130	5,101	0,45920	4,634	0,41710	4,167	0,37500	3,700	0,33290	3,233	0,29080
18	5,387	54576	4,966	50307	4,545	46038	4,125	41769	3,704	37500	3,282	33231	2,862	28962
20	4,868	54813	4,484	50485	4,101	46157	3,717	41828	3,333	37500	2,949	33172	2,565	28843
22	4,444	55056	4,090	50667	3,737	46278	3,384	41889	3,030	37500	2,676	33111	2,322	28722
25	3,935	55411	3,618	50933	3,301	45455	2,984	41978	2,667	37500	2,349	33022	2,032	28545
30	3,313	56019	3,041	51389	2,768	46759	2,495	42130	2,222	37500	1,949	32870	1,677	28241
35	2,869	0,56630	2,628	0,51848	2,387	0,47065	2,146	0,42283	1,905	0,37500	1,663	0,32717	1,422	0,27935
40	2,537	57252	2,319	52314	2,102	47376	1,884	42438	1,667	37500	1,449	32562	1,232	27624
45	2,278	57880	2,079	52785	1,880	47690	1,681	42595	1,482	37500	1,283	32405	1,084	27310
50	2,070	58516	1,886	53262	1,702	48008	1,517	42751	1,333	37500	1,149	32246	0,965	26992
55	1,900	59160	1,728	53745	1,556	48330	1,384	42915	1,212	37500	1,040	32085	0,868	26670
60	1,759	59811	1,597	54233	1,435	48656	1,273	43078	1,111	37500	0,949	31922	0,787	26344

XV (page 331).

z	n = 3,3		n = 3,4		n = 3,5		n = 3,6		n = 3,7		n = 3,8		n = 3,9	
	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F
1	46,517	0,26165	39,800	0,22387	33,083	0,18609	26,367	0,14831	19,650	0,11053	12,933	0,07274	6,217	0,03496
2	23,183	26081	19,800	22274	16,417	18468	13,033	14662	9,650	10855	6,267	07049	2,883	03242
3	15,404	25996	13,132	22161	10,859	18326	8,587	14492	6,315	10657	4,043	06822	1,771	02988
4	11,517	25910	9,800	22047	8,083	18184	6,366	14321	4,649	10458	2,933	06594	1,216	02731
5	9,183	25825	7,799	21934	6,416	18042	5,033	14150	3,649	10259	2,266	06367	0,882	02476
6	7,627	0,25739	6,466	0,21819	5,305	0,17899	4,143	0,13979	2,982	0,10059	1,821	0,06138	0,660	0,02218
7	6,516	25654	5,514	21705	4,511	17756	3,509	13808	2,506	09859	1,504	05910	0,501	01962
8	5,683	25568	4,799	21591	3,916	17613	3,033	13636	2,149	09659	1,266	05682	0,382	01704
9	5,035	25483	4,244	21477	3,453	17471	2,663	13466	1,872	09460	1,081	05454	0,290	01449
10	4,516	25394	3,799	21359	3,082	17324	2,366	13289	1,649	09254	0,932	05218	0,215	01183
11	4,092	0,25307	3,436	0,21243	2,780	0,17179	2,123	0,13115	1,467	0,09051	0,811	0,04986	0,154	0,00922
12	3,739	25219	3,133	21125	2,527	17030	1,921	12937	1,315	08843	0,710	04750	0,104	00656
13	3,440	25133	2,877	21011	2,313	16889	1,750	12766	1,187	08644	0,624	04522	0,061	00399
14	3,183	25045	2,656	20894	2,130	16742	1,604	12591	1,077	08440	0,551	04288	0,024	00136
15	2,960	24958	2,465	20777	1,970	16596	1,476	12416	0,981	08235	0,486	04054	—	—
16	2,766	0,24870	2,299	0,20660	1,832	0,16449	1,365	0,12239	0,898	0,08029	0,431	0,03819	—	—
18	2,441	24693	2,020	20424	1,599	16154	1,179	11885	0,758	07616	0,337	03347	—	—
20	2,182	24515	1,798	20187	1,414	15858	1,030	11530	0,647	07202	0,263	02874	—	—
22	1,969	24333	1,616	19944	1,262	15556	0,909	11167	0,555	06778	0,202	02389	—	—
25	1,715	24067	1,397	19589	1,080	15112	0,763	10634	0,446	06156	0,129	01678	—	—
30	1,404	23611	1,131	18981	0,858	14352	0,585	09722	0,313	05092	0,040	00462	—	—
35	1,181	0,23152	0,910	0,18370	0,698	0,13587	0,457	0,08804	0,216	0,04022	—	—	—	—
40	1,015	22686	0,797	17748	0,580	12810	0,363	07873	0,145	02935	—	—	—	—
45	0,885	22215	0,686	17120	0,487	12025	0,288	06930	0,089	01835	—	—	—	—
50	0,780	21738	0,596	16484	0,412	11230	0,228	05975	0,014	00721	—	—	—	—
55	0,696	21255	0,524	15840	0,351	10424	0,179	05009	—	—	—	—	—	—
60	0,625	20767	0,463	15189	0,300	09611	0,138	04033	—	—	—	—	—	—

XV (page 331).

z	$n = 4,1$		$n = 4,2$		$n = 4,3$		$n = 4,4$		$n = 4,5$		$n = 4,6$		$n = 4,7$	
	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F
— 1	6,115	— 0,03140	12,731	— 0,07162	19,348	— 0,10884	25,965	— 0,14606	32,582	— 0,18328	39,199	— 0,22050	45,816	— 0,25772
— 2	2,786	03132	6,069	06826	9,352	10520	12,635	14214	15,918	17908	19,201	21602	22,484	25296
— 3	1,674	02797	3,846	06472	6,018	10147	8,190	13812	10,362	17477	12,534	21143	14,706	24808
— 4	1,119	02521	2,736	06159	4,353	09797	5,970	13435	7,587	17073	9,204	20711	10,821	24349
— 5	0,889	02217	2,172	05828	3,455	09439	4,738	13050	6,021	16661	7,304	20269	8,587	23880
— 6	0,564	— 0,01910	1,625	— 0,05493	2,686	— 0,09076	3,747	— 0,12659	4,808	— 0,16242	5,869	— 0,19825	6,930	— 0,23408
— 7	0,399	01588	1,302	05153	2,205	08718	3,107	12273	4,009	15828	4,911	19383	5,813	22938
— 8	0,284	01305	1,068	04833	1,850	08360	2,638	11888	3,420	15415	4,203	18943	4,986	22470
— 9	0,197	01009	0,888	04510	1,579	08011	2,270	11512	2,961	15013	3,652	18515	4,343	22016
— 10	0,118	00692	0,735	04164	1,352	07636	1,969	11108	2,586	14580	3,203	18052	3,820	21524
— 11	0,061	— 0,00402	0,617	— 0,03847	1,173	— 0,07292	1,729	— 0,10738	2,285	— 0,14183	2,841	— 0,17629	3,397	— 0,21075
— 12	0,007	00100	0,513	03519	1,019	06937	1,525	10356	2,031	13775	2,538	17198	3,044	20617
— 13	—	—	0,430	03193	0,893	06584	1,356	09876	1,819	13367	2,282	16760	2,745	20151
— 14	—	—	0,338	02870	0,765	06234	1,192	09598	1,618	12962	2,044	16327	2,470	19691
— 15	—	—	0,292	02547	0,687	05884	1,082	09222	1,477	12559	1,872	15896	2,267	19233
— 16	—	—	0,239	— 0,02227	0,606	— 0,05538	0,973	— 0,08848	1,340	— 0,12159	1,707	— 0,15471	2,074	— 0,18781
— 18	—	—	0,144	01584	0,465	04841	0,786	08098	1,107	11355	1,428	14612	1,749	17869
— 20	—	—	0,072	00947	0,356	04151	0,640	07354	0,924	10558	1,208	13762	1,492	16965
— 22	—	—	0,013	00032	0,267	03477	0,521	06629	0,775	09781	1,028	12930	1,282	16080
— 25	—	—	—	—	0,158	02422	0,375	05515	0,592	08589	0,809	11658	1,026	14730
— 30	—	—	—	—	0,016	00765	0,189	03709	0,362	06652	0,535	09595	0,708	12539
— 35	—	—	—	—	—	—	0,075	— 0,01931	0,216	— 0,04748	0,357	— 0,07565	0,499	— 0,10381
— 40	—	—	—	—	—	—	—	—	0,100	02880	0,217	05573	0,335	08265
— 45	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,109	03616	0,208	06186
— 50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,023	01701	0,108	04151
— 55	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,027	02159
— 60	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XV (page 331).

Z	$n = 4,8$		$n = 4,9$		$n = 5,0$		$n = 5,1$		$n = 5,2$		$n = 5,3$		$n = 5,4$	
	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F
— 1	52,433	— 0,29494	59,050	— 0,33216	65,667	— 0,36938	72,278	— 0,40660	78,895	— 0,44382	85,512	— 0,48104	92,129	— 0,51826
— 2	25,767	28990	29,050	32684	32,333	36378	35,616	40072	38,983	43776	42,266	47460	45,549	51154
— 3	16,878	28473	19,050	32138	21,222	35803	23,394	39468	25,566	43133	27,738	46798	29,910	50463
— 4	12,438	27987	14,051	31625	15,668	35263	17,282	38902	18,899	42540	20,516	46178	22,133	49816
— 5	9,870	27491	11,153	31102	12,336	34713	13,624	38324	14,907	41935	16,190	45546	17,473	49157
— 6	7,991	— 0,26991	9,052	— 0,30573	10,113	— 0,34156	11,177	— 0,37739	12,238	— 0,41321	13,299	— 0,44904	14,360	— 0,48487
— 7	6,716	26493	7,618	30048	8,520	33603	9,423	37159	10,325	40714	11,228	44269	12,130	47824
— 8	5,770	25998	6,553	29525	7,337	33053	8,120	36581	8,903	40108	9,687	43636	10,470	47163
— 9	5,034	25516	5,725	29017	6,416	32518	7,106	36019	7,797	39520	8,488	43020	9,179	46521
— 10	4,437	24996	5,054	28468	5,671	31940	6,288	35412	6,905	38884	7,522	42356	8,139	45828
— 11	3,953	— 0,24520	4,509	— 0,27965	5,065	— 0,31411	5,623	— 0,34856	6,179	— 0,38302	6,735	— 0,42747	7,291	— 0,45193
— 12	3,550	24036	4,056	27454	4,561	30874	5,067	34293	5,573	37711	6,079	41130	6,585	44549
— 13	3,208	23543	3,671	26934	4,134	30325	4,597	33716	5,030	37107	5,523	40499	5,986	43890
— 14	2,897	23055	3,323	26419	3,750	29783	4,176	33147	4,602	36511	5,029	39875	5,455	43239
— 15	2,662	22570	3,057	25908	3,452	29245	3,846	32582	4,240	35920	4,634	39257	5,028	42594
— 16	2,441	— 0,22092	2,808	— 0,25402	3,175	— 0,28713	3,542	— 0,32024	3,909	— 0,35334	4,276	— 0,38645	4,643	— 0,41955
— 18	2,070	21126	2,391	24383	2,712	27640	3,033	30897	3,354	34154	3,675	37411	3,996	40668
— 20	1,776	20169	2,060	23373	2,344	26577	2,628	29781	2,912	32985	3,196	36189	3,480	39393
— 22	1,535	19230	1,789	22389	2,042	25541	2,296	28693	2,550	31845	2,804	34997	3,057	38149
— 25	1,243	17807	1,460	20879	1,678	23952	1,895	27025	2,112	30097	2,329	33170	2,546	36242
— 30	0,881	15482	1,064	18426	1,237	21369	1,410	24312	1,583	27256	1,756	30199	1,929	33143
— 35	0,640	— 0,13198	0,782	— 0,16014	0,923	— 0,18831	1,064	— 0,21648	1,204	— 0,24464	1,345	— 0,27281	1,486	— 0,30097
— 40	0,453	10957	0,570	13649	0,688	16341	0,806	19033	0,924	21725	1,042	24417	1,160	27109
— 45	0,308	08755	0,407	11325	0,507	13895	0,606	16465	0,705	19035	0,805	21604	0,904	24174
— 50	0,193	06601	0,278	09051	0,362	11501	0,447	13951	0,532	16401	0,617	18851	0,701	21301
— 55	0,100	04492	0,173	06825	0,245	09158	0,318	11491	0,391	13284	0,464	16157	0,537	18490
— 60	0,025	02432	0,086	04651	0,149	06869	0,212	09087	0,275	11306	0,338	13524	0,401	15743

XV (page 331).

Z	n = 5,5		n = 5,6		n = 5,7		n = 5,8		n = 5,9		n = 6,0		n = 6,1	
	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F	$\frac{H}{X}$	F
— 1	98,746	— 0,55548	105,363	— 0,59270	111,980	— 0,62990	118,598	— 0,66713	125,215	— 0,70435	131,833	— 0,74157	137,450	— 0,77879
— 2	48,832	54847	52,115	58541	55,408	62235	58,601	65929	61,884	69623	65,167	73317	68,450	77011
— 3	32,082	54128	34,254	57794	36,426	61459	38,598	65124	40,770	68789	42,945	72454	45,117	76119
— 4	23,750	53454	25,367	57092	26,984	60730	28,601	64369	30,218	68007	31,835	71645	33,452	75283
— 5	18,756	52768	20,039	56379	21,322	59989	22,605	63600	23,888	67211	25,171	70822	26,454	74433
— 6	15,421	— 0,52069	16,482	— 0,55652	17,543	— 0,59235	18,604	— 0,62818	19,665	— 0,66400	20,727	— 0,69983	21,788	— 0,73566
— 7	13,033	51379	13,935	54934	14,837	58490	15,740	62046	16,642	65602	17,546	69157	18,448	72712
— 8	11,254	50691	12,037	54219	12,821	57746	13,604	61274	14,388	64801	15,172	68329	15,955	71857
— 9	9,870	50022	10,561	53523	11,252	57024	11,943	60524	12,634	64025	13,325	67526	14,016	71027
— 10	8,756	49300	9,373	52772	9,990	56244	10,607	59716	11,220	63188	11,830	66660	12,447	70132
— 11	7,847	— 0,48638	8,403	— 0,52084	8,960	— 0,55530	9,516	— 0,58975	10,072	— 0,62420	10,628	— 0,65866	11,185	— 0,69312
— 12	7,092	47967	7,598	51386	8,104	54795	8,611	58214	9,117	61632	9,619	65051	10,125	68470
— 13	6,449	47281	6,909	50672	7,372	54063	7,835	57455	8,298	60846	8,765	64235	9,228	67626
— 14	5,882	46603	6,308	49968	6,735	53332	7,161	56696	7,587	60060	8,015	63424	8,441	66788
— 15	5,422	45931	5,816	49269	6,210	52606	6,604	55943	6,998	59281	7,400	62618	7,794	65955
— 16	5,010	— 0,45266	5,377	— 0,48577	5,744	— 0,51887	6,111	— 0,55198	6,478	— 0,58508	6,845	— 0,61819	7,212	— 0,65130
— 18	4,317	43924	4,638	47181	4,959	50438	5,280	53695	5,601	56952	5,920	60209	6,241	63466
— 20	3,764	42596	4,048	45800	4,332	49004	4,616	52208	4,900	55412	5,183	58616	5,467	61820
— 22	3,311	41301	3,565	44453	3,818	47605	4,072	50737	4,326	53909	4,579	57061	4,832	60213
— 25	2,763	39315	2,980	42387	3,197	45459	3,414	48532	3,632	51604	3,850	54677	4,067	57749
— 30	2,102	36086	2,275	39029	2,448	41973	2,621	44916	2,794	47860	2,967	50803	3,140	53746
— 35	1,628	— 0,32914	1,769	— 0,35731	1,910	— 0,38547	2,052	— 0,41364	2,193	— 0,44180	2,337	— 0,46997	2,479	— 0,49814
— 40	1,278	29801	1,395	32493	1,513	35185	1,631	37877	1,749	40569	1,866	43261	1,984	45953
— 45	1,004	26744	1,103	29314	1,202	31884	1,302	34453	1,401	37023	1,501	39593	1,600	42163
— 50	0,786	23751	0,871	26201	0,956	28651	1,041	31101	1,126	33551	1,210	36001	1,295	38451
— 55	0,610	20822	0,683	23155	0,756	25488	0,829	27821	0,901	30154	0,974	32487	1,047	34820
— 60	0,464	17961	0,527	20179	0,590	22398	0,653	24616	0,716	26835	0,779	29053	0,842	31271

XV *bis* (page 344).

n	F	log F	h	log h	$\frac{H}{X}$	n	F	log — F	h	log h	$\frac{H}{X}$
2.0	0,93278	$\bar{1}$,96978	0,65906	$\bar{1}$,81893	0,37	4.1	— 0,01588	$\bar{2}$,20085	0,66085	$\bar{1}$,81977	2,51
	83798	92323	66460	82256	0,20	4.2	03193	50415	65494	81620	2,33
2.1	87700	94300	65938	81914	0,39	4.3	04841	68494	65070	81338	2,15
2.2	82123	91446	65975	81938	0,42	4.4	05515	74155	63782	80470	2,67
2.3	76545	88392	66016	81965	0,44	4.5	06652	82295	62999	79933	2,76
2.4	0,70967	$\bar{1}$,85106	0,66066	$\bar{1}$,81998	0,48	4.6	— 0,07565	$\bar{2}$,87881	0,62027	$\bar{1}$,79258	2,80
2.5	65389	81550	66124	82036	0,52	4.7	10381	$\bar{1}$,01624	63075	79986	2,00
2.6	59811	77678	66192	82081	0,57	4.8	10957	03969	61999	79238	2,21
2.7	54233	73426	66273	82134	0,63	4.9	11325	05404	60689	78311	2,46
2.8	48656	68714	66375	82200	0,70	5.0	11501	06074	59092	77153	2,76
						5.1	13951	14461	60110	77895	2,24
2.9	0,43078	$\bar{1}$,63426	0,66502	$\bar{1}$,82283	0,79	5.2	— 0,13824	$\bar{1}$,14063	0,58368	$\bar{1}$,76617	2,56
3.0	37500	57403	66667	82391	∞	5.3	16157	20836	59243	77264	2,16
3.1	31922	50409	66889	82535	1,05	5.4	15743	19709	57316	75828	2,49
3.2	26344	42068	67205	82740	1,27	5.5	17961	25433	58130	76440	2,16
3.3	20767	31737	67691	83053	1,60	5.6	20179	30490	58764	76911	1,90
3.4	15189	18153	68535	83591	2,16	5.7	23398	35021	59273	77286	1,70
3.5	0,12025	$\bar{1}$,08009	0,68309	$\bar{1}$,83448	2,05	5.8	— 0,24616	$\bar{1}$,39122	0,59690	$\bar{1}$,77590	1,53
3.6	08804	94468	68283	83431	2,19	5.9	26835	42870	60039	77843	1,40
3.7	06156	78930	68031	83271	2,24		29053	46319	60334	78056	1,28
3.8	04054	60788	67511	82937	2,06	6.0	54677	73780	66043	81983	0,26
3.9	01704	23147	67305	82805	2,63		50803	70589	65703	81459	0,34
4.0	0,00000	— ∞	66667	82391	∞	6.1	31271	49514	60587	78238	

XVI (page 339).

F POSITIF						F NÉGATIF					
$\frac{1600aFX}{3k}$	$\log\frac{aFX}{k}$	log P	$\frac{1600aFX}{3k}$	$\log\frac{aFX}{k}$	log P	$\frac{1600aFX}{3k}$	$\log-\frac{aFX}{k}$	log Q	$\frac{1600aFX}{3k}$	$\log-\frac{aFX}{k}$	log Q
1	$\bar{3}$,27300	$\bar{3}$,19250	50	$\bar{2}$,97197	$\bar{2}$,83119	— 1	$\bar{3}$,27300	$\bar{3}$,19519	— 50	$\bar{2}$,97197	$\bar{2}$,96375
2	57403	49222	55	$\bar{1}$,01336	86685	— 2	57403	49750	— 55	$\bar{1}$,01336	$\bar{1}$,01297
3	75012	66700	60	05115	89898	— 3	75012	57491	— 60	05115	05861
4	87506	79064	65	08591	92816	— 4	87506	80118	— 65	08591	10136
5	97197	88624	70	11810	95483	— 5	97197	89943	— 70	11810	14177
6	$\bar{2}$,05115	96413	80	17609	$\bar{1}$,00198	— 6	$\bar{2}$,05115	97995	— 80	17609	21632
7	$\bar{2}$,11810	$\bar{2}$,02977	90	$\bar{1}$,22724	$\bar{1}$,04255	— 7	$\bar{2}$,11810	$\bar{2}$,04824	— 90	$\bar{1}$,22724	$\bar{1}$,28471
8	17609	08657	100	27300	07796	— 8	17609	10758	— 100	27300	34830
9	22724	13635	110	31439	10925	— 9	22724	16008	— 110	31439	40820
10	27300	18080	120	35218	13206	— 10	27300	20720	— 120	35218	45113
11	31439	22093	130	38694	16224	— 11	31439	24999	— 130	38694	50982
12	35218	25723	140	41913	18495	— 12	35218	28183	— 140	41913	57282
13	$\bar{2}$,38694	$\bar{2}$,29093	150	$\bar{1}$,44909	$\bar{1}$,20564	— 13	$\bar{2}$,38694	$\bar{2}$,32523	— 150	$\bar{1}$,44909	$\bar{1}$,62766
14	41913	32185	160	47712	22459	— 14	41913	35878	— 160	47712	67415
15	44909	35059	170	50345	24202	— 15	44909	39117	— 170	50345	72338
16	47712	37731	180	52827	25811	— 16	47712	41953	— 180	52827	77215
18	52827	42595	190	55175	27313	— 18	52827	47345	— 190	55175	81916
20	57403	46921	200	57403	28691	— 20	57403	52200	— 200	57403	86646
22	$\bar{2}$,61542	$\bar{2}$,50811	210	$\bar{1}$,59522	$\bar{1}$,29986	— 22	$\bar{2}$,61542	$\bar{2}$,56619	— 210	$\bar{1}$,59522	$\bar{1}$,91242
25	67094	55986	220	61542	31200	— 25	67094	62589	— 220	61542	95694
30	75012	63299	240	65321	33401	— 30	75012	71218	— 240	65321	$\bar{0}$,03779
35	81707	69383	260	68797	35355	— 35	81707	78536	— 260	68797	09186
40	87506	74579	280	72046	37104	— 40	87506	85185	— 280	72016	06695
45	92621	79123	300	75012	38676	— 45	92621	91048			

XVII (page 351).

$X = \frac{800\,bX}{a}$	$\log \frac{bX}{a}$	log G	log G_1	log qX	qX	qX	log qX	log E	log E_1	log K	log K_1
1	$\bar{3}$,57403	0,29941	0,17610	$\bar{3}$,87344	0,007	0,007	$\bar{3}$,87344	0,17470	$\bar{3}$,98119	$\bar{1}$,99861	$\bar{3}$,80508
2	87506	29778	17610	$\bar{2}$,17284	015	015	$\bar{2}$,17284	17331	$\bar{2}$,27921	99722	$\bar{2}$,10311
3	$\bar{2}$,05115	29618	17611	34733	022	022	34733	17194	45232	99582	27621
4	17609	29455	17612	47064	030	030	47064	17058	57426	99446	39814
5	27300	29294	17613	56595	037	037	56595	16921	66820	99308	49207
6	$\bar{2}$,35218	0,29134	0,17615	$\bar{2}$,64352	0,044	0,044	$\bar{2}$,64352	0,16785	$\bar{2}$,74443	$\bar{1}$,99170	$\bar{2}$,56828
7	41913	28975	17617	70888	051	051	70888	16651	80844	99033	63227
8	47712	28817	17619	76529	058	058	76529	16517	86351	98897	68732
9	52827	28759	17621	81586	065	065	81586	16383	91278	98761	73653
10	57403	28498	17625	85901	072	072	85901	16251	95357	98626	77832
11	$\bar{2}$,61542	0,28340	0,17628	$\bar{2}$,89882	0,079	0,079	$\bar{2}$,89882	0,16119	$\bar{2}$,99307	$\bar{1}$,98491	$\bar{2}$,81679
12	65321	28179	17632	93500	086	086	93500	15988	$\bar{1}$,03794	98356	85162
13	68797	28026	17636	96823	093	093	96823	15858	05987	98222	88351
14	72016	27869	17640	99885	100	100	99885	15728	08918	98088	91279
15	75012	27714	17645	$\bar{1}$,02726	106	106	$\bar{1}$,02726	15600	11632	97955	93987
16	77815	27557	17649	05372	113	113	05372	15471	14149	97822	96500
18	$\bar{2}$,82930	0,27247	0,17659	$\bar{1}$,10177	0,127	0,127	$\bar{1}$,10177	0,15217	$\bar{1}$,18699	$\bar{1}$,97557	$\bar{1}$,01040
20	87506	26910	17671	14446	139	139	14446	14966	22717	97294	05046
22	91645	26627	17684	18272	152	152	18272	14717	28294	97033	08610
25	.97197	26176	17705	23374	171	171	23374	14318	31027	96613	13322
30	$\bar{1}$,05115	25421	17744	30536	202	202	30536	13743	37587	95999	19843
35	11810	24682	17790	36492	232	232	36492	13162	42958	95371	25168
40	$\bar{1}$,17609	0,23952	0,17843	$\bar{1}$,41561	0,260	0,260	$\bar{1}$,41561	0,12591	$\bar{1}$,47456	$\bar{1}$,94748	$\bar{1}$,29614
45	22724	23231	17901	45956	288	288	45956	12032	51295	94131	33394
50	27300	22521	17965	49821	315	315	49821	11490	54619	93526	36654
55	31439	21820	18034	53259	341	341	53259	10965	57528	92932	39495
60	35218	21130	18108	56348	366	366	56358	10453	60102	92345	41994
80	47712	18441	18450	66153	459	459	66153	08510	67969	90060	49520

XVIII (p. 148). Table de perforation de Noble.

CENTI-MÈTRES.	0 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	CENTI-MÈTRES.
0	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,05	0,06	0
1	0,07	0,09	0,10	0,11	0,13	0,14	0,15	0,17	0,18	0,19	1
2	0,21	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	2
3	0,40	0,43	0,45	0,47	0,50	0,52	0,54	0,57	0,59	0,61	3
4	0,64	0,67	0,69	0,72	0,75	0,77	0,80	0,83	0,85	0,88	4
5	0,91	0,94	0,97	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15	1,18	5
6	1,21	1,25	1,28	1,31	1,35	1,38	1,41	1,45	1,48	1,51	6
7	1,55	1.59	1,62	1,66	1,70	1,74	1.78	1,81	1,85	1,89	7
8	1,93	1,97	2,01	2,05	2,08	2,12	2,16	2,20	2,24	2,28	8
9	2,32	2,37	2,41	2,45	2,50	2,54	2,58	2,63	2,67	2,71	9
10	2,75	2,80	2,84	2,89	2,93	2,98	3,02	3,07	3,11	3,16	10
11	3,21	3,25	3,30	3,35	3,39	3,44	3,49	3,53	3,58	3,63	11
12	3,68	3,73	3,78	3,83	3,89	3,94	3,99	4,04	4,09	4,14	12
13	4,19	4,24	4,30	4,35	4,40	4,45	4,50	4,56	4,61	4,66	13
14	4,71	4,77	4,82	4,88	4,93	4,99	5,04	5,10	5,16	5,21	14
15	5,27	5,33	5,38	5,44	5,50	5,55	5,61	5,67	5,72	5,78	15
16	5,84	5,90	5,96	6,02	6,07	6,13	6,19	6,25	6,31	6,37	16
17	6,43	6,50	6,56	6,62	6,68	6,74	6,81	6,87	6,93	6,99	17
18	7,05	7,12	7,18	7,24	7,31	7,37	7,43	7,50	7,56	7,62	18
19	7,69	7,75	7,82	7,88	7,95	8,01	8,08	8,14	8.21	8,27	19
20	8,34	8,41	8,48	8,54	8,61	8,68	8,75	8,82	8,88	8,95	20
21	9,02	9,09	9,16	9,23	9,30	9,37	9,44	9,51	9,58	9,65	21
22	9,72	9,79	9,87	9,94	10,01	10,08	10,15	10,22	10,29	10,36	22
23	10,43	10,51	10,58	10,65	10,73	10,80	10,87	10,95	11,02	11,09	23
24	11,17	11,24	11,32	11,39	11,47	11,54	11,62	11,69	11,77	11,84	24
25	11,92	12.00	12,08	12,15	12,23	12,31	12,39	12,47	12,54	12,62	25
26	12,70	12,78	12,86	12,94	13,01	13,09	13,17	13,25	13,33	13,41	26
27	13,49	13,57	13,65	13,74	13,82	13,90	13,98	14,06	14,14	14,22	27
28	14,30	14,39	14,47	14,55	14,63	14,71	14,80	14,88	14,96	15,04	28
29	15,12	15,21	15,29	15,37	15,46	15,54	15,62	15,71	15,79	15,87	29
30	15.96	16,04	16,13	16,22	16,30	16,39	16,48	16,56	16,65	16,74	30
31	16,82	16,91	17,00	17,09	17,17	17,26	17,35	17,44	17,53	17,61	31
32	17,70	17,79	17,88	17,97	18,06	18,15	18,23	18,32	18,41	18,50	32
33	18,59	18,68	18,77	18,86	18,96	19,05	19,14	19,23	19,32	19,41	33
34	19,50	19,60	19,69	19,78	19,87	19,97	20,06	20,15	20,25	20,34	34
35	20,43	20,53	20,62	20,72	20,81	20,91	21,00	21,10	21,19	21,29	35
36	21,38	21,48	21,57	21,67	21,76	21,86	21,95	22,05	22,14	22,24	36
37	22,34	22,43	22,53	22,63	22,72	22,82	22,92	23,02	23,11	23,21	37
38	23,31	23,41	23,50	23,60	23,70	23,80	23,90	23,99	24,09	24,19	38
39	24,29	24,39	24,49	24,59	24,70	24,80	24,90	25,00	25,10	25,20	39
40	25,30	25,41	25,51	25,61	25,71	25,81	25,91	26,02	26,12	26,22	40
41	26,32	26,42	26,53	26,63	26,73	26,84	26,94	27,04	27,15	27,25	41
42	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	28,09	28,19	28,30	42
43	28,40	28,51	28,61	28,72	28,82	28,93	29,03	29,14	29,24	29,35	43
44	29,46	29,56	29,67	29,78	29,89	30,00	30,10	30,21	30,32	30,43	44
45	30,54	30,65	30,76	30,86	30,97	31,08	31,19	31,30	31,41	31,52	45
46	31,63	31,74	31,85	31,96	32,08	32,19	32,30	32,41	32,52	32,63	46
47	32,74	32,86	32,97	33.08	33,19	33,31	33,42	33,53	33,64	33,76	47
48	33,87	33,98	34,10	34,21	34,32	34,44	34,55	34,66	34,78	34,89	48
49	35,00	35,12	35,23	35,35	35,46	35.58	35,69	35,81	35,92	36,04	49

XVIII (p. 148). Table de perforation de Noble (*suite*).

CENTIMÈTRES.	0 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	CENTIMÈTRES.
50	36,15	36,27	36,38	36,50	36,61	36,73	36,85	36,96	37,08	37,20	50
51	37,31	37,43	37,55	37,67	37,78	37,90	38,02	38,14	38,26	38,38	51
52	38,49	38,61	38,73	38,85	38,97	39,09	39,20	39,32	39,44	39,56	52
53	39,68	39,80	39,92	40,04	40,17	40.29	40,41	40,53	40,65	40,77	53
54	40,89	41,02	41,14	41,26	41,38	41,50	41,62	41,75	41,87	41,99	54
55	42,11	42,23	42,36	42,48	42,60	42,73	42,85	42,97	43,10	43,22	55
56	43,34	43,47	43,59	43,71	43,84	43,96	44,08	44,21	44,33	44,45	56
57	44,58	44,70	44,83	44,95	45,08	45,20	45,33	45,46	45,58	45,71	57
58	45,84	45,96	46,09	46,22	46,34	46,47	46,60	46,73	46,85	46,98	58
59	47,11	47,24	47,37	47,50	47,62	47,75	47,88	48,01	48,14	48,27	59
60	48,40	48,53	48,66	48,78	48,91	49,04	49,17	49,30	49,43	49,56	60
61	49,69	49,82	49,95	50,09	50,22	50,35	50,48	50,61	50,74	50,87	61
62	51,01	51,14	51,27	51,40	51,53	51,66	51,79	51,93	52,06	52,19	62
63	52,32	52,46	52,59	52,72	52,86	52,99	53,12	53,26	53,39	53,52	63
64	53,66	53,79	53,92	54,06	54,20	54,33	54,47	54,60	54,74	54.87	64
65	55,01	55,14	55,28	55,41	55,55	55,68	55,82	55,96	56,09	56,23	65
66	56,37	56,50	56,64	56,78	56,91	57,05	57,19	57,32	57,46	57,60	66
67	57,74	57,88	58,02	58,15	58,29	58,43	58,57	58,71	58,85	58,99	67
68	59,13	59,27	59,40	59,54	59,68	59,82	59,96	60,10	60,24	60,38	68
69	60,52	60,66	60,80	60,95	61,09	61,23	61,37	61,51	61,65	61,79	69
70	61,93	62,08	62,22	62,36	62,50	62,64	62,79	62,93	63,07	63,21	70
71	63,35	63,50	63,64	63,78	63,93	64,07	64,21	64,36	64,50	64,64	71
72	64,79	64,93	65,08	65,22	65,36	65,51	65,65	65,79	65,94	66,08	72
73	66,23	66,37	66,52	66,66	66,81	66,95	67,10	67,25	67,39	67,54	73
74	67,69	67,83	67,98	68,13	68,28	68,42	68,57	68,72	68,87	69,01	74
75	69,16	69,31	69,46	69,61	69,75	69,90	70,05	70,20	70,35	70,49	75
76	70,64	70,79	70,94	71,09	71,24	71,39	71,54	71,69	71,84	71,99	76
77	72,14	72,29	72,44	72,59	72,74	72,89	73,04	73,19	73,34	73,49	77
78	73,64	73,80	73,95	74,10	74,25	74,40	74,55	74,71	74,86	75,01	78
79	75,16	75,31	75,47	75,62	75,77	75,92	76,07	76,23	76,38	76,53	79
80	76,68	76,84	76,99	77,14	77,30	77,45	77,60	77,76	77,91	78,06	80
81	78,22	78,37	78,53	78,68	78,84	78,99	79,15	79,30	79,46	79,61	81
82	79,77	79,93	80,08	80,24	80,40	80,55	80,71	80,87	81,02	81,18	82
83	81,34	81,49	81,65	81,81	81,96	82,12	82,28	82,43	82,59	82,75	83
84	82,91	83,07	83,23	83,38	83,54	83,70	83,86	84,02	84,18	84,34	84
85	84,50	84,65	84 81	84,97	85,13	85,29	85,45	85,61	85,77	85,93	85
86	86,09	86,25	86,42	86,58	86,74	86.90	87,06	87,22	87,38	87,54	86
87	87,70	87,87	88,03	88,19	88,35	88,51	88,67	88,84	89,00	89,16	87
88	89,32	89,48	89,65	89,81	89,97	90,14	90,30	90,46	90,63	90,79	88
89	90,95	91,12	91,28	91,44	91,61	91,77	91,93	92,10	92,26	92,42	89
90	92,59	92,75	92,92	93,08	93,25	93,41	93,58	93,74	93,91	94,07	90
91	94,24	94,40	94,57	94,73	94,90	95,06	95,23	95,40	95,56	95,73	91
92	95,90	96,06	96,23	96,40	96,56	96,73	96,90	97,06	97,23	97,40	92
93	97,57	97,74	97,91	98,07	98,24	98,41	98,58	98,75	98,92	99,09	93
94	99,26	99,43	99,59	99,76	99,93	100,10	100,27	100,44	100,61	100,78	94
95	100,95	101,12	101,29	101,47	101,64	101,81	101,98	102,15	102,32	102,49	95
96	102,66	102,83	103,01	103,18	103,35	103,52	103,69	103,86	104,04	104,21	96
97	104,38	104,55	104,72	104,90	105,07	105,24	105,41	105,58	105,76	105,93	97
98	106,10	106,28	106,45	106,62	106,80	106,97	107,14	107,32	107,49	107,66	98
99	107,84	108,01	108,18	108,36	108,53	108,70	108,88	109,05	109,23	109,40	99
100	109,58	109,79	109,96	110,14	110,31	110,49	110,67	110,84	111,02	111,20	100
101	111,37	111,55	111,73	111,90	112,08	112,26	112,43	112,61	112,78	112,96	101
102	113,14	113,32	113,49	113,67	113,85	114,06	114,21	114,38	114,57	114,74	102
103	114,92	115,10	115,28	115,45	115,63	115,81	116,00	116,17	116,35	116,53	103
104	116,71	116,89	117,07	117,25	117,48	117,61	117,79	117,97	118,15	118,33	104
105	118,51										105

XIX (p. 148). Table de perforation de Gâvre.

CENTIMÈTRES.	0 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	CENTIMÈTRES.
0	0,00	0,01	0,02	0,04	0,06	0,07	0,09	0,11	0,12	0,14	0
1	0,16	0,19	0,22	0,25	0,27	0,30	0,33	0,36	0,39	0,41	1
2	0,44	0,47	0,51	0,54	0,57	0,61	0,64	0,67	0,71	0,74	2
3	0,77	0,81	0,85	0,89	0,93	0,96	1,00	1,04	1,08	1,12	3
4	1,15	1,19	1,23	1,27	1,31	1,36	1,40	1,44	1,48	1,53	4
5	1,57	1,61	1,66	1,71	1,75	1,80	1,85	1,89	1,94	1,99	5
6	2,03	2,08	2,13	2,18	2,23	2,28	2,32	2,37	2,42	2,47	6
7	2,52	2,57	2,63	2,68	2,73	2,78	2,83	2,88	2,94	2,99	7
8	3,04	3,10	3,15	3,20	3,26	3,31	3,36	3,42	3,47	3,52	8
9	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,86	3,92	3,98	4,03	4,09	9
10	4,15	4,21	4,27	4,33	4,39	4,45	4,50	4,56	4,62	4,68	10
11	4,74	4,80	4,87	4,93	4,99	5,05	5,11	5,18	5,24	5,30	11
12	5,36	5,43	5,49	5,55	5,62	5,68	5,74	5,81	5,87	5,93	12
13	6,00	6,06	6,13	6,19	6,26	6,32	6,39	6,45	6,52	6,58	13
14	6,65	6,72	6,79	6,85	6,92	6,99	7,06	7,13	7,19	7,26	14
15	7,33	7,40	7,47	7,54	7,61	7,67	7,74	7,81	7,88	7,95	15
16	8,02	8,09	8,16	8,23	8,30	8,38	8,45	8,52	8,59	8,66	16
17	8,73	8,81	8,88	8,95	9,02	9,10	9,17	9,24	9,32	9,39	17
18	9,46	9,54	9,61	9,68	9,76	9,83	9,90	9,98	10,05	10,12	18
19	10,20	10,27	10,35	10,42	10,50	10,57	10,65	10,73	10,80	10,88	19
20	10,96	11,03	11,11	11,19	11,27	11,35	11,42	11,50	11,58	11,66	20
21	11,74	11,82	11,90	11,98	12,06	12,13	12,21	12,29	12,37	12,45	21
22	12,53	12,61	12,69	12,77	12,85	12,93	13,01	13,09	13,17	13,25	22
23	13,33	13,42	13,50	13,58	13,66	13,74	13,83	13,91	13,99	14,07	23
24	14,15	14,23	14,32	14,40	14,48	14,56	14,64	14,73	14,81	14,89	24
25	14,98	15,07	15,15	15,24	15,32	15,41	15,49	15,58	15,66	15,75	25
26	15,83	15,92	16,00	16,09	16,17	16,26	16,35	16,43	16,52	16,61	26
27	16,69	16,78	16,87	16,95	17,04	17,13	17,21	17,30	17,39	17,47	27
28	17,56	17,65	17,74	17,83	17,91	18,00	18,09	18,18	18,27	18,36	28
29	18,44	18,53	18,62	18,71	18,80	18,89	18,98	19,07	19,16	19,25	29
30	19,34	19,43	19,52	19,61	19,70	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	30
31	20,25	20,34	20,44	20,53	20,62	20,71	20,80	20,89	20,99	21,08	31
32	21,17	21,26	21,36	21,45	21,54	21,64	21,73	21,82	21,92	22,01	32
33	22,10	22,20	22,29	22,38	22,48	22,57	22,66	22,76	22,85	22,94	33
34	23,04	23,13	23,23	23,32	23,42	23,51	23,61	23,70	23,80	23,89	34
35	23,99	24,08	24,18	24,27	24,37	24,46	24,56	24,66	24,75	24,85	35
36	24,95	25,04	25,14	25,24	25,33	25,43	25,53	25,62	25,72	25,82	36
37	25,92	26,01	26,11	26,21	26,31	26,41	26,51	26,61	26,71	26,81	37
38	26,90	27,01	27,11	27,21	27,31	27,41	27,51	27,61	27,71	27,81	38
39	27,91	28,01	28,11	28,21	28,31	28,42	28,52	28,62	28,72	28,82	39
40	28,92	29,02	29,13	29,23	29,33	29,43	29,53	29,63	29,74	29,84	40
41	29,94	30,04	30,15	30,25	30,35	30,46	30,56	30,66	30,77	20,87	41
42	30,97	31,08	31,18	31,28	31,39	31,49	31,59	31,70	31,80	31,90	42
43	32,01	32,11	32,22	32,32	32,43	32,53	32,64	32,74	32,85	32,95	43
44	33,06	33,16	33,27	33,37	33,48	33,58	33,69	33,80	33,90	34,01	44
45	34,12	34,22	34,33	34,44	34,54	34,65	34,76	34,86	34,97	35,08	45
46	35,18	35,29	35,40	35,51	35,61	35,72	35,83	35,94	36,05	36,15	46
47	36,26	36,37	36,48	36,59	36,69	36,80	36,91	37,02	37,13	37,23	47
48	37,34	37,45	37,56	37,67	37,78	37,89	38,00	38,11	38,22	38,33	48
49	38,44	38,55	38,66	38,77	38,88	38,99	39,10	39,21	39,32	39,43	49

XIX (p. 148). **Table de perforation de Gâvre** (*suite*).

CENTIMÈTRES.	0 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	CENTIMÈTRES.
50	39,54	39,65	39,76	39,87	39,98	40,10	40,21	40,32	40,43	40,54	50
51	40,65	40,76	40,88	40,99	41,10	41,21	41,32	41,43	41,55	41,66	51
52	41,77	41,88	42,00	42,11	42,22	42,34	42,45	42,56	42,68	42,79	52
53	42,90	43,02	43,13	43,24	43,36	43,47	43,58	43,70	43,81	43,92	53
54	44,94	44,15	44,27	44,38	44,50	44,61	44,72	44,84	44,95	45,07	54
55	45,18	45,30	45,41	45,53	45,64	45,76	45,87	45,92	46,10	46,22	55
56	46,34	46,45	46,57	46,68	46,80	46,91	47,03	47,15	47,26	47,38	56
57	47,50	47,61	47,73	47,85	47,97	48,08	48,20	48,32	48,44	48,55	57
58	48,67	48,79	48,81	48,93	49,04	49,16	49,28	49,40	49,52	49,63	58
59	49,85	49,97	50,09	50,21	50,33	50,44	50,56	50,68	50,80	50,92	59
60	51,04	51,16	51,28	51,40	51,52	51,64	51,75	51,87	51,99	52,11	60
61	52,23	52,35	52,47	52,59	52,71	52,83	52,95	53,07	53,19	53,31	61
62	53,43	53,55	53,67	53,79	53,91	54,04	54,16	54,28	54,40	54,52	62
63	54,64	54,76	54,89	55,01	55,13	55,25	55,37	55,49	55,62	55,74	63
64	55,86	55,98	56,11	56,23	56,35	56,48	56,60	56,72	56,85	56,97	64
65	57,09	57,22	57,34	57,46	57,59	57,71	57,83	57,96	58,08	58,20	65
66	58,32	58,45	58,57	58,69	58,82	58,94	59,06	59,19	59,31	59,43	66
67	59,56	59,69	59,81	59,93	60,06	60,18	60,31	60,43	60,56	60,68	67
68	60,81	60,93	61,06	61,19	61,31	61,44	61,57	61,69	61,82	61,95	68
69	62.07	62,19	62,32	62,45	62,57	62,70	62,83	62,95	63,08	63,21	69
70	63,33	63,46	63,59	63,71	63,84	63,97	64,09	64,22	64,35	64,47	70
71	64,60	64,73	64,86	64,98	65,11	65,24	65,37	65,49	65,62	65,75	71
72	65,88	66,01	66,13	66,26	66,39	66,52	66,65	66,78	66,90	67,03	72
73	67,16	67,23	67,42	67,55	67,68	67,80	67,93	68,06	68,19	68,32	73
74	68,45	68,58	68,71	68,84	68,97	69,10	69,23	69,36	69,49	69,62	74
75	69.75	69,88	70,01	70,14	70,27	70,41	70,54	70,67	70,80	70,93	75
76	71,06	71,19	71,32	71,45	71,58	71,71	71,85	71,98	72.11	72,24	76
77	72,37	72,50	72,64	72,77	72,90	73,03	73,16	73,29	73,43	73,56	77
78	73,69	73,82	73,95	74,09	74,22	74,35	74,48	74,61	74,75	74,88	78
79	75,01	75,14	75,28	75,41	75,54	75,68	75,81	75,94	76,08	76,21	79
80	76,34	76,48	76,61	76,74	76,88	77,01	77,14	77,28	77,41	77,54	80
81	77,68	77,81	77,95	78,08	78,22	78,35	78,49	78,62	78,76	78,89	81
82	79,03	79,16	79,30	79,43	79,57	79,70	79,84	79,97	80,11	80,24	82
83	80,38	80,51	80,65	80,79	80,92	81,06	81,20	81,33	81,47	81,61	83
84	81,74	81,88	82,02	82,15	82,29	82,43	82,56	82,70	82,84	82,98	84
85	83,14	83,25	83,39	83,52	83,66	83,80	83,93	84,07	84,21	84,35	85
86	84,48	84,62	84,76	84,90	85,03	85,17	85,31	85,45	85,59	85,72	86
87	85,86	86,00	86,14	86,28	86,42	86,56	86,69	86,83	86,97	87,11	87
88	87,25	87,39	87,53	87,67	87,81	87,94	88,08	88,22	88,36	88,50	88
89	88,64	88,78	88,92	89,06	89,20	89,34	89,48	89,62	89,76	89,90	89
90	90,04	90,18	90,32	90,46	90,60	90,74	90,88	91,02	91,16	91,30	90
91	91,44	91,59	91,73	91,87	92,01	92,15	92,29	92,43	92,57	92,71	91
92	92,85	92,99	93,13	93,27	93,41	93,56	93,70	93,84	93,98	94,12	92
93	94,26	94,40	94,55	94,69	94,83	94,97	95,11	95,25	95,40	95,54	93
94	95,68	95,82	95,97	96,11	96,25	96,40	96,54	96,68	96,83	96,97	94
95	97,11	97,26	97,40	97,54	97,69	97,83	97,97	98,12	98,26	98,40	95
96	98,54	98,69	98,83	98,97	99,12	99,26	99,40	99,55	99,69	99,83	96
97	99,98	100,12	100,27	100,41	100,56	100,70	100,85	100,99	101,14	101,28	97
98	101,43	101,57	101,71	101,86	102,01	102,15	102,30	102,44	102,59	102,73	98
99	102,88	103,02	103,17	103,32	103,46	103,61	103,76	103,85	101,05	104,20	99
100	104,34	105,07	107,28	108,75	110,23	111,72	113,21	114,71	116,22	117,72	100
110	119,24	120,75	122,28	123,81	125,35	126,89	128,44	130,00	131,55	133,12	110
120	134,69	136,26	137,84	139,43	141,01	142,61	144,21	145,81	147,42	149,03	120
130	150,66	152,28	153,91	155,55	157,19	158,83	160,48	162,13	163,79	165,46	130
140	167,13										140

XX (p. 148). Table de perforation de Krupp.

CENTI-MÈTRES.	0 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	CENTI-MÈTRES.
0	0,000	0,010	0,050	0,200	0,295	0,388	0,465	0,621	0,743	0,869	0
1	1,000	1,152	1,304	1,456	1,607	1,760	1,912	2,064	2,216	2,368	1
2	2,520	2,700	2,881	3,062	3,243	3,423	3,604	3,785	3,965	4,146	2
3	4,327	4,530	4,732	4,935	5,137	5,339	5,541	5,743	5,946	6,148	3
4	6,350	6,570	6,790	7,009	7,230	7,450	7,670	7,890	8,110	8,330	4
5	8,550	8,791	9,032	9,273	9,513	9,754	9,995	10,236	10,477	10,718	5
6	10,952	11,202	11,452	11,702	11,952	12,202	12,453	12,702	12,953	13,203	6
7	13,453	13,713	13,973	14,233	14,493	14,752	15,012	15,272	15,532	15,792	7
8	16,052	16,322	16,591	16,861	17,131	17,400	17,670	17,940	18,210	18,479	8
9	18,749	19,028	19,308	19,587	19,867	20,146	20,426	20,705	20,985	21,264	9
10	21,544	21,833	22,123	22,412	22,701	22,990	23,280	23,569	23,858	24,148	10
11	24,437	24,736	25,035	25,334	25,634	25,933	26,232	26,531	26,831	27,130	11
12	27,429	27,439	27,748	28,057	28,366	28,675	28,948	29,293	29,602	29,911	12
13	30,519	30,848	31,176	31,504	31,833	32,162	32,491	32,819	33,148	33,476	13
14	33,707	34,035	34,364	34,693	35,021	35,350	35,679	36,007	36,335	36,664	14
15	36,993	37,327	37,660	37,994	38,328	38,661	38,995	39,330	39,662	39,996	15
16	40,330	40,670	41,010	41,350	41,690	42,029	42,369	42,709	43,049	43,389	16
17	43,729	44,075	44,421	44,767	45,113	45,458	45,804	46,150	46,496	46,842	17
18	47,188	47,540	47,892	48,244	48,596	48,948	49.300	49,652	50,004	50,356	18
19	50,708	51,066	51,424	51,782	52,140	52,498	52,856	53,214	53,572	53,930	19
20	54,288	54,652	55,016	55,380	55,744	56,108	56,472	56,836	57,200	57,564	20
21	57,929	58,299	58,669	59,040	59,410	59,780	60,150	60,520	60,890	61,261	21
22	61,631	62,007	62,383	62,760	63,136	63,512	63,888	64,264	64,641	65,017	22
23	65,393	65,775	66,158	66,540	66,922	67,304	67,687	68,069	68,451	68,834	23
24	69,216	69,604	69,993	70,381	70,770	71,158	71,546	71,935	72,323	72,712	24
25	73,100	73,493	73,886	74,280	74,673	75,066	75,459	75,852	76,246	76,637	25
26	77,032	77,430	77,828	78,225	78,623	79,021	79,419	79,817	80,214	80,612	26
27	81,010	81,412	81,815	82,217	82,619	83,021	83,424	83,826	84,228	84,631	27
28	85,033	85,440	85,847	86,254	86,661	87,067	87,477	87,881	88,288	88,695	28
29	89,102	89,513	89,930	90,336	90,748	91,159	91,571	91,912	92,394	92,805	29
30	93,217	93,633	94,049	94,465	94,881	95,297	95,713	96,129	96,545	96,961	30
31	97,377	97,798	98,218	98,639	99,060	99,480	99,901	100,322	100,743	101,163	31
32	101,584	102,009	102,434	102,860	103,285	103,710	104,155	104,560	104,986	105,411	32
33	105,836	106,266	106,695	107,125	107,555	107,984	108,414	108,844	109,274	109,703	33
34	110,133	110,567	111,002	111,436	111,871	112,305	112,739	113,174	113,608	114,043	34
35	114,477	114,916	115,355	115,793	116,232	116,671	117,110	117,549	117,987	118,426	35
36	118,865	119,308	119,750	120,193	120,636	121,078	121,521	121,964	122,407	122,849	36
37	123,292	123,758	124,185	126.631	125,078	125,524	125,970	126,417	126,863	127,310	37
38	127,756	128,199	128,642	129,085	129,528	129,971	130,414	130,857	131,300	131,743	38
39	132,186	132,647	133,108	133,570	134,031	134,492	134,953	135,414	135,876	136,337	39
40	136,798	137,256	137,713	138,171	138,629	139,086	139,544	140,002	140,460	140,917	40
41	141,375	141,836	142,298	142,759	143,221	143,682	144,144	144,605	145,067	145,528	41
42	145,990	146,435	146,920	147,385	147,850	148,315	148,780	149,245	149,710	150,175	42
43	150,640	151,109	151,578	152,048	152,517	152,986	153,455	153,924	154,394	154,863	43
44	155,332	155,805	156,278	156,750	157,223	157,696	158,169	158,642	159,114	159,587	44
45	160,060	160,536	161,013	161,489	161,966	162,442	162,919	163,395	163,872	164,348	45
46	164,825	165,305	165,785	166 264	166,744	167,224	167,704	168,184	168,663	169,143	46
47	169,623	170,106	170,589	171,072	171,555	172,038	172,521	173,004	173,487	173,970	47
48	174,453	175,039	175,525	176,012	176,498	176,984	177,470	177,956	178,442	178,929	48
49	179,315	179,804	180,292	180,781	181,269	181,758	182,247	182,735	183,224	183,712	49

XX (p. 148). **Table de perforation de Krupp** (*suite*).

CENTI-MÈTRES.	0 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	CENTI-MÈTRES.
50	184,201	184,694	185,188	185,681	186,175	186,668	187,161	187,655	188,148	188,642	50
51	189,135	189,613	190,127	190,622	191,118	191,614	192,110	192,606	193,101	193,597	51
52	194,094	194,593	195,092	195,591	196,090	196,589	197,089	197,588	198,087	198,586	52
53	199,085	199,590	200,096	200,601	201,106	201,611	202,117	202,622	203,127	203,633	53
54	204,138	204,640	205,145	205,645	206,148	206,650	207,153	207,655	208,138	208,660	54
55	209,163	209,672	210,181	210,689	211,198	211,707	212,216	212,725	213,233	213,742	55
56	214,251	214,763	215,274	215,786	216,297	216,809	217,321	217,832	218,344	218,855	56
57	219,367	219,882	220,396	220,911	221,425	221,940	222,455	222,969	223,484	223,998	57
58	224,513	225,031	225,548	226,066	226,583	227,101	227,619	228,136	228,654	229,171	58
59	229,689	230,209	230,730	231,250	231,770	232,290	232,811	233,331	233,851	234,362	59
60	234,892	235,415	235,939	236,462	236,985	237,508	238,032	238,555	239,078	239,602	60
61	240,125	240,651	241,177	241,703	242,230	242,756	243,289	243,808	244,335	244,861	61
62	245,387	245,916	246,445	246,974	247,303	248,032	248,562	249,091	249,620	250,149	62
63	250,678	251,210	251,742	252,274	252,806	253,338	253,870	254,402	254,934	255,466	63
64	255,998	256,533	257,068	257,603	258,138	258,672	259,207	259,742	260,277	260,812	64
65	261,347	261,884	262,422	262,959	263,496	264,033	264,571	265,108	265,645	266,182	65
66	266,723	267,263	267,804	268,344	268,884	269,424	269,965	270,505	271,045	271,586	66
67	272,126	272,669	273,212	273,754	274,297	274,840	275,383	275,926	276,468	277,011	67
68	277,554	278,099	278,645	279,190	279,736	280,281	280,827	281,372	281,918	282,463	68
69	283,009	283,557	284,105	284,653	285,201	285,749	286,298	286,846	287,394	287,942	69
70	288,490	289,041	289,591	290,141	290,692	291,243	291,794	292,344	292,895	293,445	70
71	293,996	294,549	295,103	295,655	296,209	296,762	297,316	297,869	298,422	298,975	71
72	299,529	300,085	300,641	301,197	301,753	302,308	302,864	303,420	303,976	304,532	72
73	305,088	305,646	306,205	306,763	307,322	307,880	308,439	308,997	309,556	310,114	73
74	310,673	311,234	311,796	312,357	312,919	313,480	314,041	314,603	315,164	315,726	74
75	316,287	316,852	317,417	317,983	318,548	319,113	319,678	320,243	320,809	321,374	75
76	321,939	322,506	323,073	323,639	324,206	324,743	325,340	325,907	326,473	327,040	76
77	327,607	328,175	328,744	329,312	329,881	330,449	331,018	331,586	332.135	332,723	77
78	333,292	333,862	334,432	335,002	335,572	336,142	336,712	337,282	337,852	338,422	78
79	338,992	339,564	340,136	340,707	341,279	341,851	342,423	342.995	343,566	344,138	79
80	344,710	345,283	345,857	346,430	347,003	347,573	348,150	348,723	349,296	349,870	80
81	350,443	351,018	351,593	352,168	352,743	353,318	353,893	354,468	355,043	355,618	81
82	356,193	356,770	357,346	357,923	358,499	359,076	359,653	360,229	360,806	361,382	82
83	361,959	362,538	363,118	363,697	364,276	364,855	365,435	366,014	366,593	367,173	83
84	367,752	368,332	368.912	369,492	370,072	370,651	371,231	371,811	372,391	372,971	84
85	373,541	374,134	374,727	375,419	375,912	376,505	377,098	377,691	378,283	378,876	85
86	379,469	380,063	380,657	381,252	381,846	382,440	383,034	383,628	384,223	384,817	86
87	385,411	386,007	386,602	387,198	387,794	388,389	388,985	389,581	390,177	390,772	87
88	391,368	391,965	392,562	393,160	393,757	394,354	394,951	395,548	396,146	396,743	88
89	397,340	397,939	398,537	399,136	399,734	400,533	400,932	401,530	402,129	402,727	89
90	403,326	403,926	404,526	405,126	405,726	406,326	406,927	407,527	408,127	408,727	90
91	409,327	409,928	410,530	411,131	411,733	412,334	412,936	413,537	414,139	414,740	91
92	415,342	415,945	416,548	417,151	417,754	418,357	418,960	419,563	420,166	420,769	92
93	421,372	421,976	422,579	423,183	423,787	424,390	424,994	425,597	426,202	426,805	93
94	427,409	428,016	428,622	429,229	429,836	430,442	431,049	431,655	432,263	432,869	94
95	433,476	434,077	434,678	435,279	435,880	436,481	437,082	437,683	438,284	438,885	95
96	439,486	440,093	440,701	441,308	441,915	442,522	443,130	443,737	444,344	444,952	96
97	445,559	446,173	446,786	447,400	448,013	448,627	449,241	449,854	450,468	451,081	97
98	451,695	452,315	452,935	453,555	454,175	454,795	455,415	456,035	456,655	457,275	98
99	457,895	458,621	459,148	459,774	460,401	461,027	461,653	462.280	462,906	463,538	99
100	464,159	464,796	465,425	466,057	466,691	467,326	467,956	468,589	469,222	469,855	100

Nancy, impr. Berger-Levrault et Cie.

EXTRAIT DU CATALOGUE

Composition du personnel des bataillons d'artillerie de forteresse et des régiments d'artillerie de campagne, à partir du 1er sept. 1883, suivie de la loi du 24 juillet 1883 (texte et tableaux). Grand in-8°, broché . . 1 fr. 50 c.

De la Conduite de l'artillerie dans les manœuvres et au combat, traduit de l'allemand avec l'autorisation de l'auteur, par A. Orth, sous-lieutenant d'artill. 1883. In-8°. 2 fr. 50 c.

Considérations générales sur la marche des parcs d'artillerie et sur le ravitaillement des armées en munitions d'artillerie, par B. Camps, chef d'esc. d'art. 1891. In-8°. 1 fr.

Considérations sur le réglage du tir de campagne, par L. Trone, colonel d'artillerie. 1891. In-8°, broché. . . . . 75 c.

Correction a faire subir a la hausse en raison de l'élévation du but, par M. Percin, capitaine d'artillerie. 1882. In-8°, avec 7 fig. . 1 fr.

Cours spécial sur le matériel de côte, à l'usage des cadres de l'artillerie de la marine, par A. Delaissey, colonel d'artillerie de la marine. 1890. Vol. in-12, avec 73 figures, br. 2 fr.

Déformation des corps solides. Limite d'élasticité et résistance à la rupture, par Ch. Duguet. 2e partie : Statique générale. 1885. Vol. in-8°, avec 119 figures, broché . . . 7 fr. 50 c.

Sur la Dépendance mutuelle des divers éléments d'un système d'artillerie, par A. Duchêne, chef d'escadron d'artillerie. 1875. In-8°, broché. . . . . 1 fr. 50 c.

Le Destructeur et le canon sous-marin Ericsson, leur usage dans la guerre navale, leurs avantages, et histoire sommaire de l'artillerie sous-marine, par William H. Jaques, lieutenant de la marine des États-Unis. Traduit de l'anglais, avec l'autorisation de l'auteur, par le capitaine B. 1887. In-8°, broché. . . . . . 3 fr.

Détermination des vitesses des projectiles au moyen des phénomènes sonores, par le capitaine Gossot, de l'artillerie de la marine. 1891. In-8° . . . . 1 fr. 25 c.

Le Dressage des jeunes chevaux dans l'artillerie, par de Landrevie, capitaine d'artillerie. 1889. In-8°, broché. . . . . 75 c.

L'Emploi de l'artillerie dans les grandes combinaisons de troupes. Étude d'application exposée en conférence au cercle militaire de Posen, le 15 mars 1884, par le lieutenant-colonel Hoffbauer, commandant le régiment d'artillerie de campagne prussien n° 20. Traduction du capitaine Bodenhorst, de l'artillerie belge. Un vol. in-8°, avec planches; broché. 2 fr. 50 c.

Emploi de l'artillerie de montagne dans l'expédition du Tonkin, par E. Jourdy, chef d'escadron d'artillerie. 1890. In-8°. 1 fr. 25 c.

Essai sur le mouvement des projectiles oblongs, par M. Astier, chef d'escadron d'artillerie, professeur à l'École d'application. 2e édition. 1873. In-8°, broché . . . 1 fr. 50 c.

Essai sur les principes de la balistique extérieure, par E. Vallier, capitaine d'artillerie. 1886. In-8°. . . . . 1 fr.

Essai sur le tir fusant des projectiles de campagne, par M. Percin, capitaine d'artillerie. 1881. In-8°, broché . . . . 1 fr.

Sur l'Établissement des tables de tir de l'artillerie (modèle 1870) et sur la formule des durées de trajet $T = N\sqrt{x \operatorname{tg} \alpha}$, par M. Beauvoir, lieut. de vaisseau. 1878. Gr. in-8°, br. 2 fr.

État militaire du corps de l'artillerie de France pour l'année 1891. Un volume in-12 de 1011 pages, broché . . . . 4 fr. 50 c.
Relié. . . . . 6 fr. 50 c.

Étude sur l'artillerie navale, par A. Bienaimé, lieutenant de vaisseau. 1878. Grand in-8°, broché. . . . . 2 fr.

Étude de balistique sur les bouches a feu de l'artillerie navale, par le col. J.-B. V. Lefèvre, de l'artillerie. 1891. In-8°, avec 9 figures. 1 fr. 25 c.

Étude comparative des méthodes de tir de l'artillerie de campagne en France et dans les armées étrangères, par De Maistre, chef d'escadron d'artillerie. 1884. In-8°. 1 fr. 25 c.

Étude sur les erreurs d'observation. Mémoire présenté à l'Académie des sciences par J.-E. Estienne, lieutenant au 28e d'artillerie. 1890. In-8° . . . . 1 fr.

Étude sur les lois de la résistance de l'air, par E. Vallier, capitaine d'artillerie. 1885 In-8°. . . . . 1 fr. 25 c.

Étude d'une méthode de tir simulé, fondée sur l'emploi de pétards pour indiquer l'éclatement des projectiles, par M. Aubrat, lieutenant au 16e d'artillerie. 1883. In-8°, avec figures. . 1 fr.

Étude sur l'ordre normal de marche dans les groupes d'artillerie, par M. Guitry, capitaine d'artillerie. 1885. In-18°, broché . . 1 fr. 25 c.

Étude sur l'organisation du service technique dans les manufactures d'armes, par G. Ply, capitaine d'artillerie. 1889. Vol. in-8°, avec 63 figures et 1 planche, broché . . . 4 fr.

Étude pratique sur le tir en brèche a grande distance, par R. Deville, lieutenant au 30e régiment d'artillerie. 1878. In-8°, broché. 1 fr. 50 c.

Étude sur le rendement du cheval d'artillerie, par A. Audebrand, capitaine d'artillerie. 1888. In-8°, broché . . . . 2 fr.

Étude sur les tensions intérieures dans la fonte et l'acier, par N. V. Kalakoutski, général de l'artillerie russe. 1888. In-8°, avec 3 planches, broché . . . . 3 fr.

Étude sur le tir fusant de l'obus modèle 1879, par M. de Galembert, capitaine d'artillerie. 1882. In-8°. . . . . 50 c.

Études sur l'artillerie, par P. Ploix, chef d'escadron d'artillerie. L'Artillerie de forteresse. 1881. In-8°, broché. . . . 1 fr. 25 c.
— Les Écoles a feu. 1881. In-8°, broché. . 1 fr.
— Les Masses d'artillerie. 1882. In-8°, broché. 1 fr. 50 c.
— Le Service a l'arrière dans l'artillerie en temps de guerre. 1884. In-8°, avec 1 carte. 3 fr. 50 c.

De l'Exécution des marches tactiques de l'artillerie, par le même. 1887. In-8°. 50 c.

Les Exercices pratiques d'artillerie a l'École supérieure de guerre, par le colonel Vaucheret, direct. de la section technique de l'artillerie au Ministère de la guerre. 1886. In-8°. 1 fr. 25 c.

Expériences américaines sur le frettage des bouches a feu, par G. Moch, lieutenant d'artillerie. Suivi d'une note du général Kalakoutski, de l'artillerie russe. 1889. In-8°, avec 16 figures. . . . . 3 fr.

Sur la Fabrication des cordages. Rapport établi à la suite d'une mission à Angers, par A. Millasseau, capitaine d'artillerie. 1888. In-8°, avec 1 planche. . . . . 2 fr. 50 c.

Les Feux de guerre. Les feux d'infanterie et d'artillerie. Conditions nouvelles qu'ils imposent à la formation de combat et au mode d'action du bataillon, par T. A. Basin, capitaine d'infanterie. 1881. In-8°, broché . . . . 1 fr. 25 c.

Fixation photographique des phénomènes auxquels donne lieu le projectile pendant son trajet dans l'air. 1888. In-8°, avec 8 fig. et 1 pl. . . . . 1 fr. 25 c.

Formule pratique des télémètres, par P. Peigné, capitaine d'artillerie. 1879. In-8°, avec 9 gravures, broché . . . . 1 fr.

Les Fusées de guerre en France, une page de l'histoire de l'artillerie, par A. Pralon, capitaine d'artillerie. 1883. In-8°, avec 5 planches in-4°; broché. . . . . 3 fr.

Le Général Drouot (1774-1847), par M. Girod de l'Ain, capitaine d'artillerie. 1890. Vol. in-8°, avec portrait; broché. . . . . . . 2 fr. 50 c.

Les deux Généraux de Senarmont, par M. Girod de l'Ain, capitaine d'artillerie. 1891. Vol. grand in-8°, avec 2 portraits en hélio-gravure. 3 fr. 50 c.

Gribeauval, premier inspecteur général de l'artillerie (1715-1789), par P. Veyrines, capitaine adjoint à la section technique de l'artillerie. 1889. In-8°, avec 3 phototypies, broché. 1 fr. 50 c.

Guerre d'Orient. Siège de Sébastopol. Historique du service de l'artillerie (1854-1856), publié par ordre de M. le Ministre de la guerre. 1859. 2 forts volumes in-4°, brochés, de 1436 pages, avec un atlas in-folio oblong de 151 planches, cartonné avec couverture imprimée, dos en percaline. . . . . 80 fr.

Historique du 12e régiment d'artillerie. 1834-1890. Vol. in-8°, broché. . . . . . . 5 fr.

Historique des études faites a Calais sur les canons rayés de campagne. 1883. Vol. in-8°, avec 14 planches, broché . . . . . 7 fr. 50 c.

Influence de la constitution des projectiles sur les effets qu'ils peuvent produire dans diverses circonstances de guerre, par A. Viant, capitaine d'artillerie. 1886. In-8°, avec 7 figures, broché. . . . . 1 fr. 25 c.

Influence de la diminution progressive des vitesses initiales données par les cartouches métalliques sur la portée du fusil d'infanterie, par J.-B. V. Lefèvre, chef d'escadron d'artillerie. 1882. Gr. in-8°, broché. . . . . . . 75 c.

De l'Instruction a cheval dans les régiments d'artillerie de campagne, par A. Girette, lieutenant d'artillerie, instructeur d'équitation à l'École des élèves sous-officiers de Versailles. 1885. In-8°, broché . . . . 1 fr. 50 c.

L'Instruction et les règlements dans l'artillerie de campagne, par A. Girette, capitaine d'artillerie. 1891. In-8°, broché. . . 2 fr.

Instruction méthodique de pointage dans l'artillerie de campagne, par F. Otto, lieutenant dans l'artillerie bavaroise ; traduite de l'allemand par le commandant Thiou. 1876. In-8°. 1 fr. 50 c.

Instruction de tir dans l'artillerie de campagne, par H. Langlois, chef d'escadron d'artillerie. 1885. In-8°, avec 10 figures. . . . 2 fr.

Instruments de perspective. Pendulographe Grandjean, par P. Peigné, capitaine d'artillerie. 1879. In-8°, broché, avec 2 planches . . . 1 fr.

Lariboisière, premier inspecteur général de l'artillerie (1759-1812), par A. Abaut, capitaine d'artillerie. 1889. In-8°, broché. . . 2 fr.

Les Machines infernales dans la guerre de campagne. Application de la théorie des mines, par H. Wauwermans, lieutenant-colonel du génie. 2e édition, revue, corrigée et considérablement augmentée. 1876. Un volume in-12, avec 3 planches . . . . 3 fr.

Les Manœuvres en pays de montagnes, par F. de Villenéjane, capitaine d'artillerie. 1884. In-8°, broché . . . . 75 c.

Manœuvres tactiques de groupes d'artillerie avec tirs réels, par Priou, capitaine d'artillerie. 1884. In-8° . . . . 2 fr.

Manœuvres et tir des batteries a cheval attachées aux divisions de cavalerie, par le capitaine de Barberin. 1883. In-8° avec 4 fig., broché. . . . . 1 fr.

Manuel d'artillerie a l'usage des officiers, par M. Le Barzic, lieutenant de vaisseau. 1880. Un vol. in-12, broché. . . . . . . 3 fr. 50 c.

Manuel de la mitrailleuse Nordenfelt a trois canons. 1887. In-8°, avec 15 pl. . 3 fr.

Manuel de pointage et de tir des bouches a feu, à l'usage des officiers d'artillerie, par MM. Lestaudin, chef d'escadron d'artillerie, et Driant, capitaine d'artillerie. 1877. In-18, cartonné. . . . . 75 c.

Marche d'une batterie de 90 pendant la première partie de la campagne de 1881 en Tunisie. 1883. In-8°, avec 1 carte; broché . . . . 75 c.

Matériel d'artillerie de la marine espagnole. 1886. In-8°, avec 5 planches; broché. 1 fr. 50 c.

Méthode suivie a la poudrerie du Bouchet pour les essais et analyses des salpêtres raffinés, par F. Castan, chef d'escadron d'artillerie, directeur adjoint de la poudrerie du Bouchet. 1880. In-8°, broché . . . . . . 1 fr.

Sur les méthodes actuelles de balistique, par E. Vallier, capitaine d'artillerie. 1890. In-8°. . . . . 1 fr. 25 c.

Les Mises en batterie aux allures rapides, par de Job, chef d'escadron d'artillerie. 1884. In-8° . . . . 75 c.

Mitrailleuses et canons a tir rapide Nordenfelt. 1883. In-8°, avec 3 pl. in-4°; br. 2 fr. 50 c.

Modifications a apporter a la tactique de l'artillerie par suite de l'emploi de la poudre sans fumée. Conférence faite aux officiers par le colonel Marsillon. 1891. In-8°. 1 fr.

Sur le Mouvement des projectiles oblongs dans l'air, par E. Muzeau, chef d'escadron d'artillerie. 1879. In-8°, avec 25 fig.; br. 2 fr.

Napoléon et la défense des côtes, par le chef d'escadron Delauney, de l'artillerie de la marine. 1890. In-8°, broché . . . . . 1 fr. 50 c.

Sur la Nécessité d'un pointage précis pour les armes portatives a trajectoire tendue, par A. P. du Souich, capitaine d'artillerie. 1887. In-8°, avec 5 fig., broché. . . . . 75 c.

Note sur la conversion des poids et mesures. 1879. In-8°, avec planche; broché. . . . . 50 c.

NOTE SUR LE FULMI-COTON. 1877. Grand in-8°, broché. . . . . 2 fr.

NOTE SUR L'INSTRUCTION A CHEVAL DANS LES RÉGIMENTS D'ARTILLERIE, par H. BOYER. 1888. In-8°, avec 11 grav. . . . . 1 fr.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR CHARLES AUGER, général de division d'artillerie, par GRASSER. 1874. In-8°, broché. . . . . 1 fr.

LES OPÉRATIONS DE L'ARTILLERIE ALLEMANDE DANS LES BATAILLES LIVRÉES AUX ENVIRONS DE METZ, par le major HOFFBAUER ; traduit de l'allemand par le capitaine BODENHORST, du 5e régiment d'artillerie belge.

BATAILLE DE BORNY. 1 vol. in-8°, avec planches. . . . . 3 fr. 50 c.

BATAILLE DE VIONVILLE. Nouv. édit. 1885. 1 vol. in-8°, avec planches . . . 4 fr. 50 c.

BATAILLE DE NOISSEVILLE. 1 vol. in-8°, avec planches . . . . 5 fr.

OPÉRATIONS DE L'ARTILLERIE RUSSE pendant l'expédition de 1880-1881 dans l'Asie centrale. 1886. In-8°, avec 3 cartes et 1 tableau, br. 1 fr. 50 c.

OPÉRATIONS DE L'ESCADRE FRANÇAISE DANS LA RIVIÈRE MIN. 1885. In-8°, avec 2 planches. broché. . . . . 1 fr.

DU POIDS TIRÉ OU PORTÉ PAR LES CHEVAUX DANS LES BATTERIES DE 90, par E. LITRE, capitaine d'artillerie. 1886. In-8°. . . . . . . 1 fr. 25 c.

LA POUDRE SANS FUMÉE ET LA TACTIQUE, par G. MOCH, capitaine d'artillerie, adjoint à la section technique de l'artillerie. 3e tirage, augmenté de notes. 1891. In-8°. br. . . . . . 1 fr. 50 c.

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DES MANŒUVRES DES BATTERIES ATTELÉES, par P. DURAND, commandant l'artillerie de la 4e division de cavalerie. 1888. In-8°, broché. . . . . 1 fr. 25 c.

PROGRÈS RÉALISÉS PAR L'ARTILLERIE NAVALE de 1855 à 1880. Coup d'œil d'ensemble, par CAVELIER DE CUVERVILLE, capitaine de vaisseau. 1881. Grand in-8°, broché. . . . . 2 fr.

PROJET DE TENUE POUR L'ARTILLERIE, par le lieutenant-colonel D'ESCLAIBES D'HUST, directeur de l'École d'artillerie de Poitiers. 1882. In-8° avec 15 gravures et 2 planches . . . . . 2 fr. 50 c.

QUELQUES QUESTIONS DE TIR INDIRECT DE SIÈGE, par E. LOMBARD, capitaine d'artillerie. 1890. In-8°, avec 21 figures . . . . 1 fr. 50 c.

RAPPORT DE LA COMMISSION chargée de rechercher et d'étudier, à l'Exposition universelle de 1889, les objets, produits, appareils et procédés pouvant intéresser l'armée. SOUS-COMMISSION DE L'ARTILLERIE. 1892. Volume gr. in-8° de 331 p., avec gravures, 8 planches et 1 tableau, broché. 7 fr. 50 c.

RÉGLAGE DU TIR DE CAMPAGNE, par DE SAXCÉ, chef d'escadron d'artill. 1891. In-8°, br. 50 c.

RÉGLAGE ET ORGANISATION DU TIR DES BATTERIES DE CÔTE, par A. RIVALS, capitaine d'artillerie. 1891. Vol. in-8° de 359 pages, avec 110 figures, broché. . . . . 6 fr.

RÈGLEMENT DE TIR POUR L'ARTILLERIE DE CAMPAGNE ALLEMANDE (29 mai 1890). Traduction française. Vol. in-12, avec tableaux, br. . 3 fr.

RÈGLES DE TIR DE L'ARTILLERIE DE CAMPAGNE ALLEMANDE, par E. PICARD, lieutenant d'artillerie. 1890. In-8° . . . . 75 c.

DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR, par O. E. PAGE, professeur à l'école d'artillerie de Vincennes. 1878. In-8°, broché . . . . 1 fr.

RÉSUMÉ DES OPÉRATIONS DE L'ARTILLERIE ALLEMANDE PENDANT LE SIÈGE DE MÉZIÈRES EN 1870, par H. ROSWAG, capitaine d'artillerie. 1880. In-8°, avec 2 cartes ; broché . . . . 1 fr. 50 c.

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE CELLULAIRE DE L'ACIER, par A. COUHARD, capitaine d'artillerie. 1887. In-8°, avec 23 figures . . . . 1 fr. 25 c.

SERVICE DE L'ARTILLERIE DANS LA PLACE DE BELFORT pendant le siège de 1870-1871. Étude technique écrite sur l'invitation du colonel Denfert-Rochereau, par S. DE LA LAURENCIE, capitaine instructeur au 22e d'artillerie. 1872. In-8°, avec 8 planches ; broché . . . . 5 fr.

LE SERVICE DE BATTERIE EN TEMPS DE PAIX DANS L'ARMÉE ALLEMANDE, par E. FRIQUE, capitaine d'artillerie. 1885. In-8°, broché. 3 fr.

LE SERVICE DES BATTERIES DE CÔTE en temps de paix et en temps de guerre, par E. G. MILLON D'AILLY DE VERNEUIL, chef d'escadron de l'artillerie de la marine. 1890. In-8°, br. 1 fr. 25 c.

SUR UN SYSTÈME DE FERRURE A GLACE POUR CHEVAL DE TRAIT, par L. MASQUELIER, lieutenant d'artill. 1889. In-8°, avec 18 fig., br. 1 fr. 50 c.

TACTIQUE DE L'ARTILLERIE DE CAMPAGNE. *Règles de tir à l'usage de l'artillerie de campagne.* Extraits du *Titre IV* du règlement de l'artillerie de campagne prussienne. Traduit de l'allemand. 1878. In-8°, broché . . . . 1 fr.

TACTIQUE DE L'ARTILLERIE PENDANT LA GUERRE DE 1866, par J. BRUGÈRE, chef d'escadron d'artillerie. 1877. In-8°, avec 10 cartes ; broché. 5 fr.

TARIF DES PENSIONS DE RETRAITE. Artillerie. 1879. In-8°. . . . . 20 c.

TÉLÉMÈTRE LE CYRE. Rapport au Ministre des Pays-Bas, traduit du hollandais par M. GARNAULT, professeur à l'École navale. 1883. Grand in-8°, avec 11 figures ; broché. . . . 1 fr. 50 c.

TÉLÉPHONE-AVERTISSEUR, par J. PERRODON, capitaine au 30e régiment d'artillerie. 1879. In-8°, avec figures ; broché . . . . 50 c.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PHÉNOMÈNES que présentent le gyroscope, la toupie et le projectile oblong, par E. JOUFFRET, capitaine d'artillerie, adjoint au professeur du cours d'artillerie à l'École d'application de l'artillerie et du génie, à Fontainebleau. 1874. In-8°, broché. . . 1 fr.

LE TIR DE L'ARTILLERIE DE CAMPAGNE, par le major ROHNE, traduit de l'allemand par le capitaine d'artillerie belge BODENHORST. 1882. Gr. in-8°, 400 pages avec gravures et 12 planches ; broché . . . . 10 fr.

TIR DE GUERRE (siège et campagne). Résumé du Traité du capitaine F. SIACCI, par J. PRIOU, capitaine d'artillerie. 1880. In-8°, avec 4 figures ; broché . . . . 1 fr. 25 c.

LA TOURELLE DE SAINT-CHAMOND ET LA COUPOLE GRUSON AUX EXPÉRIENCES DE BUCHAREST, par E. BOSCH, capitaine d'artillerie. 1886. In-8°, avec figures et 3 planches . . . . 3 fr. 50 c.

TRAITÉ D'ARTILLERIE A L'USAGE DES OFFICIERS DE MARINE, par E. NICOL, lieutenant de vaisseau. 1892. Volume in-8° de la *Bibliothèque du marin.* *(Sous presse).*



